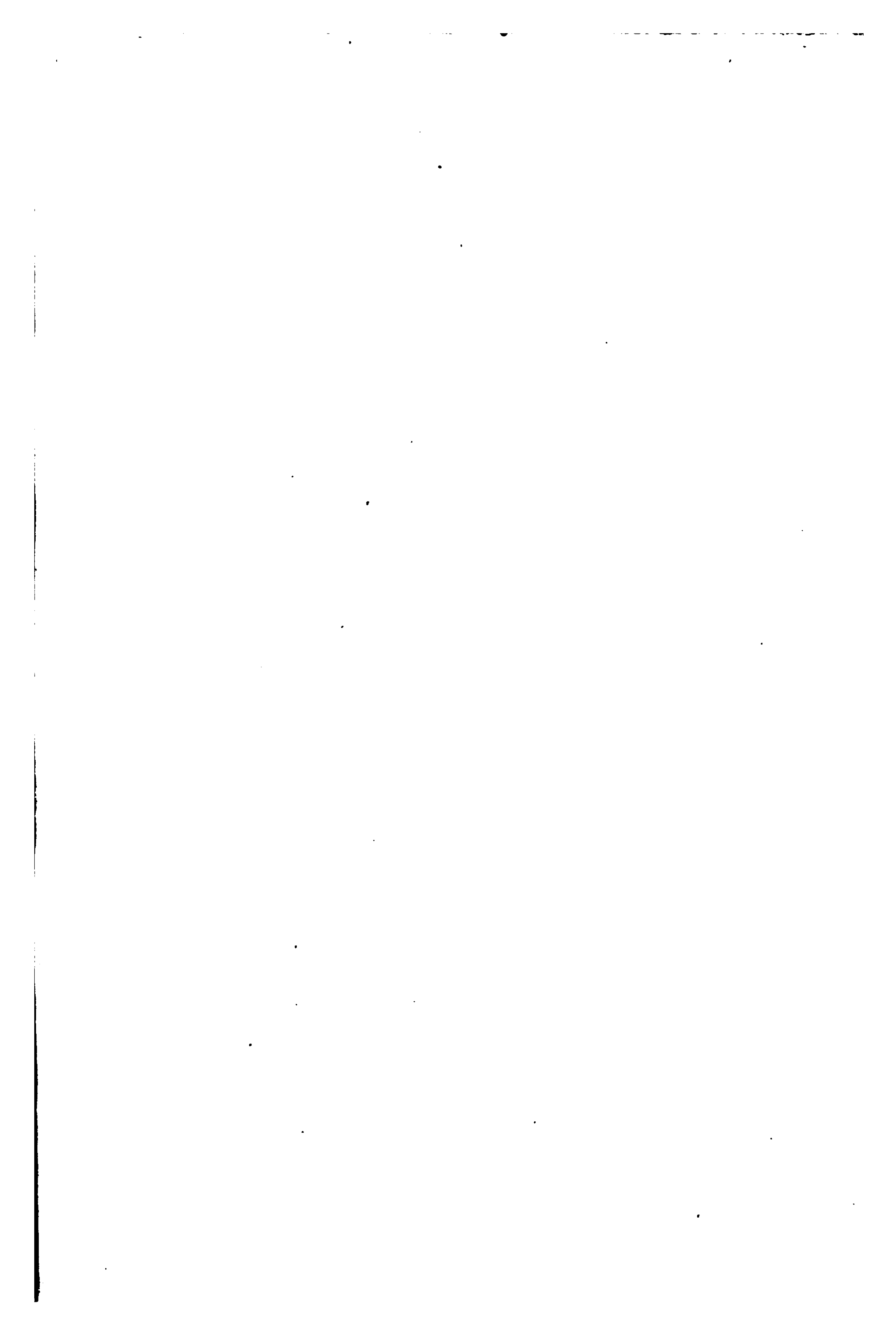
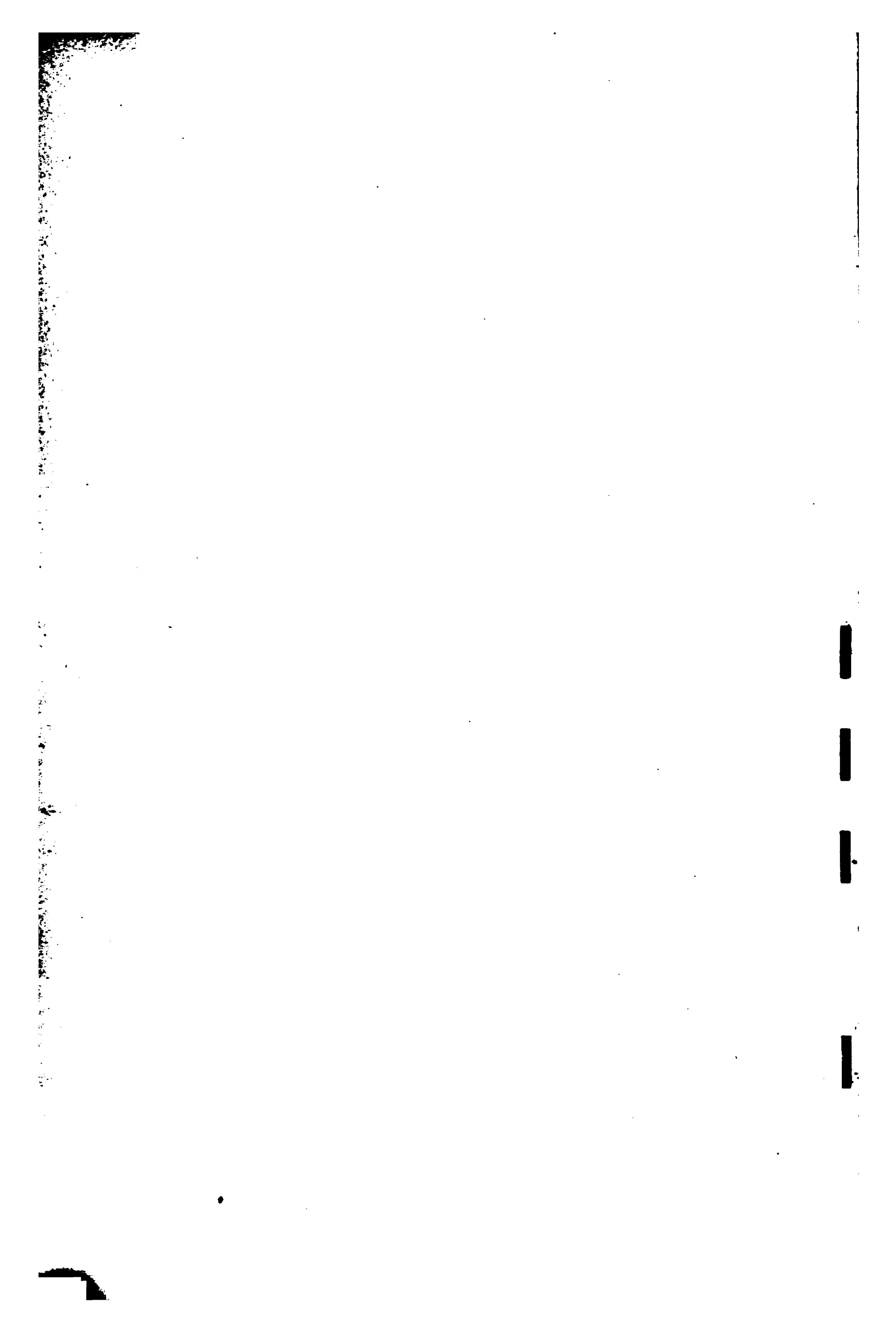
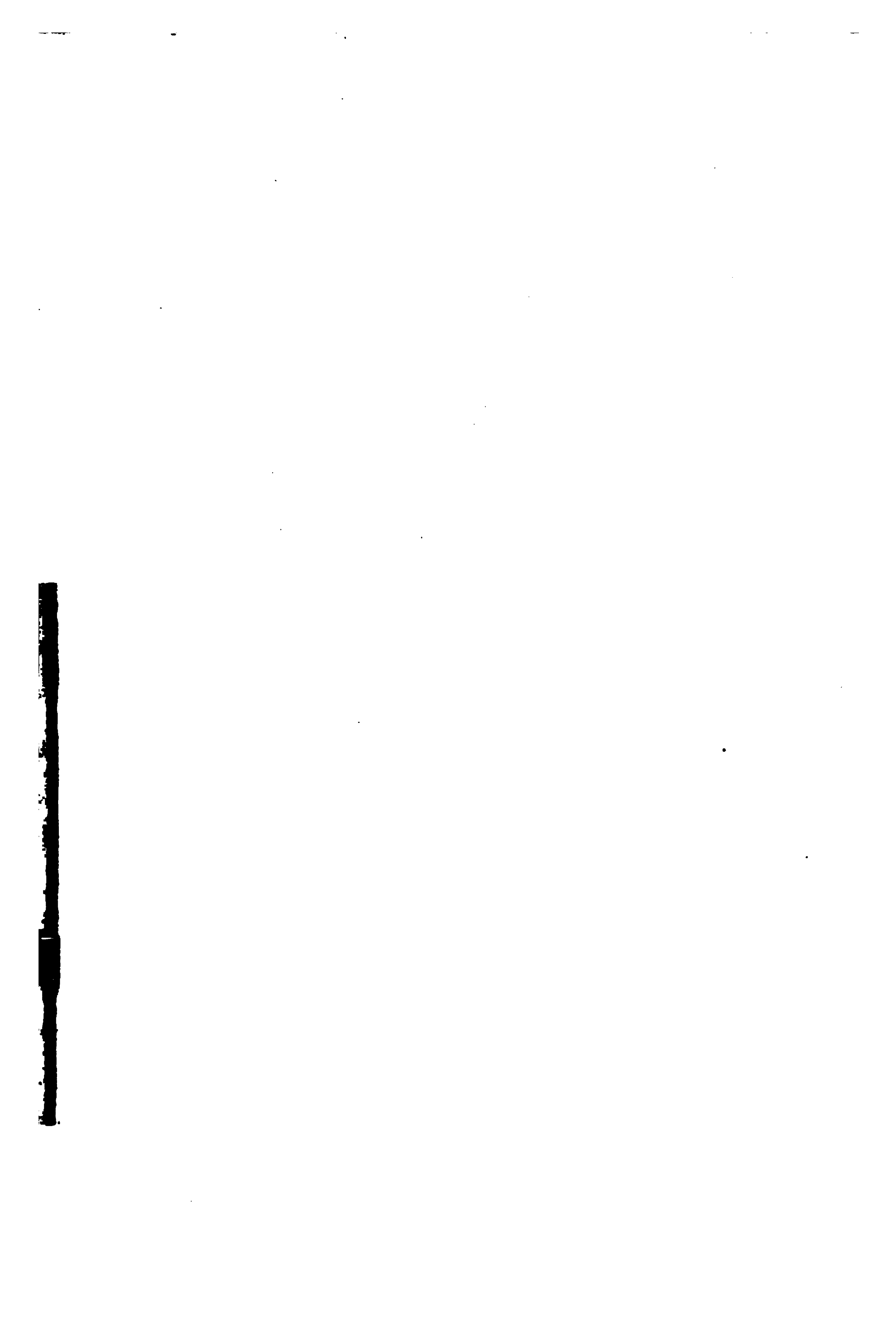
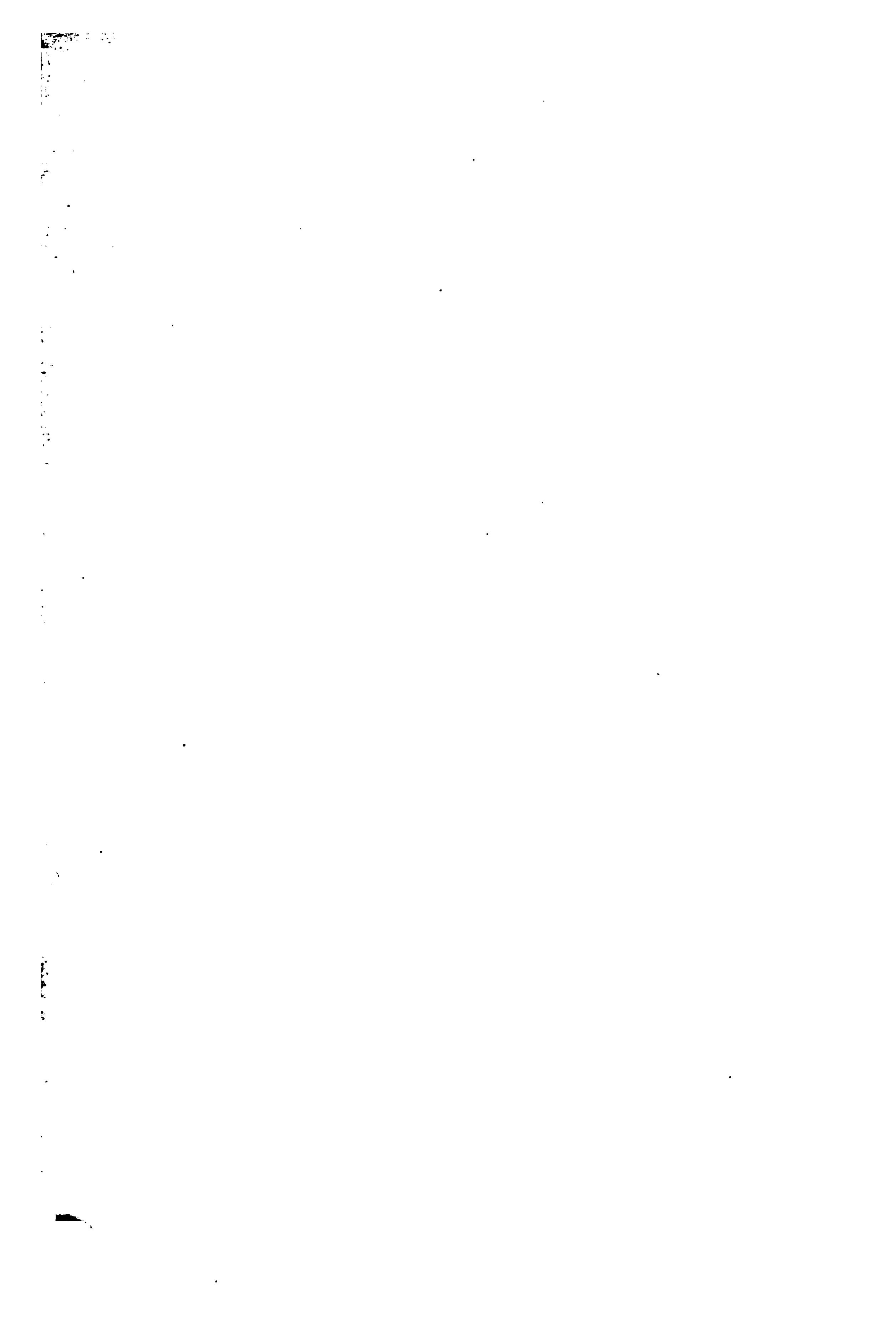


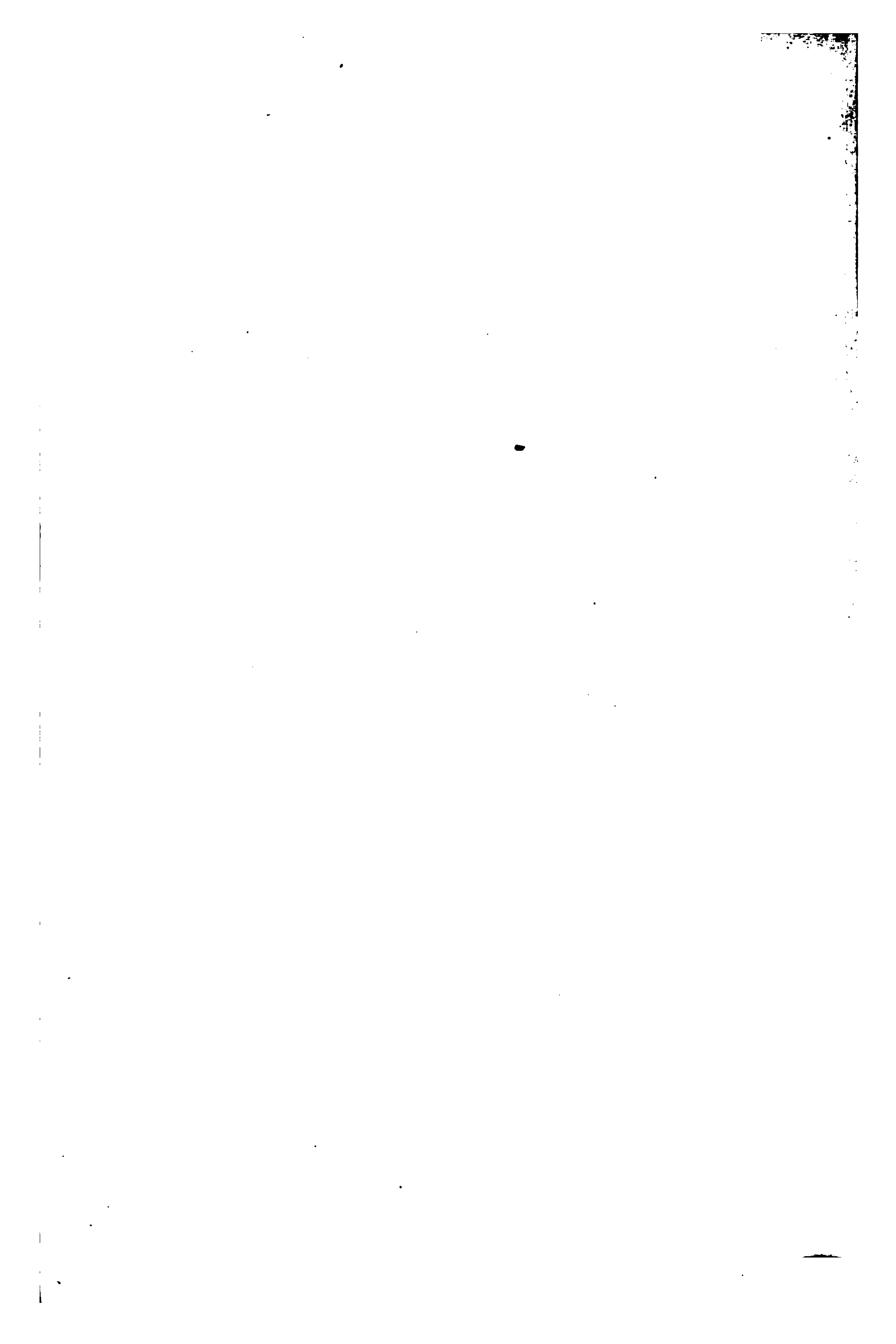












HERMANN GRASSMANNS

GESAMMELTE

MATHEMATISCHE UND PHYSIKALISCHE WERKE.

AUF VERANLASSUNG
DER MATHEMATISCH-PHYSISCHEN KLASSE
DER KGL. SÄCHSISCHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

UND UNTER MITWIRKUNG DER HERREN:

**JACOB LÜROTH, EDUARD STUDY, JUSTUS GRASSMANN,
HERMANN GRASSMANN DER JÜNGERE, GEORG SCHEFFERS**

HERAUSGEGEBEN VON

FRIEDRICH ENGEL.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1904.

HERMANN GRASSMANNS

GESAMMELTE

MATHEMATISCHE UND PHYSIKALISCHE WERKE.

ZWEITEN BANDES ERSTER THEIL:

DIE ABHANDLUNGEN ZUR GEOMETRIE UND ANALYSIS.

HERAUSGEGEBEN VON

E. STUDY, G. SCHEFFERS UND F. ENGEL.

MIT 45 FIGUREN IM TEXT.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1904.

Vorbemerkungen.

Endlich kann auch der erste Theil des zweiten Bandes dieser Ausgabe ans Licht treten. Damit ist ein so wesentlicher Schritt zur Vollendung der ganzen Ausgabe gethan, dass es mir zwecklos erscheint, mich darüber auszusprechen, was das Erscheinen gerade dieses Theils so ungebührlich lange verzögert hat. Nur so viel will ich sagen, dass ich mich keineswegs von Schuld frei fühle, denn der Text und die Anmerkungen sind schon seit einigen Monaten gedruckt, während ich mit dem Sachregister, dessen Bearbeitung ich mir vorbehalten hatte, immer noch im Rückstande war.

Ich bekenne offen, dass mir dieses Sachregister einige Mühe gemacht hat. Ich habe wieder gesehen, wie schwer es ist, ein wirklich gutes und brauchbares Sachregister zu liefern, denn man stösst nur zu oft auf Dinge, die sich im Sachregister nicht recht befriedigend oder schlechterdings gar nicht unterbringen lassen. Es ist daher begreiflich, aber nicht entschuldbar, dass noch immer die meisten Verfasser sich das Sachregister ersparen oder sich mit einem blossen Verzeichnisse der neu eingeführten Kunstausdrücke begnügen.

Der vorliegende Theil enthält die Abhandlungen zur Geometrie und Analysis, die Grassmann selbst durch den Druck veröffentlicht hat, und ausserdem die ersten sieben Paragraphen des 1861 erschienenen Lehrbuches der Arithmetik, sowie den § 8 des Lehrbuchs der Trigonometrie (1865), in dem die Grundformeln der sphärischen Trigonometrie abgeleitet werden. Den letzteren habe ich aufgenommen, weil die Grassmannsche Trigonometrie meines Wissens das erste, ja vielleicht das einzige Lehrbuch ist, in dem statt der inneren Winkel des sphärischen Dreiecks die zugehörigen Nebenwinkel benutzt werden, was nach einer anscheinend zuerst von Moebius gemachten Bemerkung für die

Uebersichtlichkeit der Formeln von grossem Vortheile ist. Die Aufnahme der Stücke aus der Arithmetik bedarf wohl kaum der Rechtfertigung, denn alle neueren Bearbeiter der Grundlagen der Arithmetik erkennen an, dass die Darstellung der Arithmetik in Grassmanns Lehrbuche allen früheren Versuchen gegenüber einen ganz wesentlichen Fortschritt bedeutet und dass sie noch heutzutage beachtenswerth ist.

Die Abhandlungen I, XIII, XIX, XX, XXI und XXII sind von Study herausgegeben, II bis XII, XIV und XVIII von Scheffers, das Uebrige von mir. Study und Scheffers haben die von ihnen herausgegebenen Abhandlungen durch zum Theil sehr eingehende Anmerkungen erläutert. Dabei hat Scheffers an zwei Stellen den handschriftlichen Nachlass Grassmanns verwerthen können, nämlich auf S. 392, wo er ein in Bd. I, 2, S. 436 von mir gegebenes Versprechen einlöst, und auf S. 428f. Dagegen hat sich zu den von Study herausgegebenen Abhandlungen im Nachlasse nichts mittheilenswerthes gefunden.

Zur Würdigung der einzelnen Abhandlungen ist in den Anmerkungen alles Nötige gesagt, ich kann mich deshalb hier darauf beschränken, zwei Punkte hervorzuheben: Die Abhandlungen XVIII bis XXII hat Grassmann in seinen letzten Lebensjahren veröffentlicht, nachdem er sich vorher eine ganze Reihe von Jahren hindurch von der Mathematik abgewendet hatte. Es besteht nun insbesondere bei XX, XXI und XXII ein auffallendes Missverhältniss zwischen dem, was diese Arbeiten wirklich leisten, und den Ansprüchen, mit denen Grassmann darin auftritt. Das hat jedoch die unbedingten Verehrer Grassmanns nicht abgehalten, auch diese Arbeiten weit über Gebühr zu erheben. Ebenso ist die Abhandlung XIII sowohl von Grassmann selbst als von seinen Schülern ganz wesentlich überschätzt worden. Da kritiklose Bewunderung den bei dieser Ausgabe befolgten Grundsätzen vollständig zuwiderliefe, musste darüber einmal ein offenes Wort gesagt werden, und so verweise ich denn auf die Ausführungen S. 431—433, 434—437 und 421f. Andrerseits sind Grassmanns Arbeiten über die Erzeugung der algebraischen Kurven noch viel zu wenig bekannt und noch lange nicht nach Gebühr gewürdigt; man würde sonst nicht fortwährend von der Chasles-Jonquièreschen Erzeugung der algebraischen Kurven sprechen, während man von Rechtswegen dieser Erzeugung den Namen der Grassmannschen beilegen müsste. Ich verweise in dieser Beziehung auf die Auseinandersetzungen S. 372 und 394f.

Indem ich diese Vorbemerkungen schliesse, kann ich nicht umhin, öffentlich der Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner dafür zu danken, dass sie trotz der zahlreichen und lange währenden Unterbrechungen des Drucks niemals ihr so oft erprobtes Entgegenkommen verleugnet hat. Möchte es mir vergönnt sein, den dritten Band, der die Prüfungsarbeit über Ebbe und Fluth, das für die Veröffentlichung Geeignete aus dem Nachlasse und eine Biographie Grassmanns enthalten soll, in kürzerer Frist zu Ende zu führen.

Leipzig den 26. Februar 1904.

Friedrich Engel.

Inhaltsverzeichniss

zum ersten Theile des zweiten Bandes.

I. Abtheilung.

Geometrie und Analysis,

herausgegeben von E. Study, G. Scheffers und F. Engel.

ERSTE ABTHEILUNG.

GEOMETRIE UND ANALYSIS.

I.

Theorie der Centralen.

Von

H. Grassmann,
Lehrer der Mathematik zu Stettin.

(Crelle's Journal für die reine und angewandte Mathematik Bd. 24, Heft 3, S. 262—282, Heft 4, S. 372—380 (1842); Bd. 25, Heft 1, S. 57—73 (1843).

Die grossen Fortschritte, welche die neuere Geometrie in der Be- 262 handlung der Kegelschnitte gemacht hat, sind fast alle an die eigenthümliche Beziehung zwischen Pol und Polare geknüpft. Indem ich diese Beziehung analytisch abzuleiten versuchte, gelangte ich zu einer Verallgemeinerung derselben, welche nicht nur alle algebraischen Kurven und Oberflächen umfasste, sondern auch in Bezug auf Kurven und Oberflächen höherer Ordnungen die Polare selbst nur als besondere Art einer allgemeineren Gattung erscheinen liess. Daraus entwickelte sich die nachstehende Theorie, welche eine so reichhaltige Reihe von Beziehungen zwischen den Kurven und Oberflächen aller Ordnungen darbietet, oder noch verspricht, dass ich wohl glauben darf, in ihr den wahren Gesichtspunkt gefunden zu haben, von wo aus sich der Zusammenhang der verschiedenen algebraischen Gebilde überschauen lässt, und dass ich hoffen darf, es werde durch Entwickelung dieser Theorie auch schon jetzt, wo sie erst in ihren Keimen vorliegt, ein nicht unwesentlicher Beitrag zur Theorie jener Kurven überhaupt geliefert werden.

Die ganze Theorie drängt sich um einen Satz zusammen, als dessen besondere Gestaltungen und unmittelbare Anwendungen alle ihre Resultate erscheinen, und welchen ich am vollständigsten am Schlusse dieses Aufsatzes mitgetheilt habe. Den grossen Reichthum der Beziehungen, welche dieser Satz darbietet, wird man einigermassen übersehen, wenn man bemerkt, dass nicht nur alle jene schönen Sätze,

welche **Poncelet** in seinem Mémoire sur les centres de moyennes harmoniques*) aufstellt, nur als höchst specielle Fälle desselben erscheinen, sondern dass auch die wichtigsten und allgemeinsten Sätze über Durchmesser und Durchmesser-Ebenen, Asymptoten, Tangenten und Tangential-Ebenen, über Krümmungsschwerpunkte von Kurven und Oberflächen und so weiter nur als ganz specielle Fälle jenes Satzes sich zeigen und hier in ihrem unmittelbarsten Wesen und Zusammenhange ans Licht treten; ja so weit scheint dieser Zusammenhang zu reichen, dass es 263 wohl kaum einen allgemeinen Satz über algebraische † Kurven und Oberflächen geben mag, welcher nicht mit jenem Satze in der engsten Beziehung stände.

Die Entwickelung werde ich Schritt um Schritt genau in der Art geben, in welcher ich zu dem Resultate gelangt bin. Daher werde ich es mir erlauben, jene bekannte Beziehung zwischen Pol und Polare eines Kegelschnittes analytisch abzuleiten, um bei dieser Entwickelung zugleich die Möglichkeit einer Verallgemeinerung und die Art, wie sie zu bewerkstelligen sein dürfte, in bestimmten Zügen vor die Augen zu stellen; und zwar in der Weise, wie sie sich bei jener analytischen Ableitung aufschloss. Von diesem Satze aus werde ich dann (in § 2 und 3) die Verallgemeinerung, mit Einschaltung der Betrachtungen, welche mich dazu leiteten, ausführen. Als ich bis zu diesem Punkt der Entwickelung gekommen war, wurde ich durch die Analogie der Resultate auf das oben angeführte Mémoire von **Poncelet** geleitet, welches mich dann zu der in § 4 vorgenommenen Vereinfachung führte und zu der in § 8 ausgeführten reciproken Umwandlung veranlasste, während die dazwischen befindlichen Paragraphen nur Folgerungen aus dem Hauptsatz enthalten. Die Schlussbemerkung endlich stellt eine noch höhere Stufe der Verallgemeinerung dar.

Bei der ganzen Entwickelung werde ich mich stets derjenigen Bezeichnung einer Strecke durch ihre Endpunkte bedienen, in welcher die Richtung vom Anfangspunkte zum Endpunkte hin zugleich mit festgehalten wird, und wonach also AB und BA, wenn A und B Punkte vorstellen, als entgegengesetzte Grössen aufgefasst werden, das heisst $AB = -BA$ oder $AB + BA = 0$ gesetzt wird; wonach ferner, wenn A, B, C Punkte **einer** Geraden sind, allemal $AB + BC = AC$ ist, welche Lage auch immer die drei Punkte in jener Geraden haben mögen, und wonach endlich zwei Verhältnisse einander entgegengesetzt genannt werden, wenn die Glieder des einen gleichgerichtete, die des

*) [**Crelle's** Journal Bd. 8, S. 213—272 (1828, 29), wieder abgedruckt im Traité des propriétés projectives des figures, Bd. II, S. 1—56.]

anderen entgegengesetzt gerichtete Strecken darstellen*). Sind zum Beispiel a, b, c, d vier Strecken, und ist $\frac{a}{b} = -\frac{c}{d}$, so sagen wir: a verhält sich zu b entgegengesetzt, wie c zu d.

---

§ 1.

Analytische Ableitung der Polare eines Kegelschnittes in Bezug auf einen Punkt. 264

Der Satz, dessen analytischen Beweis wir hier zum Ausgangspunkt der Entwickelung nehmen, ist folgender:

Wenn man von einem festen Punkte P durch einen festen Kegelschnitt eine bewegliche Gerade zieht, welche denselben in zwei Punkten S_1 und S_2 schneidet, und man bestimmt auf dieser Geraden den zu P und dem Punktenpaare S_1 und S_2 gehörigen vierten harmonischen Punkt Q, das heisst denjenigen Punkt, dessen Entfernungen von den beiden Durchschnittspunkten sich entgegengesetzt verhalten, wie die Entfernungen des festen Punktes von denselben Durchschnittspunkten, so ist der Ort des so bestimmten Punktes Q eine Gerade.

Nämlich vermöge der im Satze ausgesprochenen Bedingung hat man:

$$\frac{QS_1}{QS_2} = -\frac{PS_1}{PS_2},$$

oder

$$QS_1 . PS_2 + QS_2 . PS_1 = 0.$$

Um hier alle Entfernungen von dem festen Punkte P aus zu haben, setzen wir

$$QS_1 = QP + PS_1 = PS_1 - PQ = s_1 - q,$$

indem wir die Entfernung eines jeden Punktes von dem festen Punkte mit dem entsprechenden kleinen Buchstaben bezeichnen, und erhalten:

$$2s_1 s_2 = q(s_1 + s_2): \tag{1}$$

eine Gleichung, welche die harmonische Lage des Punktes Q bestimmt.

Wir machen ferner den festen Punkt P zum Durchschnittspunkt zweier Richt-Axen, und nehmen an, die Gleichung des Kegelschnittes sei dann

$$y^2 + axy + bx^2 + cy + dx + e = 0, \tag{2}$$

welche Gleichung also die Relation zwischen den Richtstücken x und y

---

*) Diese Bezeichnung ist in solcher Art schon von Möbius mit grosser Konsequenz festgehalten; vgl. dessen barycentrischen Calcul p. 3 u. ff.

irgend eines Punktes S im Umfang des Kegelschnittes darstellt*). Endlich nehmen wir an, dass x' und y' die Richtstücke des Punktes Q seien, bezogen auf dasselbe Axenkreuz. Dann haben wir, wenn P, S, Q, wie es im Satze gefordert wird, in einer Geraden liegen sollen, die Gleichungen

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{s}{q};$$

weil nämlich das von den Strecken x, y, s umschlossene Dreieck dem von x', y', q umschlossenen ähnlich ist, so dass

$$(3) \qquad x = \frac{s}{q}x'; \quad y = \frac{s}{q}y'.$$

265 Durch Substitution dieser Werthe in die Gleichung (2) erhält man:

$$(4) \qquad \frac{y'^2 + ax'y' + bx'^2}{q^2}s^2 + \frac{cy' + dx'}{q}s + e = 0.$$

Die Wurzelwerthe s_1 und s_2 dieser quadratischen Gleichung sind dann schliesslich in (1) zu substituiren, um die gesuchte Ortsgleichung für Q zu erhalten. Da aber jene Gleichung (1) nur die Summe und das Produkt der Wurzeln enthält, so können wir von dem bekannten Gesetze Anwendung machen, dass die Summe der Wurzeln einer quadratischen Gleichung sich zu ihrem Produkte entgegengesetzt verhält, wie der Koefficient der ersten Potenz der Unbekannten zu der Konstanten; also

$$(s_1 + s_2):(s_1 \cdot s_2) = \frac{cy' + dx'}{q}:(-e).$$

Diese Werthe in die Gleichung (1) substituirt, geben

$$(5) \qquad cy' + dx' + 2e = 0$$

als Ortsgleichung des Punktes Q: also ist sein Ort eine Gerade.

Diese Gerade nun ist es, welche man die Polare des Kegelschnittes in Bezug auf den Punkt P nennt.

§ 2.

Verallgemeinerung des gefundenen Resultats.

Betrachtet man den Gang des soeben geführten Beweises, um die Möglichkeit einer Verallgemeinerung zu übersehen, so ist zunächst klar, dass die Bedingungsgleichungen (3) für die Lage der Punkte P, S, Q in einer Geraden unabhängig sind von der Natur der Kurve, und dass

*) Statt der Namen Koordinaten und Koordinaten-Axen gebrauche ich die deutschen Namen Richtstücke und Richt-Axen: eine Benennung, welche wohl keiner Rechtfertigung bedarf.

sie auch noch auf dieselbe Weise für die Oberflächen gelten. Ist daher statt der Gleichung (2) die Gleichung irgend einer Kurve oder Oberfläche gegeben, so wird daraus durch Substitution vermittelst der Gleichungen (3) eine Gleichung hervorgehen, welche der Gleichung (4) entspricht und welche in Bezug auf s von demselben Grade ist, wie die neue Gleichung (2). In der That bestimmt die Gleichung (4) alsdann nur die Durchschnittspunkte einer von dem Axendurchschnitt P aus gezogenen Geraden mit der gegebenen Kurve oder Oberfläche.

Der eigentliche Nerv jenes Beweises liegt nun aber offenbar in dem Uebergange aus der Gleichung (4) in (5). Dieser Uebergang wurde vermittelt durch den Satz, welcher die Relation zwischen den Wurzeln einer quadratischen Gleichung und deren Koefficienten darstellt. In demselben Masse also, wie sich diese Relation verallgemeinern lässt, wird sich auch das darauf gegründete Resultat verallgemeinern lassen. Hiermit haben wir demnach das wesentliche Princip der beabsichtigten 266 Verallgemeinerung gefunden.

Die allgemeine Relation zwischen den Wurzeln einer Gleichung und den Koefficienten derselben lässt sich am einfachsten und allgemeinsten auf folgende Weise aussprechen: „In jeder algebraischen Gleichung verhalten sich die Koefficienten zweier Potenzen der Unbekannten, wenn die Differenz der beiden Potenz-Exponenten gerade ist, eben so, wenn ungerade, entgegengesetzt, wie diejenigen Kombinationsklassen der Wurzeln, deren Klassenzahlen jene Exponenten zu der Gradzahl der ganzen Gleichung ergänzen; wenn nämlich die Kombinationen als Produkte ihrer Elemente aufgefasst und zu einander addirt werden." Ist also a_r der Koefficient, welcher zur r-ten Potenz der Unbekannten gehört, und bezeichnet c_r die r-te Kombinationsklasse aus den Wurzeln, im Sinne des Satzes genommen, so hat man, wenn n die Gradzahl der Gleichung ist,

$$\frac{c_{n-r}}{c_{n-s}} = \frac{a_r}{a_s}(-1)^{s-r},$$

wo der Faktor $(-1)^{s-r}$ nur das Gesetz der Zeichen darstellt. Setzt man hier $s = n$, so hat man, da die nullte Kombinationsklasse allemal der Einheit gleich ist,

$$c_{n-r} = \frac{a_r}{a_n}(-1)^{n-r}:$$

eine Form, von welcher wir besonders Gebrauch machen werden.

Vermittelst dieses Gesetzes nun hatten wir aus der Gleichung (4) die Endgleichung (5) dadurch abgeleitet, dass wir die Koefficienten der ersteren statt der Summe und des Produktes der Wurzeln in (1) substituirt hatten; wobei q von selbst wegfiel. Wir werden also jetzt im

allgemeinen Falle statt der Gleichung (1) eine solche Gleichung annehmen müssen, welche nur von den Kombinationsklassen der Wurzeln aus (4) abhängt, und zwar so, dass, indem wir die Koefficienten von (4) statt dieser Kombinationsklassen in die neue Gleichung (1) substituiren, q von selbst wegfalle. Nehmen wir an, dass in dieser Gleichung (1) jede Potenz von q nur mit einer Kombinationsklasse der Wurzeln multiplicirt sei, so überzeugt man sich leicht, dass, damit q bei jener Substitution wegfalle, die Ordnungszahl dieser Kombinationsklasse den zugehörigen Exponenten von q zu n, der Gradzahl der Gleichung, ergänzen müsse; wie sich dies bei der nachfolgenden Entwickelung noch deutlicher darlegen wird*).

267 Wir haben nun † alle Elemente der beabsichtigten Verallgemeinerung zur Hand, durch deren Zusammenstellung wir daher sogleich zu dem gesuchten Satze in seiner allgemeinsten Form gelangen werden.

Es sei sonach von einem festen Punkte P durch eine feste Oberfläche n-ter Ordnung eine bewegliche Gerade gezogen, welche dieselbe in den Punkten $S_1, \dots S_n$ schneide. Man bestimme in dieser Geraden den Punkt Q durch die Gleichung

$$(1)\quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_n q^n + \alpha_{n-1}(s_1 \cdots s_n)^{\cdot 1} q^{n-1} + \alpha_{n-2}(s_1 \cdots s_n)^{\cdot 2} q^{n-2} + \cdots \\ \cdots + \alpha_1 (s_1 \cdots s_n)^{\cdot n-1} q + \alpha_0 (s_1 \cdots s_n)^{\cdot n} = 0, \end{array} \right.$$

in welcher wieder, wie oben, statt $PQ, PS_1, \dots$ gesetzt ist $q, s_1, \dots$, worin ferner $(s_1 \cdots s_n)^{\cdot r}$ die r-te Kombinationsklasse aus den Entfernungen $s_1 \dots s_n$ in dem oben angegebenen Sinne bezeichnet, und worin $\alpha_n, \dots \alpha_0$ konstante Koefficienten sind. Um diese Gleichung kürzer schreiben zu können, bedienen wir uns der bekannten Summenbezeichnung, und haben also

$$(1)\qquad \sum \alpha_a (s_1 \cdots s_n)^{\cdot n-a} q^a = 0,$$

indem das Summenzeichen die Summe aller Glieder darstellt, welche man erhält, wenn man dem a nach und nach alle Werthe von n bis 0 giebt**).

---

*) Dieselbe Bedingung, dass q wegfalle, lässt sich noch auf eine allgemeinere Weise realisiren, indem man in der Gleichung (1) jede Potenz von q mit einem Produkt aus mehren Kombinationsklassen der Wurzeln multiplicirt sich vorstellt: eine Verallgemeinerung, welche ich in der Schlussbemerkung versucht habe.

**) Es ist hier keineswegs nothwendig, die Bedingung, dass a nur alle ganzen Werthe von 0 bis n darstelle, noch als eine besondere Bedingungsgleichung hinzuzufügen, indem der Ausdruck $(s_1 \dots s_n)^{\cdot a}$ für alle andern Werthe von a von selbst verschwindet.

Es sei ferner die Gleichung der gegebenen Oberfläche, den Punkt P wieder zum Axendurchschnitt genommen,

$$F_n(x,y,z)+F_{n-1}(x,y,z)+\cdots+F_1(x,y,z)+F_0(x,y,z)=0,$$

indem wir hier unter $F_r(x,y,z)$ eine homogene {ganze} Funktion vom r-ten Grade von x, y, z, das heisst eine solche Funktion dieser drei Veränderlichen verstehen, deren Glieder in Bezug auf diese Veränderlichen vom r-ten Grade sind, und wo also $F_0(x,y,z)$ einer Konstanten gleichbedeutend ist. Indem wir wieder die Summenbezeichnung anwenden, lässt sich jene Gleichung kürzer so schreiben:

$$\sum F_\alpha(x,y,z)=0. \tag{2}$$

Als Bedingungsgleichung für die Lage der Punkte P, S, Q in einer Geraden haben wir wieder, wenn x', y', z' die Richtstücke des Punktes 268 Q in Bezug auf dieselben Richt-Axen bezeichnen:

$$\frac{x}{x'}=\frac{y}{y'}=\frac{z}{z'}=\frac{s}{q},$$

oder

$$x=\frac{s}{q}x'; \quad y=\frac{s}{q}y'; \quad z=\frac{s}{q}z'. \tag{3}$$

Diese Werthe in die Gleichung (2) substituirt, geben

$$\sum s^\alpha\frac{F_\alpha(x',y',z')}{q^\alpha}=0. \tag{4}$$

Wenn nun, wie wir voraussetzen, die Gleichung (2) vom n-ten Grade ist, so ist es auch diese Gleichung (4) in Bezug auf s. Die n Wurzeln dieser Gleichung $s_1, \ldots s_n$, oder vielmehr die daraus gebildeten Kombinationsklassen sind nun in (1) zu substituiren. Es ist, wenn man wieder für einen Augenblick den Koefficienten von s^α in dieser Gleichung durch a_α bezeichnet,

$$\overline{(s_1\cdots s_n)}^{\,n-\alpha}=\frac{a_\alpha}{a_n}(-1)^{n-\alpha}.$$

Substituirt man diesen Ausdruck in (1), multiplicirt dann die ganze Gleichung mit a_n und setzt statt a_α seinen Werth $\dfrac{F_\alpha(x',y',z')}{q^\alpha}$, so ergiebt sich

$$\sum \alpha_\alpha F_\alpha(x',y',z')(-1)^{n-\alpha}=0; \tag{5}$$

das heisst

$$\alpha_n F_n(x',y',z')-\alpha_{n-1}F_{n-1}(x',y',z')+\cdots+(-1)^{n-1}\alpha_1 F_1(x',y',z')+$$
$$+(-1)^n\alpha_0 F_0(x',y',z')=0,$$

als Ortsgleichung für den Punkt Q. Diese Gleichung ist im allgemeinsten Falle vom n-ten Grade; aber ihr Grad kann sich beliebig verringern, wenn irgend eine Anzahl von den Koefficienten α_n, α_{n-1}, ..., von

α_n an gerechnet, Null wird. Werden zum Beispiel von den Koefficienten alle diejenigen, deren Zeiger grösser als m ist, gleich Null gesetzt, so sind die Gleichungen (1) und (5) nur noch vom m-ten Grade.

Die Resultate der ganzen Entwickelung können wir in folgenden Satz zusammenstellen:

Wenn man von einem festen Punkt P aus durch eine feste Oberfläche n-ter Ordnung eine bewegliche Gerade zieht, welche dieselbe in den n Punkten $S_1, \dots S_n$ schneidet, und dann auf dieser Geraden einen oder mehrere Punkte Q durch eine Gleichung (1) *bestimmt, welche nach Potenzen von PQ in der Art fortschreitet, dass jede r-te Potenz von PQ mit der ergänzenden, das heisst $(n-r)$-ten Kombinationsklasse aus den Ent-* 269 *fernungen* † $PS_1, \dots PS_n$ *(die Elemente multiplicirt, die Kombinationen addirt) und einem willkürlichen konstanten Koefficienten α_r multiplicirt ist: so ist der Ort des Punktes Q, sobald man P zum Durchschnittspunkt der Richt-Axen macht, durch eine Gleichung* (5) *bestimmt, welche man aus der ursprünglichen Gleichung* (2) *der Oberfläche dadurch gewinnt, dass man jedes Glied der letzteren mit demjenigen Koefficienten aus* (1) *multiplicirt, dessen zugehöriger Potenz-Exponent dem Grade dieses Gliedes gleich ist, das Zeichen aber unverändert lässt, oder entgegengesetzt nimmt, je nachdem der Grad dieses Gliedes einen geraden, oder ungeraden Werth hat*).*

So sind wir nun zwar zu einem sehr allgemeinen Resultate gelangt: dasselbe hat aber noch wegen der Unbestimmtheit der Koefficienten α keine individuelle Bedeutung, und es fehlt ihm noch an dem wesentlichen Princip, welches jedes Allgemeine allein fruchtreich zu gestalten vermag.

§ 3.

Individuelle Gestaltung des allgemeinen Resultats.

Um das allgemeine Resultat fruchtbringend zu individualisiren, müssen wir eine Bestimmung der Koefficienten α versuchen, welche die wesentlichsten und einfachsten Beziehungen auffasst; wobei wir uns aber wiederum durch die Beziehung zwischen vier harmonischen Punkten leiten lassen. Nämlich sind S_1 und S_2, P und Q die beiden harmonischen Punktenpaare, so liess sich die harmonische Beziehung derselben ausdrücken durch die Gleichung

$$\frac{QS_1}{PS_1} + \frac{QS_2}{PS_2} = 0.$$

Es ist klar, dass hier, wenn S_1 und S_2 in einen Punkt S zusammen-

* Es versteht sich von selbst, dass der Satz ebenso für ebene Kurven gilt.

fallen, die Gleichung in $QS = 0$ sich verwandelt; das heisst, Q fällt alsdann in denselben Punkt S. Halten wir nun diese Beziehung auch für den allgemeinen Fall fest, dass nämlich, wenn die Punkte $S_1, \ldots S_n$ alle in einen Punkt S zusammenfallen, dann auch die Punkte Q, deren Anzahl m sein mag, alle in denselben Punkt S fallen, so gelangen wir sogleich zu einer Bestimmung sämmtlicher Koefficienten α, sobald die Anzahl m der Punkte Q gegeben ist; und in der That lässt sich kaum eine einfachere Beziehung zwischen jenen Punkten denken*).

Die Gleichung (1) verwandelt sich für den Fall, dass alle Punkte $S_1, \ldots S_n$ in einen Punkt S zusammenfallen, in

$$\sum \alpha_a \overset{\cdot a}{n} \,.\, PS^{n-a} \,.\, PQ^a = 0 \quad \text{oder} \quad \sum \alpha_a \overset{\cdot a}{n}\, s^{n-a} q^a = 0,$$

wo $\overset{\cdot a}{n}$ die Anzahl der Kombinationen aus n Elementen zur a-ten Klasse, 270 also die Zahl

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-a+1)}{1\cdot 2\cdots a}$$

bezeichnet. Nämlich da $s_1 = s_2 = \cdots = s_n = s$ ist, so verwandelt sich $(s_1 \ldots s_n)^{\cdot n-a}$ in $\overset{\cdot n-a}{n}\, s^{n-a}$, wo statt $\overset{\cdot n-a}{n}$ das ihm gleiche $\overset{\cdot a}{n}$ gesetzt werden kann. Soll es nun m Punkte Q, das heisst m Werthe von PQ oder q geben, so muss die letzte Gleichung in Bezug auf q vom m-ten Grade, das heisst α_a muss, so lange a grösser als m ist, gleich Null sein. Sollen ferner diese m Punkte Q alle in S fallen, das heisst, sollen die m Wurzelwerthe für q alle gleich s sein, so können wir wieder von der Relation zwischen den Koefficienten einer Gleichung und den Kombinationsklassen der Wurzeln Gebrauch machen. Bezeichnen wir wieder für einen Augenblick den Koefficienten von q^a in obiger Gleichung durch a_a, so ist, da der Grad der Gleichung m ist, die $(m-a)$-te Kombinationsklasse der Wurzeln gleich $\frac{a_a}{a_m}(-1)^{m-a}$. Da hier alle m Wurzeln gleich s sein sollen, so ist die $(m-a)$-te Kombinationsklasse der Wurzeln gleich $\overset{\cdot m-a}{m}\, s^{m-a}$ oder gleich $\overset{\cdot a}{m}\, s^{m-a}$. Substituiren wir nun auch die Werthe von a_a und a_m aus obiger Gleichung, so ergiebt sich

$$\overset{\cdot a}{m}\, s^{m-a} = \frac{\alpha_a \overset{\cdot a}{n}\, s^{n-a}}{\alpha_m \overset{\cdot m}{n}\, s^{n-m}}(-1)^{m-a},$$

das heisst

---

*) Auch ist dies offenbar die einzige Annahme, bei welcher Projektivität stattfinden kann (vgl. § 4).

$$\alpha_{\mathfrak{a}} = \frac{\overset{\cdot\mathfrak{a}}{m}}{\underset{n}{\cdot\mathfrak{a}}}\, \alpha_m \overset{\cdot m}{n}\, (-1)^{m-\mathfrak{a}};$$

wodurch die Koefficienten der Gleichung (1) bestimmt sind. Substituirt man nämlich den gefundenen Werth in die Gleichung (1), und dividirt mit dem gemeinschaftlichen Faktor $\alpha_m \overset{\cdot m}{n}$, so erhält man

$$\text{(Ia)} \qquad \sum \frac{\overset{\cdot\mathfrak{a}}{m}}{\underset{n}{\cdot\mathfrak{a}}} (s_1 \cdots s_n)^{\cdot n-\mathfrak{a}}\, q^{\mathfrak{a}} (-1)^{m-\mathfrak{a}} = 0;$$

und substituirt man denselben Werth in die Endgleichung (5), so erhält man, nachdem man dieselbe wieder mit $\alpha_m \overset{\cdot m}{n} (-1)^{m+n}$ dividirt hat,

$$\text{(Va)} \qquad \sum \frac{\overset{\cdot\mathfrak{a}}{m}}{\underset{n}{\cdot\mathfrak{a}}} F_{\mathfrak{a}}(x', y', z') = 0.$$

Wir sind also zu dem Resultate gelangt, dass, wenn die Gleichung (Ia) die Lage der Punkte Q in der von P aus durch die Oberfläche gezogenen Geraden bestimmt, dann die Gleichung (Va) die Ortsgleichung des Punktes Q ist.

Ist insbesondere $m = 1$, so haben wir in (Ia) nur zwei Werthe 271 für $\mathfrak{a}$, nämlich $\mathfrak{a} = 1$ und $\mathfrak{a} = 0$ anzunehmen, indem für jeden andern Werth von $\mathfrak{a}$ die Kombinationszahl $\overset{\cdot\mathfrak{a}}{m}$, das heisst hier $\overset{\cdot\mathfrak{a}}{1}$, gleich Null wird. Man hat also für diesen Fall

$$\frac{1}{n}(s_1 \cdots s_n)^{\cdot n-1}\, q - (s_1 \cdots s_n)^{\cdot n} = 0.$$

Dividirt man diese Gleichung mit $\frac{1}{n}(s_1 \cdots s_n)^{\cdot n}$, so erhält man

$$\frac{n}{q} = \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} + \cdots + \frac{1}{s_n},$$

das heisst

$$\frac{n}{PQ} = \frac{1}{PS_1} + \frac{1}{PS_2} + \cdots + \frac{1}{PS_n}.$$

Es ist sonach der Punkt Q für diesen Fall nichts anderes, als was Poncelet das *Centrum der harmonischen Mitten* der Punkte $S_1, \ldots S_n$ in Bezug auf den Punkt P nennt*).

Wir ändern diese Benennung, um sie auf den allgemeinen Fall anwenden zu können, dahin ab, dass wir Q die *harmonische Mitte* zwischen $S_1, \ldots S_n$ in Bezug auf P nennen; fällt insbesondere P ins Unendliche, so nennen wir jenen Punkt Q schlechthin die *Mitte* zwischen

*) In seinem Mémoire sur les centres de moyennes harmoniques, welches im dritten Bande dieses Journals abgedruckt ist.

den Punkten $S_1, \dots S_n$*). Für den allgemeineren Fall nun nennen wir die durch die Gleichung (Ia) bestimmten Punkte Q die ***harmonischen Mitten m-ter Ordnung*** zwischen jenen Punkten $S_1, \dots S_n$ in Bezug auf P, und bemerken nur noch, dass die wesentliche Bedeutung dieser Punkte Q, welche in der Gleichung (Ia) noch verhüllt liegt, erst im folgenden Paragraphen ans Licht treten wird**). Nehmen wir nun einen Punkt P und eine Oberfläche an, und ziehen von P beliebige Strahlen, so nennen wir die auf den Punkt P bezüglichen harmonischen Mitten zwischen den Durchschnittspunkten eines jeden solchen Strahles und der Oberfläche, zugleich die zu der Oberfläche gehörigen harmonischen Mitten m-ter Ordnung in Bezug auf P, und den geometrischen Ort derselben die *m-te Centrale der Oberfläche in Bezug auf P.* Vermittelst dieser Benennungen, welche der ganzen folgenden Abhandlung zu Grunde liegen, lässt sich das allgemeine Resultat in folgendem Satz aussprechen:

Die m-te Centrale einer Oberfläche n-ter Ordnung in Bezug auf einen 272 *festen Punkt P, das heisst der Ort eines Punktes Q, welcher in einer von P aus gezogenen, die Oberfläche in den Punkten* $S_1, \dots S_n$ *schneidenden, beweglichen Geraden dergestalt liegt, dass der Gleichung* (Ia)

$$\sum \frac{m^{\cdot a}}{n^{\cdot a}} (PS_1, \cdots, PS_n)^{\cdot n-a} . PQ^a . (-1)^{m-a} = 0$$

genügt wird, ist eine Oberfläche m-ter Ordnung; und zwar ist, wenn die gegebene Oberfläche (P zum Axendurchschnitt genommen) durch die Gleichung (2)

$$\sum F_a(x, y, z) = 0$$

dargestellt wird, die Gleichung (Va) *der m-ten Centrale folgende:*

$$\sum \frac{m^{\cdot a}}{n^{\cdot a}} F_a(x, y, z) = 0.$$

Die specielle Form dieses Satzes für $m = 1$ wird, da dann (Va) in

---

*) Dieser Punkt ist, wie sich später zeigen wird, der Punkt der mittleren Entfernung zwischen jenen Punkten. Wenn wir ihn hier die Mitte nennen, so gewinnen wir den für die Verallgemeinerung unerlässlichen Vortheil einer kürzeren Bezeichnung, ohne den einer unzweideutigen und sprachgemässen Benennung aufzugeben.

**) Danach würde also für jenen Fall, wo $m = 1$ war, noch der Zusatz „erster Ordnung" hinzukommen müssen: doch kann dieser Zusatz, wenn es nicht auf den Gegensatz ankommt, um so eher weggelassen werden, da die erste Ordnung auch meist schon durch die Singularform angedeutet wird.

$$F_1(x, y, z) + nF_0(x, y, z) = 0$$

sich verwandelt, folgende sein:

Die erste Centrale einer Oberfläche n-ter Ordnung in Bezug auf einen festen Punkt P, das heisst der Ort eines Punktes Q, welcher in einer von P aus gezogenen, die Oberfläche in den Punkten $S_1, \ldots S_n$ schneidenden beweglichen Geraden dergestalt liegt, dass der Gleichung

$$\frac{n}{PQ} = \frac{1}{PS_1} + \frac{1}{PS_2} + \cdots + \frac{1}{PS_n}$$

genügt wird, ist eine Ebene; und zwar wird die Gleichung derselben (wenn P zum Axendurchschnitt gemacht ist) aus der der gegebenen Oberfläche dadurch gefunden, dass man in der letzteren alle Glieder von einem höheren Grade als dem ersten weglässt und das konstante Glied mit n multiplicirt.

Da man jedes System von n Ebenen als Oberfläche n-ter Ordnung ansehen kann, so ist eine specielle Folgerung dieses speciellen Satzes der von Poncelet in dem angeführten Mémoire aufgestellte Satz, nämlich, dass, wenn man von einem festen Punkt durch ein System von Ebenen beliebige Strahlen zieht und auf jedem Strahl zwischen seinen Durchschnittspunkten mit jenen Ebenen die harmonische Mitte (erster Ordnung) in Bezug auf jenen festen Punkt nimmt, diese Mitten alle in einer und derselben Ebene liegen. Und auch die übrigen in jenem 273 Mémoire aufgestellten Sätze erscheinen als † specielle Fälle jenes Satzes, wenn man auf ihn das Princip der Reciprocität anwendet; wie sich späterhin (§ 8) zeigen wird. Auch deutet Poncelet in jenem Mémoire (p. 253)*) darauf hin, dass die dort mitgetheilten Beziehungen einer Uebertragung auf die Theorie der Kurven und Oberflächen fähig seien.

Diese Uebertragung ist nun in dem vorhin aufgestellten speciellen Satze vollzogen. Aber dieser specielle Satz selbst zeigt sich erst in seiner vollen Bedeutung, und die Menge der Beziehungen, welche er darbietet, tritt erst hervor, wenn er als specieller Fall jenes allgemeinen Satzes aufgefasst wird. Doch müssen wir, um alle diese Beziehungen und Folgerungen auf die leichteste und einfachste Weise ableiten zu können, den allgemeinen Satz dadurch vereinfachen, dass wir die Gleichung (Ia), welche für den Fall, dass $m = 1$ war, eine so einfache Gestalt annahm, auch für den allgemeinen Fall auf eine gleich einfache Form bringen.

---

*) [Traité des propriétés projectives, Bd. II, S. 39 der 2. Ausgabe.]

§ 4.

Darstellung des Hauptlehrsatzes für die Theorie der Centralen in seiner einfachsten Form.

Zu der beabsichtigten Vereinfachung mag folgende Bemerkung leiten, welche auch an sich nicht ohne Interesse ist. Schon Poncelet hat gezeigt, wie die durch die Gleichung (Ia) für den Fall $m = 1$ dargestellte Relation eine projektivische ist, d. h. durch beliebige Projektion der Punkte, auf welche sie sich bezieht, nicht geändert wird. Daraus lässt sich, wie aus manchen anderen Umständen, vermuthen, dass jene Relation auch im allgemeinen Falle eine projektivische sein werde. Um diese Vermuthung zur Gewissheit zu bringen, und dabei zugleich zu der bezweckten Vereinfachung zu gelangen, wollen wir die allgemeine Form solcher Gleichungen, welche eine projektivische Relation darstellen, ausmitteln, und dann nachweisen, dass die Gleichung (Ia) diese Form hat.

Wir setzen als bekannt voraus, dass, wenn man in einer Ebene von einem festen Punkte A aus beliebige feste Strahlen $\alpha_1, \dots \alpha_n$ zieht und durch dieselben eine bewegliche Gerade legt, welche jene Strahlen beziehlich in den Punkten $B_1, \dots B_n$ schneidet, allemal folgendes Doppelverhältniss zwischen beliebigen vier Punkten, zum Beispiel B_1, B_2, B_3, B_4, konstant ist:

$$\frac{B_1B_2}{B_1B_3} : \frac{B_4B_2}{B_4B_3}.$$

Daraus folgt, dass auch jede Funktion dieses Doppelverhältnisses in der Projektion konstant bleiben muss; und auch umgekehrt, dass, wenn 274 irgend eine Funktion der Entfernungen zwischen den Punkten einer Geraden in der Projektion konstant bleibt, jene Funktion sich als Funktion solcher Doppelverhältnisse darstellen lassen muss; nämlich so, dass sie ausser diesen Doppelverhältnissen nur konstante Grössen enthält. Es seien nun $P, Q, S_1, \dots S_n$ Punkte einer Geraden, zwischen denen eine projektivische Relation stattfindet. Dann muss sich die Gleichung, welche diese Relation ausdrückt, wenn wir, was immer möglich ist, P, Q, S_1 jedesmal als drei von den vier Punkten annehmen, zwischen welchen das Doppelverhältniss stattfindet, in der Form darstellen lassen:

$$f\left(\frac{QS_2}{PS_2} : \frac{QS_1}{PS_1}, \; \frac{QS_3}{PS_3} : \frac{QS_1}{PS_1}, \; \dots, \; \frac{QS_n}{PS_n} : \frac{QS_1}{PS_1}\right) = 0,$$

wo f das Zeichen einer beliebigen Funktion ist. Es sei diese Funktion eine algebraische vom m-ten Grade, so wird man durch Multiplikation mit $\left(\frac{QS_1}{PS_1}\right)^m$ eine homogene Funktion vom m-ten Grade aus den ein-

fachen Quotienten erhalten; also wird jene Gleichung sich in der Form darstellen lassen:

$$F_m\left(\frac{QS_1}{PS_1}, \cdots, \frac{QS_n}{PS_n}\right) = 0,$$

wo wieder F_m das Zeichen einer homogenen Funktion vom m-ten Grade ist. Um alle Entfernungen von P aus zu haben, kann man statt QS_1 den Werth $QP + PS_1$, oder $PS_1 - PQ$, oder, mit der schon früher gebrauchten Abkürzung, $s_1 - q$ setzen: also ist $\frac{QS_1}{PS_1} = \frac{s_1 - q}{s_1} = 1 - \frac{q}{s_1}$ und man erhält

$$F_m\left[\left(1 - \frac{q}{s_1}\right), \cdots, \left(1 - \frac{q}{s_n}\right)\right] = 0.$$

Soll also die Gleichung (Ia) eine projektivische Relation darstellen, so muss sie sich, da sie zugleich in Bezug auf q vom m-ten Grade ist, auf diese Form bringen lassen. Da aber (Ia) zugleich eine Funktion aus den Kombinationsklassen der n Entfernungen $s_1, \ldots s_n$ ist, so muss sie sich auch in einer Reihe von Gliedern darstellen lassen, deren jedes ein Produkt aus den Kombinationsklassen der Elemente

$$\left(1 - \frac{q}{s_1}\right), \cdots, \left(1 - \frac{q}{s_n}\right)$$

ist, multiplicirt mit irgend einem konstanten Koefficienten, und zwar muss die Summe der Klassenzahlen in jedem Gliede m sein. Dass dies für den ersten Grad stattfindet, ist unmittelbar klar; denn die erste 275 Kombinationsklasse † aus jenen Elementen ist

$$\left(1 - \frac{q}{s_1}\right) + \left(1 - \frac{q}{s_2}\right) + \cdots + \left(1 - \frac{q}{s_n}\right)$$

oder

$$n - \frac{q}{s_1} - \frac{q}{s_2} - \cdots - \frac{q}{s_n}.$$

Dies giebt, gleich Null gesetzt und mit q dividirt, die Gleichung

$$\frac{n}{q} = \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} + \cdots + \frac{1}{s_n}.$$

Für den ersten Grad ist also die Projektivität der Gleichung (Ia) nachgewiesen. Um sie auch für den m-ten Grad nachzuweisen, ist zuerst irgend eine, zum Beispiel die r-te Kombinationsklasse jener Elemente $\left(1 - \frac{q}{s_1}\right)$ u. s. w., nach Potenzen von q zu entwickeln. Es findet sich

$$\left[\left(1 - \frac{q}{s_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{q}{s_n}\right)\right]^{\cdot r} = \sum (-1)^\alpha (n - \alpha)^{\cdot r - \alpha} \left(\frac{1}{s_1} \cdots \frac{1}{s_n}\right)^{\cdot \alpha} q^\alpha.$$

Denn, um bei der Entwickelung jener Kombinationsklasse den Koeffi-

cienten von q^α zu erhalten, muss man aus $\frac{1}{s_1}, \cdots, \frac{1}{s_n}$ die Kombinationen zur r-ten Klasse, und aus jeder wieder die zur α-ten nehmen; wobei man die Kombinationen aus $\frac{1}{s_1}, \cdots, \frac{1}{s_n}$ zur α-ten Klasse und zwar jede so oft erhält, als es Kombinationen aus $(n - \alpha)$ Elementen zur $(r - \alpha)$-ten Klasse giebt: letzteres nämlich deshalb, weil jede Kombination zur α-ten Klasse so oft vorkommen muss, als es verschiedene Arten giebt, diese Kombination zu einer der r-ten Klasse zu ergänzen, und dies offenbar auf so viele Arten geschehen kann, als es Kombinationen aus den noch übrigen $(n - \alpha)$ Elementen zu der ergänzenden, d. h. $(r - \alpha)$-ten Klasse giebt. Dass das Zeichen durch den Faktor $(-1)^\alpha$ dargestellt wird, ist an sich klar. Aus der soeben geführten kombinatorischen Entwickelung ergiebt sich zugleich unmittelbar für die kombinatorischen Zahlen das Gesetz

$$\overset{\cdot r\cdot\alpha}{n\;r} = \overset{\cdot\alpha}{n}\,(n-\alpha)^{\cdot r-\alpha};$$

also ist

$$(n-\alpha)^{\cdot r-\alpha} = \frac{\overset{\cdot r\cdot\alpha}{n\;r}}{\overset{\cdot\alpha}{n}}.$$

Substituirt man den letzteren Ausdruck in den gefundenen Ausdruck für die r-te Kombinationsklasse, so ergiebt sich

$$\sum(-1)^\alpha \frac{\overset{\cdot r\cdot\alpha}{n\;r}}{\overset{\cdot\alpha}{n}}\left(\frac{1}{s_1}\cdots\frac{1}{s_n}\right)^{\cdot\alpha} q^\alpha.$$

Vergleichen wir diesen Ausdruck mit der Gleichung (Ia), so zeigt sich leicht die vollkommene Uebereinstimmung, wenn man in jenen Ausdruck m statt r einführt und ihn gleich Null setzt. In der That: multiplicirt man die Gleichung

$$\sum(-1)^\alpha \frac{\overset{\cdot m\cdot\alpha}{n\;m}}{\overset{\cdot\alpha}{n}}\left(\frac{1}{s_1}\cdots\frac{1}{s_n}\right)^{\cdot\alpha} q^\alpha = 0 \qquad 276$$

mit $\frac{s_1 \cdot s_2 \cdots s_n}{\overset{\cdot m}{n}}$, so erhält man die Gleichung (Ia) unmittelbar, nämlich

$$\sum(-1)^\alpha \frac{\overset{\cdot\alpha}{m}}{\overset{\cdot\alpha}{n}}(s_1 \ldots s_n)^{\cdot n-\alpha} q^\alpha = 0.$$

Daraus folgt, dass die Gleichung (Ia) in der That eine projektivische Relation darstellt, und dass sie durch die Gleichung

$$\text{(Ib)} \qquad \left[\left(1-\frac{q}{s_1}\right)\cdots\left(1-\frac{q}{s_n}\right)\right]^{\cdot m} = 0$$

ersetzt wird, statt welcher man, indem man wieder $\frac{QS_1}{PS_1}$ u. s. w. statt $1-\frac{q}{s_1}$ u. s. w. setzt, auch schreiben kann:

$$\text{(Ib)} \qquad \left(\frac{QS_1}{PS_1}\cdots\frac{QS_n}{PS_n}\right)^{\cdot m}=0:$$

eine Gleichung, welche höchst einfach ist, und welche sich für $m=1$ in

$$\frac{QS_1}{PS_1}+\frac{QS_2}{PS_2}+\cdots+\frac{QS_n}{PS_n}=0$$

verwandelt.

Noch ist zu bemerken, dass sich auch der Gleichung (Va) eine in vielen Fällen bequemere Form geben lässt. Multiplicirt man dieselbe mit $n^{\cdot m}$, so kann man statt $\frac{n^{\cdot m}\,m^{\cdot \mathfrak{a}}}{n^{\cdot \mathfrak{a}}}$, nach dem vorher erwiesenen kombinatorischen Gesetz, auch $(n-\mathfrak{a})^{\cdot m-\mathfrak{a}}$ setzen und erhält dann

$$\text{(V)} \qquad \sum(n-\mathfrak{a})^{\cdot m-\mathfrak{a}}F_{\mathfrak{a}}(x',y',z')=0,$$

als die einfachste Form der Ortsgleichung für Q. Das ganze Ergebnis der bisherigen Untersuchung lässt sich nun in dem folgenden Satze aufstellen, welcher die grösste Einfachheit mit der grössten Allgemeinheit verbindet und den Hauptsatz unserer Theorie bildet:

Wenn man von einem festen Punkt P durch eine feste Oberfläche n-ter Ordnung eine bewegliche Gerade zieht, welche die Oberfläche in den Punkten $S_1\ldots S_n$ schneidet, und auf dieser Geraden einen Punkt Q so annimmt, dass die Summe aus sämmtlichen Produkten zu m Faktoren, welche sich aus den Quotienten der Entfernungen jedes Durchschnittspunktes von dem Punkte P einerseits und dem Punkte Q andrerseits bilden lassen, gleich Null ist, so ist der geometrische Ort des Punkts Q eine Oberfläche m-ter Ordnung; und zwar erhält man, wenn P 277 *zum Axendurchschnitt* † *gemacht ist, die Gleichung derselben aus der der Oberfläche dadurch, dass man jedes Glied der letztern mit einer Kombinationszahl multiplicirt, deren Elementenzahl den Grad dieses Gliedes zu n, und deren Klassenzahl denselben zu m ergänzt.*

Es wäre leicht gewesen, diesen Satz sogleich an die Spitze zu stellen und ihn unmittelbar zu beweisen. Wir hätten zu dem Ende nur den rückgängigen Weg einschlagen und von der Gleichung (I), welche zur Definition der harmonischen Mitten m-ter Ordnung dient, auf (Ib) und dann auf (Ia) zurückgehen und vermittelst dieser Gleichung

den Beweis nach der in § 2 befolgten Methode führen dürfen. Wir haben den freilich etwas weitläuftigeren, aber, wie es scheint, fruchtreicheren Weg der Schritt für Schritt fortgehenden Entwickelung vorgezogen, indem es ja weniger auf das einzelne Ergebniss, als auf die Darstellung allgemeiner und fruchtbarer Erweiterungsmethoden ankommt.

Wir gehen nun zu den Folgerungen aus diesem Satze über, und werden zuerst den Zusammenhang der verschiedenen Centralen, welche zu derselben Oberfläche und demselben Punkte P gehören, darstellen, und dann die besonderen Fälle ins Auge fassen.

§ 5.

Zusammenhang zwischen den Centralen eines Systems und zwischen Centrale und Polare.

Nimmt man die sämmtlichen auf einen Punkt bezüglichen Centralen einer Oberfläche n-ter Ordnung, wobei sich diese Oberfläche selbst als n-te Centrale ansehen lässt*), so bilden dieselben ein System von Centralen, welches eine Reihe merkwürdiger und einfacher Beziehungen darbietet, von welchen wir die wesentlichsten hervorheben wollen.

Nämlich, stellt man die Gleichungen zweier solcher Centralen, z. B. der m-ten und r-ten, in der Form (Va) auf, so erhält man:

$$\sum \frac{m^{\cdot \alpha}}{n^{\cdot \alpha}} F_\alpha(x, y, z) = 0$$

für die m-te Centrale und

$$\sum \frac{r^{\cdot \alpha}}{n^{\cdot \alpha}} F_\alpha(x, y, z) = 0$$

für die r-te Centrale; † wenn nämlich der Punkt P zum Axendurchschnitt 278 gemacht wird und die Gleichung der gegebenen Oberfläche

$$\sum F_\alpha(x, y, z) = 0$$

ist. Vergleicht man jene beiden Gleichungen, so leuchtet sogleich ein, dass, wenn r kleiner ist als m, die r-te Centrale zugleich Centrale der durch die m-te dargestellten Oberfläche ist, und zwar in Bezug auf

*) Setzt man nämlich in der Gleichung (V) $m = n$, so erhält man, da dann $(n - \alpha)^{\cdot m - \alpha} = 1$ ist, die ursprüngliche Gleichung der Oberfläche wieder; auch ist aus der Gleichung (I) klar, wie dann die n Punkte Q mit den n Punkten S zusammenfallen.

Oberfläche in Bezug auf Q. Nimmt man nun drei solche Punkte in jener Ebene an, so erhält man auch in Bezug auf sie drei erste Polaren, welche sich, da jede derselben eine Oberfläche $(n-1)$-ter Ordnung ist, in $(n-1)^3$ Punkten schneiden. Diese Durchschnittspunkte sind also die einzigen, in Bezug auf welche die drei Punkte zugleich harmonische Mitten erster Ordnung sind; und da zugleich der Ort dieser Mitten in Bezug auf jeden der genannten Durchschnittspunkte eine Ebene, diese aber durch drei Punkte bestimmt ist, so ist die gegebene Ebene erste Centrale der Oberfläche in Bezug auf jeden der erwähnten $(n-1)^3$ Durchschnittspunkte; aber auch in Bezug auf keinen anderen Punkt.

2. Ebenso ergiebt sich Folgendes für ebene Kurven:

Jede Gerade in der Ebene einer Kurve n-ter Ordnung kann als erste Centrale derselben angesehen werden und hat als solche $(n-1)^2$ zugeordnete Pole.

3. Aus der ersten Beziehung (1.) folgt wieder unmittelbar:

Alle ersten Polaren einer Oberfläche n-ter Ordnung schneiden sich, wenn die ihnen zugeordneten harmonischen Mitten in einer und derselben Ebene liegen, in denselben $(n-1)^3$ Punkten, welche die jener Ebene zugeordneten Pole sind.

4. Und ebenso folgt aus der zweiten Beziehung:

Alle ersten Polaren einer Kurve n-ter Ordnung schneiden sich, wenn die ihnen zugeordneten harmonischen Mitten in einer und derselben Geraden liegen, in denselben $(n-1)^2$ Punkten, welche die jener Geraden zugeordneten Pole sind.

5. Aus jener ersten Beziehung lässt sich endlich noch Folgendes darthun:

Alle ersten Polaren einer Oberfläche n-ter Ordnung haben, wenn die ihnen zugeordneten harmonischen Mitten in einer und derselben Geraden liegen, eine gemeinschaftliche Durchschnittskurve, welche der Ort der Pole ist, die den durch jene Gerade gelegten Ebenen zugeordnet sind.

281 Man nehme in der That zwei Punkte jener Geraden. Die Durchschnittskurve, in welcher sich die jenen beiden Punkten zugeordneten ersten Polaren der gegebenen Oberfläche schneiden, wird der Ort sein für alle jenen Punkten in Bezug auf die gegebene Oberfläche zugeordneten Pole erster Ordnung, und wir haben also nur zu zeigen, dass die einem solchen Punktenpaare auf diese Weise zugeordneten Pole mit den jedem andern Punktenpaare derselben Geraden auf gleiche Weise zugeordneten Polen identisch sind, d. h. dass die ersteren Pole zugleich es sind in Bezug auf alle Punkte dieser Geraden. Betrachtet man nun in der That die sämmtlichen Pole erster Ordnung, welche

zweien Punkten jener Geraden zugleich zugeordnet sind, so werden die ersten Centralen aller dieser Pole durch die beiden angenommenen Punkte gehen und werden also, da die ersten Centralen Ebenen sind, jene Gerade zur gemeinschaftlichen Durchschnittslinie haben; d. h. alle jene Pole werden, als Pole erster Ordnung, allen Punkten dieser Geraden zugeordnet sein; was noch zu zeigen übrig blieb.

Diesem Satze, welcher für Tangentialebenen einer Oberfläche, wie sich später zeigen wird, wichtig ist, entspricht kein Satz für ebene Kurven.

6. Dem ersten und zweiten Satze steht in Bezug auf die erste Polare parallel der Satz:

Jede einer Oberfläche oder Kurve n-ter Ordnung angehörige erste Polare hat nur e i n e *ihr zugeordnete harmonische Mitte.*

Denn betrachten wir z. B. auf dieser Polare, wenn sie eine Oberfläche ist, drei Punkte, so wird der Ort der harmonischen Mitten erster Ordnung in Bezug auf jeden dieser Punkte eine Ebene sein. Der Durchschnittspunkt Q dieser drei Ebenen wird also der einzige Punkt sein, welcher in Bezug auf jene drei Punkte zugleich harmonische Mitte erster Ordnung ist. Ist daher die Oberfläche, auf welcher jene drei Punkte genommen sind, wirklich eine erste Polare der gegebenen Oberfläche, so muss auch jener Punkt Q, und zwar er allein, die dieser Polare zugeordnete harmonische Mitte sein.

7. Hieraus folgt ferner,

dass alle ersten Centralen einer Oberfläche oder Kurve, wenn die ihnen zugeordneten Pole in einer ersten Polare derselben Oberfläche oder Kurve liegen, sich in einem Punkt schneiden, welcher die jener Polare zugeordnete harmonische Mitte ist.

8. Auch geht daraus zugleich hervor, dass auch die erste Polare, wenn die Oberfläche gegeben ist, zu welcher sie gehört, durch drei 282 Punkte vollkommen bestimmt wird; wie solches für die erste Centrale, da diese eine Ebene ist, an sich klar ist.

Statt diese Beziehungen auf die höheren Ordnungen der Centralen und Polaren auszudehnen, wollen wir sie nur noch auf Kurven und Oberflächen zweiter Ordnung anwenden; wo sie das bekannte Gesetz der Reciprocität darstellen. Da hier nämlich die Ausdrucke Polare und Centrale, Pol und harmonische Mitte, vertauscht werden können, so verwandeln sich hier die oben dargestellten Beziehungen in folgende bekannte Sätze:

„Alle Polaren eines Kegelschnittes, deren Pole in einer Geraden liegen, schneiden sich in einem und demselben Punkte, dem Pole dieser Geraden in Bezug auf den Kegelschnitt," und

„Alle Polaren einer Oberfläche zweiter Ordnung, deren Pole in einer Ebene liegen, schneiden sich in einem und demselben Punkte, dem Pole jener Ebene in Bezug auf die Oberfläche.“

Und endlich:

„Alle Polaren einer Oberfläche zweiter Ordnung, deren Pole in einer Geraden liegen, schneiden sich in einer und derselben Geraden, welche wiederum zugleich der Ort der Pole für alle durch die erste gelegten Ebenen ist.“

372

§ 6.

Besondere Beziehungen, wenn der Pol im Unendlichen liegt.

Unter den besonderen Fällen, welche daraus hervorgehen, dass von den Punkten P, S, Q einer in unendlicher Entfernung liegt, oder zwei zusammenfallen, zeichnen sich besonders drei Fälle als Quellen reichhaltiger Folgerungen aus; nämlich erstens wenn der Pol P in eine unendliche Entfernung rückt; zweitens wenn P mit einem der Punkte S, und drittens, wenn einer der Punkte Q mit einem der Punkte S zusammenfällt. Wir behandeln in diesem Paragraphen nur den ersten Fall, wenn P unendlich weit entfernt ist, während wir zugleich voraussetzen, dass alle Punkte $S_1, \ldots S_n$ in endlicher Entfernung liegen. Dann verwandelt sich die Gleichung

$$\left(\frac{QS_1}{PS_1} \cdots \frac{QS_n}{PS_n}\right)^{\cdot m} = 0,$$

welche die Punkte Q bestimmt, in die Gleichung

$$(QS_1 \ldots QS_n)^{\cdot m} = 0.$$

Setzt man nämlich $PS_2 = PS_1 + S_1S_2$, so fällt S_1, S_2, als endliches Stück, gegen das unendliche PS_1 weg; man kann also PS_2 und alle anderen Entfernungen $PS_3, \ldots PS_n$ gleich PS_1 setzen, und erhält dann durch Multiplikation mit $(PS_1)^m$ die obige Gleichung, durch welche die harmonischen Mitten m-ter Ordnung Q zwischen den in einer Geraden liegenden Punkten $S_1, \ldots S_n$ in Bezug auf den unendlich entfernten Punkt dieser Geraden, oder die Mitten m-ter Ordnung zwischen jenen Punkten schlechthin, bestimmt werden. Für den ersten Grad hat man $QS_1 + QS_2 + \cdots + QS_n = 0$; also ist Q dann das Centrum der mittleren Entfernungen, oder kurzweg, die Mitte zwischen den Punkten $S_1, \ldots S_n$, oder der Schwerpunkt derselben, wenn alle gleich an Ge-
373 wicht gedacht werden. Da nun die aus † einem unendlich entfernten Punkte gezogenen Geraden alle unter sich parallel sind, so lässt sich der allgemeine Satz für diesen Fall wie folgt aussprechen:

Zieht man durch eine Oberfläche eine bewegliche Gerade von konstanter Richtung, welche die Oberfläche in den Punkten $S_1, \ldots S_n$ schneidet, und setzt in ihr einen Punkt Q so, dass die Summe sämmtlicher Produkte zu m Faktoren, welche sich aus seinen Entfernungen von den n Durchschnittspunkten bilden lassen, gleich Null ist, so ist der Ort dieses Punktes eine Oberfläche m-ter Ordnung.

Wir nennen dieselbe die jener (konstanten) Richtung zugehörige m-te Centrale der Oberfläche. Ist insbesondere der Punkt Q die Mitte (s. oben) zwischen den n Durchschnittspunkten, so ist sein Ort eine Ebene, und in Bezug auf Kurven eine Gerade. Diese Ebene ist die jener Richtung zugehörige *Durchmesserebene* der Oberfläche; die Gerade ist der ihr zugehörige *Durchmesser* der Kurve. Beide sind also nichts anderes, als die jener Richtung zugehörigen ersten Centralen der Oberfläche oder Kurve. Um nun die Gleichung der zu einer Richtung gehörigen m-ten Centrale aufzustellen, lässt sich nicht unmittelbar die in dem allgemeinen Satz angegebene Methode anwenden, indem der Axendurchschnitt, der dort immer in P angenommen wurde, nicht füglich in unendlicher Entfernung angenommen werden kann. Man kann zu dem Ende die eine der Richtaxen, etwa die z-Axe, der gegebenen Richtung, für welche die Centrale gesucht wird, parallel annehmen und nun einen zwiefachen Weg einschlagen. Entweder man wandelt zunächst die Gleichung der gegebenen Oberfläche n-ter Ordnung so um, dass der Axendurchschnitt nach dem unendlich entfernten Punkte der x-Axe verlegt wird, dass man dann nach dem allgemeinen Satze die Gleichung für die m-te Centrale dieses Punktes ableitet und dann wieder die so gefundene Gleichung so umwandelt, dass der Axendurchschnitt wieder nach dem ursprünglichen Punkte zurück versetzt wird: oder man entwickelt die Gleichung dieser Centrale, ganz unabhängig von dem allgemeinen Satze, nach der Analogie des für den Beweis dieses Satzes selbst angewandten Verfahrens. Da das erste Verfahren, welches auf eine blosse Anwendung allgemein bekannter analytischer Operationen hinausläuft, kein weiteres Interesse darbietet, so wählen wir das zweite; wodurch wir zugleich den Vortheil gewinnen, eine Reihe von Schlüssen im † Zusammenhange verfolgen zu können, welche bei der Entwicke- 374 lung des allgemeinen Satzes nur sehr zerstreut und stückweise gegeben waren.

Die Aufgabe ist hier diese. Es ist eine Oberfläche n-ter Ordnung und ein Axenkreuz gegeben: man ziehe mit der z-Axe desselben parallel eine bewegliche Gerade, welche die Oberfläche in den Punkten $S_1, \ldots S_n$ schneidet: es soll der Ort des durch die Gleichung

[I] $$(QS_1 \dots QS_n)^{\cdot m} = 0$$

bestimmten Punktes Q gesucht werden.

Es seien wieder x, y, z die Richtstücke des Punktes S und x', y', z' die des Punktes Q. Die Gleichung der Oberfläche sei

[II] $$\sum z^{\alpha} f_{n-\alpha}(x, y) = 0,$$

wo $f_{n-\alpha}$ eine Funktion vom $(n-\alpha)$-ten Grade bezeichnet.

Der Durchschnitt der beweglichen Geraden mit der xy-Ebene sei R, so ist, da die Gerade mit der z-Axe parallel ist,

[III] $$RQ = z', \quad RS = z; \quad y = y', \quad x = x'.$$

Durch Substitution dieser Ausdrücke verwandelt sich zuerst, da

$$QS_1 = QR + RS_1 = RS_1 - RQ = z_1 - z'$$

ist, die Gleichung [I] in

$$[(z_1 - z') \cdots (z_n - z')]^{\cdot m} = 0.$$

Dies nach Potenzen von z' entwickelt, erhält man wieder

[Ia] $$\sum (-1)^{\alpha} (n-\alpha)^{\cdot m-\alpha} (z_1 \cdots z_n)^{\cdot \alpha} z'^{m-\alpha} = 0\ *).$$

Die Gleichung [II] aber verwandelt sich in

[IV] $$\sum z^{\alpha} f_{n-\alpha}(x', y') = 0.$$

Die hieraus sich ergebenden Wurzelwerthe $z_1, \dots z_n$ sind dann in die Gleichung [Ia] zu substituiren. Es ist aber

$$(-1)^{\alpha} (z_1 \dots z_n)^{\cdot \alpha} = \frac{f_{\alpha}(x', y')}{f_0(x', y')}.$$

Dies also in [IV] substituirt und dann die Gleichung mit $f_0(x', y')$ multiplicirt, ergiebt sich

[V] $$\sum (n-\alpha)^{\cdot m-\alpha} f_{\alpha}(x', y') z'^{m-\alpha} = 0,$$

als Ortsgleichung für Q. Also:

Die Gleichung für die einer Richtung zugehörige m-te Centrale einer 375 *Oberfläche n-ter Ordnung findet man, wenn eine der Richtaxen der † gegebenen Richtung parallel angenommen wird, aus der Gleichung der gegebenen Oberfläche dadurch, dass man den Exponenten des mit der gegebenen Richtung parallelen Richtstückes (z) überall um $n-m$ verringert, und jedes Glied mit einer Kombinationszahl multiplicirt, deren Elementenzahl dem alten und deren Klassenzahl dem neuen Exponenten dieses Richtstückes gleich ist.*

---

*) Ueber die Ableitung dieser Formel vergleiche man § 4.

Es ist klar, dass hierbei jedes Glied, in welchem der anfängliche Exponent von z kleiner ist als $(n-m)$, wegfällt, weil dann bei der Erniedrigung um $(n-m)$ der neue Exponent von z, also auch die ihm gleiche Klassenzahl, negativ, die Kombinationszahl selbst also null wird. Somit ist die Gleichung der einer Richtung zugehörigen m-ten Centrale einer Oberfläche nur von den Gliedern der $m+1$ höchsten Grade in der Gleichung dieser Oberfläche abhängig; z. B. die der ersten Centrale nur von den Gliedern der beiden höchsten Grade, d. h. des n-ten und $(n-1)$-ten. Daraus folgt, dass, wenn die Gleichungen zweier Oberflächen in den Gliedern der $m+1$ höchsten Grade übereinstimmen, dass dann auch die zu den Richtaxen gehörigen Centralen beider Oberflächen vom ersten bis zum m-ten Grade identisch sind. Da nun, wenn die Richtaxen beliebig verändert werden, die neuen Richstücke immer nur lineare Funktionen der alten sind, und umgekehrt, also durch Substitution der neuen statt der alten in irgend einem Gliede der Grad dieses Gliedes nie erhöht werden kann: so folgt, dass, wenn die Gleichungen zweier Oberflächen für irgend ein Axenkreuz in den Gliedern der $m+1$ höchsten Grade übereinstimmen, dieselbe Uebereinstimmung auch noch fortbestehen wird bei beliebiger Aenderung der Lage des Axenkreuzes; dass also dann auch die zu allen Richtungen gehörigen Centralen, von der ersten bis zur m-ten, in Bezug auf beide Oberflächen identisch sein werden. Wir nennen dann die beiden Oberflächen *koncentral* im m-ten Grade, und zwar in Bezug auf alle unendlich entfernten Punkte. Was den letzten Zusatz betrifft, so ist klar, dass zwei Oberflächen auch koncentral sein können in Bezug auf eine in endlicher Entfernung liegende Ebene, oder vielmehr auf alle Punkte derselben, wovon man sich leicht überzeugt, wenn man zu den zwei in Bezug auf die unendlich entfernten Punkte koncentralen Oberflächen ein kollineares System bildet, von der Art, dass alle unendlich entfernten Punkte ins Endliche rücken, wobei sie bekanntlich eine Ebene bilden. Es werde jedoch, was jenen Zusatz betrifft, nach dem allgemeinen Princip unserer † Benennung festgesetzt, dass, wenn zwei Oberflächen schlechtweg koncentral heissen, dies sich allemal auf die unendlich entfernten Punkte beziehen soll. Es lässt sich somit der Satz aufstellen: 376

Zwei Oberflächen sind koncentral im m-ten Grade, wenn die Glieder der $m+1$ höchsten Grade in den Gleichungen beider Oberflächen in Bezug auf irgend ein Axenkreuz übereinstimmen.

Es versteht sich von selbst, dass diese koncentrale Beziehung bis zum $(n-1)$-ten Grade gehen kann; in welchem Fall sich beide Glei-

chungen nur durch das konstante Glied unterscheiden. Wären sie im n-ten Grade koncentral, so würden beide Oberflächen selbst identisch sein.

Der Begriff von Kurven, welche im ersten Grade koncentral sind, stimmt überein mit dem von Kurven, welche gleiche *Asymptoten* haben. In der That ist das System der n Asymptoten als dasjenige System von n Geraden anzusehen, welches der gegebenen Kurve (im ersten Grade) koncentral ist; wie sich sogleich daraus ergiebt, dass die Gleichung für das System der n Asymptoten mit der Gleichung der Kurve selbst die Glieder der beiden höchsten Grade identisch hat. Doch ist hier wiederum der Begriff allgemeiner; auch schon insofern, als er sich auf Oberflächen ausdehnen lässt. Für koncentrale Oberflächen haben wir, um eine leichte Anwendung zu geben, die Relation, dass, wenn irgend eine Gerade hindurchgezogen wird, welche die eine in den Punkten $a_1, \ldots a_n$, die andere in $b_1, \ldots b_n$ schneidet,

$$Qa_1 + Qa_2 + \cdots + Qa_n = 0 = Qb_1 + Qb_2 + \cdots + Qb_n$$

ist, wo Q die Mitte zwischen den n Durchschnittspunkten bezeichnet, welche für beide Oberflächen identisch sein soll. Also da

$$Qb_1 - Qa_1 = a_1 b_1$$

ist, so hat man

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = 0,$$

oder, in Worten ausgedrückt:

Zieht man durch zwei koncentrale Oberflächen (oder Kurven) eine beliebige Gerade, so ist die Summe aller Abschnitte, deren Anfangspunkte auf der einen, und zwar dann stets auf derselben, und deren Endpunkte auf der andern liegen, wenn man diese Abschnitte so wählt, dass jeder Durchschnittspunkt einmal, aber auch nur einmal, vorkommt, gleich Null.

Sind die Oberflächen in höheren Graden koncentral, so finden, ausser dieser Beziehung, vermöge der Identität der harmonischen Mitten 377 höherer † Ordnungen, noch andere Beziehungen statt, welche sich aber nicht mehr so einfach darstellen lassen.

§ 7.

Besondere Beziehungen für den Fall, wo der Pol oder eine der harmonischen Mitten in die Oberfläche fällt.

Es falle zuerst der Pol P in die Oberfläche, also in einen der Punkte $S_1, \ldots S_n$, z. B. in S_1. Dann ist $PS_1 = 0$. Die Gleichung der harmonischen Mitte m-ter Ordnung Q ist

$$\left(\frac{QS_1}{PS_1}\cdots\frac{QS_n}{PS_n}\right)^{\cdot m}=0.$$

Man multiplicire mit PS_1, so erhält man

$$QS_1\left(\frac{QS_2}{PS_2}\cdots\frac{QS_n}{PS_n}\right)^{\cdot m-1}+PS_1\left(\frac{QS_2}{PS_2}\cdots\frac{QS_n}{PS_n}\right)^{\cdot m}=0.$$

Ist nun $PS_1=0$, so fällt der zweite Theil weg und man behält

$$QS_1\cdot\left(\frac{QS_2}{PS_2}\cdots\frac{QS_n}{PS_n}\right)^{\cdot m-1}=0;$$

also ist entweder

$$QS_1=0,$$

oder

$$\left(\frac{QS_2}{PS_2}\cdots\frac{QS_n}{PS_n}\right)^{\cdot m-1}=0,$$

d. h. einer der Punkte Q fällt zugleich in P oder in S_1; die andern $m-1$ Punkte Q sind harmonische Mitten $(m-1)$-ter Ordnung zwischen den $n-1$ übrigen Punkten in Bezug auf P*). Man hat also den Satz:

Nimmt man einen Punkt in einer Oberfläche n-ter Ordnung als Pol an, so geht die zugehörige m-te Centrale durch denselben Punkt und hat die Eigenschaft, dass, wenn man durch jenen Punkt eine beliebige Gerade zieht, welche also die gegebene Oberfläche noch in $n-1$, die Centrale noch in $m-1$ Punkten schneidet, die $m-1$ letzteren harmonische Mitten $(m-1)$-ter Ordnung zwischen den $n-1$ ersteren in Bezug auf den Pol P sind.

Und umgekehrt:

Wenn man von einem Punkt einer Oberfläche (oder Kurve) n-ter Ordnung beliebige Strahlen zieht und auf jedem derselben in Bezug auf jenen Punkt die harmonischen Mitten m-ter Ordnung zwischen den $n-1$ übrigen Durchschnittspunkten jenes Strahles nimmt, so liegen diese † harmonischen Mitten auf einer 378 *Oberfläche (oder Kurve) $(m+1)$-ter Ordnung, der $(m+1)$-ten Centrale der gegebenen Oberfläche (oder Kurve) in Bezug auf jenen Punkt.*

Zieht man, um eine specielle Anwendung zu geben, von einem

*) Hieraus folgt zugleich, dass, wenn r Punkte $S_1,\cdots S_r$ zugleich mit P zusammenfallen, dann auch r Punkte Q in denselben Punkt fallen, während die übrigen Punkte Q harmonische Mitten $(m-r)$-ter Ordnung zwischen den $n-r$ übrigen Punkten S in Bezug auf denselben Pol P sind.

festen Punkte einer Kurve dritter Ordnung einen beweglichen Strahl und bestimmt auf ihm zu den drei Durchschnittspunkten desselben den vierten, jenem festen Punkte zugeordneten harmonischen Punkt, so liegt dieser jedesmal *auf einem und demselben festen Kegelschnitt.*

Noch ist zu bemerken, dass, wenn man insbesondere von P eine Gerade zieht, welche die Oberfläche in diesem Punkte berührt, so dass also zwei Punkte S_1 und S_2 mit P zusammenfallen, dann auch zwei Punkte Q in denselben Punkt fallen müssen. Die Gerade berührt also dann zugleich die Centrale, und da dasselbe von allen an P gezogenen Tangenten gilt, so haben alle zu P gehörigen Centralen mit der gegebenen Oberfläche an diesem Punkt eine gemeinschaftliche Tangentialebene, und diese Tangentialebene ist die erste Centrale in Bezug auf ihren Berührungspunkt P. Ebenso ist die erste Centrale einer Kurve in Bezug auf einen Punkt derselben die Tangente an diesen Punkt.

Es falle zweitens einer der Punkte $Q_1, \dots Q_m$ in einen der Punkte $S_1, \dots S_n$, z. B. in S_1, so muss P, S_1 statt Q substituirt, noch der Gleichung

$$\left(\frac{QS_1}{PS_1} \cdots \frac{QS_n}{PS_n}\right)^{\cdot m} = 0$$

genügen. Man hat also, da $S_1 S_1 = 0$ ist,

$$\left(\frac{S_1 S_2}{PS_2} \cdots \frac{S_1 S_n}{PS_n}\right)^{\cdot m} = 0;$$

d. h. der Punkt S_1 muss dann ein Centrum m-ter Ordnung zwischen den $n-1$ übrigen Punkten sein, in Bezug auf denselben Pol P.

Nun sind die Durchschnitte der m-ten Centrale mit der gegebenen Oberfläche solche Punkte, und zwar die einzigen, in welchen eine harmonische Mitte m-ter Ordnung mit einem Punkte S zusammenfällt. Also findet sich zuerst für die Kurven, da sich zwei Kurven, von denen die eine m-ter, die andere n-ter Ordnung ist, in $n.m$ Punkten schneiden, nachstehender Satz:

Durch eine Kurve n-ter Ordnung lassen sich von einem Punkt in der Ebene derselben $n.m$ Gerade ziehen, welche die Beschaffenheit haben, dass einer ihrer Durchschnittspunkte 379 *mit der Kurve die harmonische Mitte † m-ter Ordnung zwischen den $(n-1)$ übrigen in Bezug auf den gegebenen Punkt ist; und zwar bilden diese harmonischen Mitten die Durchschnittspunkte der gegebenen Kurve mit ihrer auf jenen Punkt bezüglichen m-ten Centrale.*

Dieser Satz lässt sich wiederum für die erste Centrale und für die

erste Polare (die $(n-1)$-te Centrale) specialisiren. In Bezug auf jene würde er wie folgt lauten:

Durch eine Kurve n-ter Ordnung lassen sich von einem Punkte P n Gerade von der Art ziehen, dass einer ihrer Durchschnittspunkte mit der Kurve die harmonische Mitte (erster Ordnung) zwischen den übrigen in Bezug auf P ist, und diese Mitten liegen in einer geraden Linie, der ersten Centrale der Kurve in Bezug auf P.

Namentlich lassen sich an eine Kurve dritter Ordnung von einem Punkte P drei solche Strahlen ziehen, deren drei Durchschnittspunkte mit der Kurve in Verbindung mit P vier harmonische Punkte bilden; und zwar liegen die jenem Punkte P zugeordneten harmonischen Punkte in einer geraden Linie, der Centrale u. s. w.

Um den Satz auch für die $(n-1)$-te Centrale aussprechen zu können, ist nur zu bemerken, dass, wenn einer der Durchschnittspunkte harmonische Mitte $(n-1)$-ter Ordnung zwischen den $n-1$ übrigen Durchschnittspunkten sein soll, dies nichts anderes heisst, als dass von diesen $n-1$ Punkten noch einer in jenen ersten Punkt fallen, dieser also Berührungspunkt einer *Tangente* sein muss*). Somit ergiebt sich folgender Satz:

Aus jedem Punkt lassen sich an eine Kurve n-ter Ordnung $n(n-1)$ Tangenten ziehen, und zwar bilden die Berührungspunkte derselben die Durchschnittspunkte der gegebenen Kurve mit ihrer auf jenen Punkt bezüglichen ersten Polare.

Für die Oberflächen würde der allgemeine Satz also lauten:

Wenn man aus einem Punkte P durch eine Oberfläche n-ter Ordnung die sämmtlichen Geraden zieht, welche in der Art möglich sind, dass jedesmal einer der Durchschnittspunkte harmonische Mitte m-ter Ordnung zwischen den übrigen in Bezug auf P ist, so liegen diese Mitten zugleich in einer Oberfläche m-ter Ordnung, der m-ten Centrale der † Oberfläche in 380 *Bezug auf P und bilden also die Durchschnittslinie der Oberfläche mit ihrer m-ten Centrale.*

Insbesondere liegen die Berührungspunkte der Tangenten, welche von einem Punkt P an eine Oberfläche n-ter Ordnung gezogen sind, zugleich in einer Oberfläche $(n-1)$-ter Ordnung, der ersten Polare der gegebenen Oberfläche in Bezug auf jenen Punkt, und bilden also die Durchschnittslinie der Oberfläche mit ihrer ersten zu jenem Punkte gehörigen Polare.

Nimmt man in Bezug auf zwei Punkte P und P' die ersten Polaren einer Oberfläche n-ter Ordnung, so werden sich diese drei Ober-

---

*) Weil nämlich die harmonischen Mitten r-ter Ordnung zwischen r Punkten mit diesen zusammenfallen.

flächen in $n(n-1)^2$ Punkten schneiden, und jeder dieser Punkte, aber auch kein anderer, wird Berührungspunkt einer von P und zugleich einer von P' an die Oberfläche gezogenen Tangente, d. h. also auch einer durch die Gerade PP' an die Oberfläche gelegten Tangentialebene sein. Somit hat man folgenden Satz:

*Durch eine Gerade lassen sich an eine Oberfläche n-ter Ordnung $n\cdot(n-1)^2$ Tangentialebenen legen; und zwar bilden die Berührungspunkte die Durchschnittspunkte der Oberfläche mit ihren auf die Punkte jener Geraden bezüglichen ersten Polaren**).

Es liessen sich noch manche interessante Beziehungen hier ableiten, deren Aufsuchung ich aber, um nicht zu weitläufig zu sein, dem Leser überlasse. Vorläufig mögen die gewonnenen Resultate genügen, um die Fruchtbarkeit und Wichtigkeit des oben aufgestellten allgemeinen Satzes anzudeuten, welchen wir nun noch auf zwei reciproke Systeme übertragen wollen.

57

§ 8.

Uebertragung des Hauptsatzes und seiner Folgerungen auf Linien- und Ebenensysteme.

Es ist bekannt, dass sich aus jedem geometrischen Satze ein zweiter, ihm paralleler Satz dadurch ableiten lässt, dass man statt der Ebenen Punkte und statt der Punkte Ebenen setzt, während die geraden Linien bleiben was sie sind. Enthält dabei der Satz noch bestimmte Abhängigkeiten, so lassen sich auch diese stets nach einer allgemeinen Regel umgestalten. Diese gegenseitige Beziehung, welche man bekanntlich Reciprocität nennt, lässt sich auch auf den allgemeinen Lehrsatz (§ 4) und auf die daraus abgeleiteten Folgerungen anwenden. Doch können wir uns hierbei nicht auf das Princip der Reciprocität als auf ein schon bekanntes berufen, indem dieses Princip, so weit mir bekannt geworden, in Bezug auf den Raum noch nicht umfassend und genügend dargestellt wurde. Es giebt nämlich im Raume ausser jenen beiden reciproken Systemen noch ein drittes von nicht geringerer Wichtigkeit, was aber bisher noch übersehen zu sein scheint, indem nämlich den Punkten des einen und den Ebenen des andern Systems in dem letztern gerade Linien entsprechen, so dass in Bezug auf den Raum jeder Satz dreifach erscheint (in Bezug auf die Ebene zweifach). Diese reciproken

---

*) Um diesen Satz richtig aufzufassen, erinnere man sich, dass die auf die Punkte einer Geraden bezüglichen ersten Polaren stets eine gemeinschaftliche Durchschnittskurve haben. (S § 5.)

Beziehungen werde ich hier zugleich in der Art ableiten, wie sie sich für die beabsichtigte Umwandlung des obigen • Satzes von selbst ergeben, und so werden vermöge dieser speciellen Abzweckung auch die schon bekannten reciproken Beziehungen in einer neuen, vielleicht auch an sich nicht uninteressanten Form auftreten.

In der bisherigen Entwickelung wurde jede Oberfläche als geometrischer Ort eines Punktes (S) betrachtet, zwischen dessen veränderlichen Richtstücken x, y, z eine Gleichung vom n-ten Grade stattfand, und wir nannten eine solche Oberfläche eine Fläche n-ter Ordnung. Man kann nun zweitens jede Oberfläche als die von einem System von Ebenen Umhüllte ansehen, indem wieder zwischen den veränderlichen Bestimmungsstücken † der Ebene eine Gleichung stattfindet; und wenn 58 man unter dem geometrischen Ort einer in ihrer Lage nach einem bestimmten Gesetz veränderlichen Ebene wiederum die von sämmtlichen Ebenen, welche vermöge des Gesetzes dieser Veränderlichkeit möglich sind, Umhüllten versteht, so erscheint in diesem zweiten Falle die Oberfläche als geometrischer Ort einer Ebene. Jedes Element einer Oberfläche wird im ersten Falle durch den Punkt, welchen es einnimmt, im zweiten durch die Tangentialebene an dieses Element dargestellt. Im dritten Falle endlich soll die Oberfläche als von lauter Geraden umhüllt, also als geometrischer Ort dieser Geraden (in dem vorhergegebenen weiteren Sinne) angesehen werden; das Element der Oberfläche wird also dann durch eine Tangente an dieses Element repräsentirt. Da es aber unzählig viele Tangenten an ein Element einer Oberfläche giebt, welche eben in ihrer Gesammtheit die Tangentialebene bilden, so muss man, um jedes Element durch *eine* Tangente zu repräsentiren, noch eine Bestimmung hinzufügen. Es giebt keine einfachere, als die, eine Axe im Raume anzunehmen, welche wir Hauptaxe nennen und von welcher aus jedesmal die Tangenten gezogen sein sollen. So entspricht dann jedem Elemente der Oberfläche nur eine Tangente, und alles ist jetzt dem Früheren analog.

Um nun den allgemeinen Satz für diese beiden neuen Systeme, welche wir Ebenen- und Liniensysteme nennen wollen, umzuwandeln, kommt es nur darauf an, diejenigen Beziehungen, aus welchen wir dort jenen Satz ableiteten, auch hier festzuhalten. Es waren diese Beziehungen dargestellt durch die Gleichungen (1, 2, 3, 4, 5) in § 2, von denen (1) und (5) hernach noch eine individuelle Gestaltung annahmen. Die Gleichung (1) (späterhin I) bestimmte den Punkt Q, die Gleichung (2) die Oberfläche, als Ort des Punktes S, zwischen dessen Richtstücken eben die Gleichung stattfand, wobei ein fester Punkt P als der Ursprung der Richtstücke, d. h. als der Punkt angenommen wurde, dessen

Richtstücke null waren. Die Gleichungen (3) stellten die Bedingung dar, dass P, Q, S in einer Geraden lagen, und aus diesen drei Gleichungen wurden dann die Gleichungen (4) und (5) abgeleitet. Lassen wir also die Gleichungen (1) und (2), welche immer an sich noch willkürlich sind, auch für die beiden letzten Systeme bestehen, so kommt es nur noch darauf an, dass auch die Gleichungen (3), nämlich

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'} = \frac{s}{q},$$

59 hier gelten, und es müssen also die Richtstücke der Ebene oder der Geraden (deren Ort die Oberfläche darstellen soll) so gewählt werden, dass die Gleichungen noch fortbestehen. Bei dem Ebenensysteme, wo also die Oberfläche als Ort einer Ebene angesehen wird, wird man unter S, also auch unter P und Q, Ebenen verstehen müssen. Die Bedingung, dass die Punkte P, S, Q in *einer* Geraden liegen mussten, wird also hier durch die Bedingung vertreten, dass die Ebenen P, S, Q sich in *einer* Geraden schneiden sollen. Man nehme nun P zur Ebene zweier Richtaxen (X, Y) und nehme von dem Durchschnittspunkte derselben aus eine dritte, nicht in der Ebene liegende Axe (Z). Nun seien die Stücke, welche die Ebene S von diesen drei Richtaxen abschneidet, x, y, z: alsdann schneidet Q, da P, S, Q sich in *einer* Geraden schneiden sollen, von den beiden in P liegenden Richtaxen X und Y dieselben Stücke x und y ab; hingegen schneidet Q von der dritten Axe Z das Stück z' ab. Wollte man nun die Stücke x, y, z, durch welche die Ebene S bestimmt ist, als Richtstücke derselben annehmen, so würden die Gleichungen (3) nicht mehr gelten; dagegen werden sie bestehen bleiben, wenn man zu Richtstücken einer Ebene S die Grössen φ, ψ, z nimmt, von denen

$$\varphi = \frac{z}{x}; \quad \psi = \frac{z}{y}; \quad (z = z)$$

ist. Denn nennt man nun φ', ψ', z' die Richtstücke der Ebene Q in demselben Sinne genommen, wo also

$$\varphi' = \frac{z'}{x}; \quad \psi' = \frac{z'}{y}$$

ist, so hat man unmittelbar

$$\frac{\varphi}{\varphi'} = \frac{\psi}{\psi'} = \frac{z}{z'}.$$

Um noch das Analogon von s und q zu erhalten, ist nur zu erwägen, dass s und q nur von der gegenseitigen Lage von P und S einerseits und von P und Q andrerseits abhängig waren, und zwar so, dass man jene drei gleichgesetzten Ausdrücke gleich $\frac{s}{q}$ setzen konnte. Dasselbe

erreicht man hier auf eine sehr einfache Weise, wenn man die dritte Axe Z gegen P senkrecht annimmt. Alsdann ist offenbar

$$\frac{z}{z'} = \frac{\text{tang}\, PS}{\text{tang}\, PQ},$$

sobald man unter PS und PQ die Neigungswinkel der Ebenen versteht; wobei zu merken ist, dass PQ und QP wieder entgegengesetzte Winkel sind. Bezeichnen wir also tang PS durch s und tang PQ durch q, so ist auch

$$\frac{z}{z'} = \frac{s}{q},$$

wie oben (§ 2), und wir können also wie oben substituiren:

[3] $$\varphi = \frac{s}{q}\varphi'; \quad \psi = \frac{s}{q}\psi'; \quad z = \frac{s}{q}z',$$ 60

welche den Gleichungen (3) in § 2 entsprechen.

Wir wollen, ehe wir in der Entwickelung weiter gehen, hier einen Augenblick verweilen, um die Bedeutung der gefundenen Richtstücke festzuhalten. Wir nennen die Ebene P, in welcher die Richtaxen X und Y angenommen waren, die Hauptebene, die darauf senkrechte Axe Z die Hauptaxe, die übrigen Axen (X und Y) Nebenaxen, und die beiden Ebenen, welche durch die Hauptaxe einerseits und die beiden Nebenaxen andrerseits gelegt sind, Nebenebenen. Die Richtstücke der veränderlichen Ebene S sind nun erstens das Stück, welches sie von der Hauptaxe abschneidet, zweitens und drittens die Tangenten des Winkels, welchen die von der veränderlichen Ebene und der einen oder der andern Nebenebene gebildete Durchschnittslinie mit der Hauptaxe macht. Auch hier ist zu bemerken, dass P der Ursprung der Richtstücke, d. h. diejenige Ebene ist, deren Richtstücke null sind.

Nimmt man nun eine Gleichung vom n-ten Grade

[2] $$\sum F_a(\varphi, \psi, z) = 0$$

zwischen diesen variabeln Richtstücken der Ebene S an, so ist der geometrische Ort derselben eine Oberfläche, welche wir nach Analogie des von Gergonne für ebene Kurven eingeführten Sprachgebrauches eine Oberfläche n-ter Klasse nennen. Durch Substitution von [3] in [2] erhalten wir, wie oben,

[4] $$\sum s^a \frac{F_a(\varphi', \psi', z')}{q^a} = 0;$$

welche Gleichung also in Bezug auf s von demselben (n-ten) Grade ist, wie die Gleichung [2], und welche also lehrt, dass an eine Oberfläche n-ter Klasse von einer gegebenen Geraden aus n Tangentialebenen möglich sind. Sobald man nun zur Bestimmung von q dieselbe Gleichung (I)

festhält, so muss auch dieselbe Gleichung (V) daraus hervorgehen, also derselbe Satz hier gelten. Die Gleichung (I) hatten wir in § 4 auf die Form (Ib), nämlich auf

$$[\mathrm{Ib}] \qquad \left[\left(1-\frac{q}{s_1}\right)\cdots\left(1-\frac{q}{s_n}\right)\right]^{\cdot m}=0$$

gebracht. Im gegenwärtigen Falle bedeuten q und s_1 u. s. w. die Tangenten der Winkel PQ und PS_1 u. s. w.

Es lässt sich, dem Obigen analog, hieraus eine noch einfachere Gleichung von der Form [Ic] ableiten, indem man

61

$$1-\frac{q}{s_1}=1-\frac{\operatorname{tang} PQ}{\operatorname{tang} PS_1}=1-\frac{\sin PQ\cos PS_1}{\cos PQ\sin PS_1}=$$
$$=\frac{\cos PQ\sin PS_1-\sin PQ\cos PS_1}{\cos PQ\sin PS_1}=\frac{\sin(PS_1-PQ)}{\cos PQ\sin PS_1}=\frac{\sin QS_1}{\sin PS_1\cos PQ}$$

setzt und dann, nachdem auf entsprechende Weise auch statt der übrigen Grössen in obiger Gleichung (Ib) substituirt worden ist, dieselbe mit $(\cos PQ)^m$ multiplicirt, woraus sich

$$[\mathrm{Ic}] \qquad \left(\frac{\sin QS_1}{\sin PS_1}\cdots\frac{\sin QS_n}{\sin PS_n}\right)^{\cdot m}=0$$

als Gleichung der harmonischen Mitten (Q) m-ter Ordnung zwischen den sich in einer und derselben Geraden schneidenden Ebenen $S_1, \ldots S_n$ in Bezug auf die durch dieselbe Gerade gelegte Ebene P, ergiebt. Demnach lässt sich der Hauptsatz für Ebenensysteme wie folgt aussprechen:

Wenn man durch eine in einer festen Ebene P liegende bewegliche Gerade an eine feste Oberfläche n-ter Klasse die n Tangentialebenen $S_1, \ldots S_n$ legt und eine durch dieselbe Gerade gelegte Ebene Q so annimmt, dass die Summe sämmtlicher Produkte zu m Faktoren, welche sich aus Brüchen bilden lassen, deren Zähler die Sinus der Neigungswinkel zwischen einer der Tangentialebenen und der Ebene Q, und deren Nenner die Sinus der Neigungswinkel zwischen derselben Tangentialebene und der Ebene P sind, gleich Null wird: so ist der geometrische Ort der Ebene Q (d. h. die von den sämmtlichen Ebenen Q Umhüllte) eine Oberfläche m-ter Klasse; und zwar erhält man, wenn P zum Ursprung der Richtstücke gemacht wird, die Ortsgleichung für Q aus der Gleichung der gegebenen Oberfläche dadurch, dass man jedes Glied der letzteren mit einer Kombinationszahl multiplicirt, deren Elementenzahl die Ordnung dieses Gliedes zu n und deren Klassenzahl dieselbe zu m ergänzt.

Wir nennen hier wiederum die Ebenen Q die zu der gegebenen Oberfläche und der Polarebene P gehörigen harmonischen Mitten m-ter Ordnung und ihren geometrischen Ort die m-te Centrale der gegebenen Oberfläche in Bezug auf die Ebene P. Ferner ist zu bemerken, dass die Oberfläche oder vielmehr das Gebilde erster Klasse ein Punkt ist, so dass also auch der Ebene eines Punktsystems ein Punkt des Ebenensystems entspricht. Nämlich die Gleichung ersten Grades würde sein:

$$a\varphi + b\psi + c = z.$$

Setzt man hier wiederum statt φ, ψ ihre Werthe $\frac{z}{x}$, $\frac{z}{y}$, indem x, y, z 62 die durch die veränderliche Ebene von den drei Axen abgeschnittenen Stücke (die Axenabschnitte derselben) bezeichnen, so erhält man nach Division mit z die Gleichung

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 1,$$

welche bekanntlich die Relation zwischen den Richtstücken a, b, c eines Punktes und den Axenabschnitten x, y, z einer durch diesen Punkt gelegten Ebene ausdrückt. Also ist jene Gleichung ersten Grades die Gleichung eines Punktes, dessen Richtstücke a, b, c sind. Die erste Centrale ist somit ein Punkt, welchen man daher den harmonischen Mittelpunkt der Oberfläche in Bezug auf die Ebene P nennen kann. Ebenso wird ein System von n Punkten als Gebilde n-ter Klasse angesehen und die erste Centrale desselben wieder der harmonische Mittelpunkt zwischen den n Punkten in Bezug auf eine Ebene P genannt werden können. Liegt P in unendlicher Entfernung, so wird dieser Punkt, wie leicht zu sehen ist, zu dem Schwerpunkte zwischen jenen n Punkten (alle als gleich schwer betrachtet).

Es bedarf kaum einer Erwähnung, dass bei ebenen Kurven die Tangentialebene S durch eine Tangente S vertreten wird, dass hier die Richtstücke dieser veränderlichen Geraden, wenn dieselbe von den Axen (X und Y) die Stücke x und y abschneidet, x und $\psi = \frac{x}{y}$ sind, und dass für ebene Kurven bei Beobachtung dieser Bestimmungen ganz dasselbe gilt, was für die Oberflächen bewiesen wurde.

Wir gehen nun zu dem Liniensysteme im Raum über, bei welchem eine in einer festen Hauptaxe bewegliche Gerade als erzeugendes Element betrachtet wird. Man bezeichne wieder die Hauptaxe durch P, die veränderliche Gerade durch S, irgend eine andere durch P gehende Gerade, deren Lage später bestimmt werden soll, durch Q.

Die Gleichung, welche zwischen den veränderlichen Bestimmungsstücken der Geraden stattfindet, bestimmt wiederum die Oberfläche. Die Richtstücke dieser Geraden sind so zu wählen, dass wieder die Gleichungen (3) fortbestehen, für den Fall, dass die Geraden P, S, Q in der einfachsten Beziehung stehen. Als einfachste Beziehung nehmen wir die an, dass P, S und Q von demselben Punkt ausgehen und in derselben Ebene liegen. Nimmt man nun in einer gegen die Hauptaxe senk-
63 rechten Ebene, welche Hauptebene heissen † soll, zwei beliebige in der Hauptaxe Z zusammenlaufende Axen X und Y an, so lässt sich die Gerade S durch folgende drei Stücke bestimmen: erstens durch das Stück z, welches sie von der Hauptaxe abschneidet, und ferner durch die Richtstücke (x, y) des Punktes, in welchem sie die Hauptebene schneidet: diese Richtstücke nämlich in Bezug auf die Axen X und Y genommen. Die Gerade Q soll nach der angenommenen Bedingung die Hauptaxe in demselben Punkte schneiden, wie S, also auch das Stück z abschneiden; hingegen sollen die Richtstücke des Punktes, in welchem Q die Hauptebene schneidet, x' und y' sein. Da nun P, S, Q in *einer* Ebene liegen sollten, so wird x' sich zu y' wie x zu y verhalten oder $\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'}$ sein. Hingegen werden diese beiden Quotienten nicht gleich $\frac{z}{z'}$ sein; man wird also z nicht als drittes Richtstück der Geraden S annehmen können, wenn die Gleichung (3) noch fortbestehen soll. Vielmehr wird dann als drittes Richtstück

$$\frac{x}{z} = \varphi \quad \text{oder} \quad \frac{y}{z} = \psi$$

anzunehmen sein; denn bezeichnet man dann die entsprechenden Stücke für Q mit φ' und ψ', so ergiebt sich

$$\varphi' = \frac{z'}{x'}, \quad \text{also} \quad \frac{\varphi}{\varphi'} = \frac{x}{x'}, \quad \text{und ebenso} \quad \frac{\psi}{\psi'} = \frac{y}{y'}$$

und man erhält

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{\varphi}{\varphi'} = \frac{\psi}{\psi'}.$$

Nimmt man nun s wiederum als Tangente des Winkels PS und setzt ebenso $q = \text{tang}\, PQ$, so sind wiederum jene vier gleichgesetzten Ausdrücke gleich $\frac{s}{q}$ und es ist

$$[3] \qquad x = \frac{s}{q}x'; \quad y = \frac{s}{q}y'; \quad \varphi = \frac{s}{q}\varphi'; \quad \psi = \frac{s}{q}\psi'.$$

Es ist klar, dass man, da hier die Gleichungen [3] sich auf vier Veränderliche x, y, φ, ψ beziehen (welche übrigens das Verhältniss haben, dass $x:y = \varphi:\psi$), auch die Gleichung [2] der Oberfläche als Gleichung

vom n-ten Grade zwischen diesen vier Veränderlichen wird annehmen können; also die Gleichung

$$[2] \qquad \sum F_\alpha(x, y, \varphi, \psi) = 0.$$

Durch Substitution von [3] in [2] erhält man dann

$$[4] \qquad \sum s^\alpha \frac{F_\alpha(x', y', \varphi', \psi')}{q^\alpha} = 0.$$

Dann erhält man aus Gleichung (I), zu welcher wir die Form (Ib) wählen und aus [4] wiederum, da die Anzahl der Veränderlichen keinen Unterschied machen kann, dieselbe Gleichung (V), welche also lauten würde: 64

$$[5] \qquad \sum (n-\alpha)^{\cdot m-\alpha} F_\alpha(x', y', \varphi', \psi') = 0.$$

Die Gleichung (Ib) gestaltet sich, wie bei dem Ebenensystem, leicht in die Form (Ic) um, da auch hier q und s die Tangenten der Winkel PQ und PS bedeuten, und man hat auch hier:

$$\left(\frac{\sin QS_1}{\sin PS_1} \cdots \frac{\sin QS_n}{\sin PS_n}\right)^{\cdot m} = 0,$$

als Gleichung der harmonischen Mitten m-ter Ordnung Q zwischen den von *einem* Punkte ausgehenden und in *einer* Ebene liegenden Geraden $S_1, \ldots S_n$ in Bezug auf die durch denselben Punkt gehende und in derselben Ebene liegende Gerade P. Demnach wird der Hauptsatz für Liniensysteme im Raume folgendermassen lauten, wenn man nämlich die Oberfläche, welche durch eine Gleichung vom n-ten Grade zwischen x, y, φ, ψ bestimmt ist, eine Oberfläche *n-ter Reihe* nennt:

Wenn man von einem in einer festen Geraden P liegenden beweglichen Punkt in einer um dieselbe Gerade beweglichen Ebene die n Tangenten $S_1, \ldots S_n$ an eine Oberfläche n-ter Reihe zieht und eine durch denselben Punkt gehende und in derselben Ebene liegende Gerade Q so annimmt, dass die Summe sämmtlicher Produkte zu m Faktoren, welche sich aus den Quotienten der Sinusabstände jeder Tangente von der Geraden Q einerseits und der Geraden P andrerseits bilden lassen, gleich Null ist, d. h. also, dass

$$\left(\frac{\sin QS_1}{\sin PS_1} \cdots \frac{\sin QS_n}{\sin PS_n}\right)^{\cdot m} = 0$$

*ist: so ist der geometrische Ort der Geraden Q eine Oberfläche m-ter Reihe; und zwar erhält man, wenn P zum Ursprung der Richtstücke**) *gemacht ist, u. s. w.*

*) Nämlich die Hauptaxe heisst hier wieder Ursprung der Richtstücke, weil die vier Richtstücke derselben alle gleich Null sind.

Die Benennungen sind hier dieselben, wie früher, nur dass wir P die Polar*axe* nennen wollen.

Es wurden hier vier Veränderliche zu Grunde gelegt, welche unter sich eine Proportion bilden. Man kann natürlich vermittelst dieser 65 Proportion sogleich eine der vier Veränderlichen herausschaffen; doch verschwindet dann die eigenthümliche Symmetrie in den Gleichungen. Um diese etwas abnorm scheinende Coordinatenbestimmung näher zu rücken und ihre Wichtigkeit vor die Augen zu stellen, wollen wir noch folgende Beziehungen für dieselbe aufstellen:

1. *Jede Oberfläche n-ter Reihe wird von einer durch die Hauptaxe gelegten Ebene in einer Kurve n-ter Klasse geschnitten.*

Es sei in der That die Gleichung der Oberfläche n-ter Reihe

$$\sum a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c},\mathfrak{d}}\, x^{\mathfrak{a}} y^{\mathfrak{b}} \varphi^{\mathfrak{c}} \psi^{\mathfrak{d}} = 0,$$

wo $a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c},\mathfrak{d}}$ den zu den Exponenten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ gehörigen Koefficienten andeutet, der, wenn die Gleichung vom n-ten Grade sein soll, null ist, sobald $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\mathfrak{d}$ grösser als n ist. Man nehme an, dass die durch die Hauptaxe (Z) gelegte Durchschnittsebene gegen die Ebene der beiden Axen Z und X den Winkel α bildet, nenne die Strecke vom Durchschnittspunkte der drei Axen bis zu dem Punkt, in welchem eine in der Durchschnittsebene liegende, an die Oberfläche gezogene Tangente S die Hauptebene schneidet, p, und bezeichne $\frac{p}{z}$ in dem obigen Sinne durch ϖ, so hat man für S:

$$x = p \cos\alpha; \quad y = p \sin\alpha,$$

und hieraus durch Division mit z:

$$y = \varpi \cos\alpha; \quad \psi = \varpi \sin\alpha.$$

Substituirt man diese Ausdrücke in der gegebenen Gleichung, so erhält man

$$\sum a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c},\mathfrak{d}} (\cos\alpha)^{\mathfrak{a}+\mathfrak{c}} (\sin\alpha)^{\mathfrak{b}+\mathfrak{d}} p^{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}} \varpi^{\mathfrak{c}+\mathfrak{d}} = 0;$$

welches eine Gleichung vom n-ten Grade zwischen p und ϖ ist. Also ist die dadurch dargestellte Durchschnittskurve eine Kurve n-ter Klasse.

2. *Zieht man von einem Punkte der Hauptaxe an eine Oberfläche n-ter Reihe die sämmtlichen Tangenten, so bilden die Durchschnittspunkte derselben mit der Hauptebene eine Kurve n-ter Ordnung.*

Denn dann ist z konstant und kann gleich c gesetzt werden. Man substituire $\varphi = \frac{x}{c}$, $\psi = \frac{y}{c}$ in der obigen Gleichung, so erhält man

$$\sum \frac{a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c},\mathfrak{d}}}{c^{\mathfrak{c}+\mathfrak{d}}} x^{\mathfrak{a}+\mathfrak{c}} y^{\mathfrak{b}+\mathfrak{d}} = 0:$$

eine Gleichung, welche in Bezug auf x und y vom n-ten Grade ist, wenn die ursprüngliche Gleichung von diesem Grade war; es bilden also die Punkte, deren Richtstücke x und y sind, eine ebene Kurve n-ter Ordnung.

Die weitere Diskussion übergehen wir und bemerken nur noch, 66 dass das Gebilde erster Reihe, welches in der Form

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{\varphi}{\alpha} + \frac{\psi}{\beta} = 1$$

dargestellt werden kann, eine *Gerade* ist. Dies folgt unmittelbar daraus, dass, wenn man aus jedem beliebigen Punkte der Hauptaxe die sämmtlichen tangirenden Geraden an das Gebilde erster Reihe zieht, die dadurch entstehende Projektion desselben auf die Hauptebene nach dem vorher ausgesprochenen Satze jedesmal eine Linie erster Ordnung, also eine Gerade ist. Auch ergiebt sich, da jene lineare Gleichung vier Konstanten hat, dass jede Gerade im Raume in Bezug auf jedes Axensystem als Gebilde erster Reihe betrachtet werden kann. Auch ist klar, dass sich jedes System von n Geraden im Raume als Gebilde n-ter Reihe zeigt: alles Resultate, welche den für die beiden andern Richtsysteme aufgestellten ganz analog sind*).

Die Folgerungen aus dem Hauptsatze, welche in § 5, 6 und 7 für Punktsysteme entwickelt wurden, können leicht in die beiden andern Richtsysteme übertragen werden; doch wollen wir diese Uebertragung nur da andeuten, wo sie bedeutendere Abweichungen darbietet, nicht da, wo sie nur eine nach dem im Hauptsatze dargestellten Princip leicht ausführbare Uebersetzung aus der Sprache des einen Systems in die des andern enthält. Eigenthümlich gestaltet sich für Ebenensysteme insbesondere der Fall, wo die Ebene P ins Unendliche rückt, indem es nur *eine* unendlich entfernte Ebene giebt, während der Punkt P, wenn er in unendliche Entfernung rückt, unendlich viele verschiedene Richtungen darstellen kann.

Es liege also die Ebene P in unendlicher Entfernung, die Ebenen $S_1, \dots S_n$ in endlicher. Da nun $S_1, \dots S_n$ und Q die Ebene P alle in derselben Geraden schneiden sollen, welche also hier unendlich entfernt ist, so werden sie alle unter sich parallel sein. Die Bedingungsgleichung

$$\left(\frac{\sin QS_1}{\sin PS_1} \cdots \frac{\sin QS_n}{\sin PS_n}\right)^{\cdot m} = 0$$

*) Man sieht übrigens leicht, dass die Kurven doppelter Krümmung, als Gebilde n-ter Reihe, durch eine einzige Gleichung dargestellt werden; was diesem Richtsysteme ein besonderes Interesse giebt.

ist hier nicht mehr anwendbar, da alle diese Sinus vermöge des Parallelismus der Ebene verschwinden, ihr Quotient also unbestimmt wird.
67 Um † die Gleichung so zu gestalten, dass die Uebertragung für den Fall, wo P ins Unendliche rückt, ausführbar wird, denke man sich von irgend einem Punkte der Ebene S_1 zwei Lothe gefällt: eins auf die Ebene P und eins auf die Ebene Q, und bezeichne für den Augenblick diese Lothe durch PS_1 und QS_1. Dann ist offenbar

$$\frac{\sin QS_1}{\sin PS_1} = \frac{QS_1}{PS_1},$$

und indem man ebenso mit den übrigen Ebenen $S_2 \cdots S_n$ verfährt, erhält man

$$\left(\frac{QS_1}{PS_1} \cdots \frac{QS_n}{PS_n}\right)^{\cdot m} = 0;$$

welches sich für den Fall, dass P ins Unendliche rückt, in

$$(QS_1 \cdots QS_n)^{\cdot m} = 0$$

verwandelt; wie es sich schon oben (§ 6) zeigte. Für diesen Fall werden aber die Lothe $QS_1, \ldots QS_n$ alle einander parallel sein und können also als Abschnitte *einer* Geraden angesehen werden, und da jede andere durch die parallelen Ebenen gelegte Grade mit jener ähnlich getheilt sein wird, so wird die Gleichung (Ic) hier durch die Gleichung

$$(QS_1 \cdots QS_n)^{\cdot m} = 0$$

vertreten, wo QS_1 u. s. w. die gegenseitigen Abstände der Ebenen Q und und S_1 u. s. w. oder auch die Stücke bezeichnen, welche die Ebenen Q und S_1 u. s. w. aus einer beliebig hindurchgelegten Geraden herausschneiden. Hiernach würde denn für diesen Fall der allgemeine Satz folgende Gestalt annehmen:

Legt man an eine Oberfläche n-ter Klasse n unter sich parallele Tangentialebenen $S_1, \ldots S_n$ von veränderlicher Richtung, und nimmt mit ihnen parallel eine Ebene Q so an, dass die Summe sämmtlicher Produkte von m Faktoren, welche sich aus den Abständen der Ebene Q von den n Tangentialebenen bilden lassen, gleich Null ist, so umhüllt die Ebene Q eine Oberfläche m-ter Klasse.

Es heisse dieser Ort der Ebene Q, dem Princip unserer Benennung gemäss, die m-te Centrale der Oberfläche schlechthin, d. h. ohne Beziehung auf eine noch zu bestimmende Ebene. Ist insbesondere $m = 1$, also Q die Mitte zwischen $S_1, \cdots S_n$, so ist der Umhüllungsort ein Punkt, welcher schlechthin Mittelpunkt der gegebenen Oberfläche heissen

soll. Es ist dieser Mittelpunkt in Bezug auf ebene Kurven identisch mit dem, was Steiner sehr passend Krümmungsschwerpunkt derselben nennt*); wie es † sich sehr leicht ergiebt, wenn man die Tangenten an 68 zwei unendlich nahe aneinander liegende Punkte der Kurve nimmt. Zieht man nämlich die mit einer Richtung parallelen Tangenten $S_1, \dots S_n$ und die ihre Mitte bildende Linie Q, und dann die Tangenten $S_1', \dots S_n'$, welche mit einer von der vorigen unendlich wenig abweichenden Richtung parallel sind, und die ihre Mitte bildende Linie Q', so schneiden sich Q und Q' in einem Punkt, welcher die Mitte zwischen den n Punkten ist, in welchen sich die Tangenten S_1 und S_1', S_2 und S_2' u. s. w. schneiden, d. h. welcher der Schwerpunkt jener n Punkte ist; alle als gleich schwer betrachtet. Es schliessen aber diese Tangenten S_1 und S_1', S_2 und S_2' u. s. w. vermöge des angenommenen Parallelismus gleiche Winkel ein, d. h. es werden hier solche Elemente, welche gleiche Krümmung haben, gleich schwer angenommen. Da nun alle Geraden Q dieser Art sich in demselben Punkt schneiden, so ist derselbe der Schwerpunkt der Kurve unter der Voraussetzung, dass alle Elemente derselben, welche gleiche Krümmung haben, als gleich schwer betrachtet werden; d. h. er ist der Krümmungsschwerpunkt derselben. Ebenso verhält es sich bei Oberflächen, bei denen man nur statt der zwei Systeme paralleler Tangenten drei unendlich nahe aneinander liegende Systeme paralleler Tangentialebenen zu setzen hat, während die übrigen Schlüsse ganz dieselben bleiben.

Will man hier für die m-te Centrale einer Oberfläche n-ter Klasse (in Bezug auf die unendlich entfernte Ebene) die Gleichung suchen, so ergiebt sich eine merkwürdige Analogie mit der entsprechenden Aufgabe bei Punktsystemen. Wenn man nämlich dort den unendlich entfernten Punkt, wie es oben geschah, in der z-Axe annimmt, so hat man nur statt x und y überall φ und ψ zu setzen; alle Formeln bei dem Gange des Beweises bleiben dieselben. Die Gründe, aus welchen sich die verschiedenen Formeln ergeben, sind zwar hier andere, aber so einfach, dass es nicht nöthig ist, sie besonders zu entwickeln. Nur das Resultat möge noch einmal ausgesprochen werden: dass nämlich, wenn

$$\sum f_{n-\alpha}(\varphi, \psi) z^\alpha = 0$$

die Gleichung der Oberfläche ist, die ihrer m-ten Centrale (in Bezug auf die unendlich entfernte Ebene)

*) Vgl. dessen Abhandlung über den Krümmungsschwerpunkt ebener Kurven im 1. und 2. Hefte des 21. Bandes dieses Journals. [Steiners Ges. Werke, Bd. II Nr. 12, S. 97.] Dass dieser Punkt hier schlechtweg Mittelpunkt heissen soll, ist nicht willkürlich, sondern nach dem Princip unserer Benennung nothwendig.

$$\sum (n-\alpha)^{m-\alpha} f_\alpha(\varphi, \psi) z^{m-\alpha} = 0$$

69 sein wird. Ist z. B. $m = 1$, und es sind die Glieder der beiden ersten Grade in der Gleichung für die gegebene Oberfläche

$$z^n + (a\varphi + b\psi + c) z^{n-1},$$

so hat man als Gleichung für die erste Centrale derselben, also für ihren Mittelpunkt oder ihren Krümmungsschwerpunkt, die Gleichung

$$nz + a\varphi + b\psi + c = 0;$$

d. h. die Richtstücke des Krümmungsschwerpunktes sind $-\frac{a}{n}$, $-\frac{b}{n}$, $-\frac{c}{n}$. Wenn also in jener Gleichung die Glieder vom $(n-1)$-ten Grade wegfallen, so ist der Durchschnittspunkt der drei Richtaxen der Krümmungsschwerpunkt der Kurve.

Die Uebertragung der in § 5 und § 7 entwickelten Folgerungen in die beiden andern Richtsysteme bleibt dem Leser überlassen. Ich will nur noch diejenigen Folgerungen verbunden darstellen, welche dazu dienen können, den Zusammenhang der verschiedenen Richtsysteme zu übersehen.

Es wurde oben (§ 7) folgender Satz abgeleitet: Von einem Punkt in der Ebene einer Kurve n-ter Klasse lassen sich an dieselbe $n(n-1)$ Tangenten ziehen. Hier haben wir folgenden entsprechenden Satz: Eine ebene Kurve {n-ter Klasse} wird von einer durch sie gelegten Geraden in $n(n-1)$ Punkten geschnitten; und hieraus folgt der bekannte Satz: Eine Kurve n-ter Ordnung lässt sich im Allgemeinen als Kurve $n(n-1)$-ter Klasse und eine Kurve n-ter Klasse als Kurve $n(n-1)$-ter Ordnung betrachten. Für Oberflächen n-ter Ordnung fand sich, dass sich aus einer Geraden an dieselbe $n(n-1)^2$ Tangentialebenen legen lassen: also entsteht hier der entsprechende Satz, dass eine Oberfläche n-ter Klasse von einer Geraden in $n(n-1)^2$ Punkten geschnitten wird. Demnach ist auch im Allgemeinen eine Oberfläche n-ter Klasse von der Ordnung $n(n-1)^2$, und eine Oberfläche n-ter Ordnung von der Klasse $n(n-1)^2$. Eine Oberfläche zweiter Ordnung z. B. wird also auch von der zweiten Klasse sein und umgekehrt; wie dieselbe auch von zweiter Reihe ist, da ihr Durchschnitt mit jeder Ebene, wie auch ihre Tangentialprojektion auf jede Ebene, ein Kegelschnitt, d. h. eine Kurve zweiter Klasse und zugleich zweiter Ordnung ist. Im Uebrigen ist jedoch der Gegenstand für Liniensysteme im Raume nicht so einfach, wie für die beiden anderen Systeme. Wir können hier nicht die weitere Erörterung dieses Gegenstandes geben, weil dazu eine selbstständige Erörterung der Liniensysteme erforderlich sein würde, welche zu einer eigenen Abhandlung von nicht geringerem Umfange, als die gegenwärtige, an
70 wachsen würde. † Wir begnügen uns also damit, die Idee dieses Richt-

systems aufgestellt, den Hauptsatz für dasselbe abgeleitet und die daraus fliessenden Folgerungen angedeutet zu haben.

Um noch schliesslich die drei Formen, in welchen der Hauptsatz vermöge der drei Richtsysteme sich zeigte, in *einen* Wortausdruck zusammenfassen zu können, sind noch folgende Benennungen nöthig. Der Punkt, die Gerade, die Ebene sollen *einfache Gebilde* oder *Elemente* heissen; die Gerade zwischen zwei Punkten deren *Kombination;* ebenso die Durchschnittskante zweier Ebenen; zwei Geraden endlich, welche derselben Ebene angehören, haben zu ihrer Kombination diese Ebene und ihren gegenseitigen Durchschnittspunkt, beides in eins zusammen angeschaut. Ueberhaupt verstehe man unter Kombination zweier Elemente das Element, welches durch die beiden vollkommen bestimmt ist. Was unter Richtstücken eines Punktes, einer Ebene, einer Geraden verstanden wird, ist im Vorigen erörtert. Es ist nur zu erinnern, dass, dem Obigen gemäss, das Element, dessen Richtstücke alle null waren, das *Ursprungselement* heisst. Wenn nun zwischen den Richtstücken eines variabeln Elements eine Gleichung n-ten Grades stattfindet, so heisst der geometrische Ort dieses Elements *Ort n-ten Grades.* Dieser ist also, wenn das Element ein Punkt ist, ein Gebilde n-ter Ordnung; wenn eine Ebene, ein Gebilde n-ter Klasse; wenn eine Gerade, ein Gebilde n-ter Reihe. Endlich unter *Entfernungsquotient* eines Elementes S von zwei andern Q und P, deren Kombinationen mit S einander decken, wird, wenn Q und P Punkte sind, der Quotient der beiden Entfernungen QS und PS verstanden*); wenn hingegen Q und P Gerade oder Ebenen sind, der Quotient der Entfernungen irgend eines Punktes in S von den Elementen Q und P, oder, was dasselbe ist, der Quotient der beiden Sinus des Winkels QS und des Winkels PS; wobei jedesmal die erstgenannte Grösse als Dividendus zu betrachten ist. Diesen Benennungen gemäss ist nun folgender Satz die Zusammenfassung aller früheren Sätze:

Wenn ein festes Element P und ein Ort n-ten Grades eines mit P gleichartigen Elementes S gegeben sind, und man kombinirt P mit dem beweglichen Element S_1 und zugleich mit allen übrigen Elementen S, † deren Kombinationen mit P jene 71 *Kombination PS_1 decken, $S_2, \ldots S_n$, und bestimmt dann ein dieser Kombination gleichfalls angehöriges Element Q so, dass die Summe aus sämmtlichen Produkten von m Faktoren, welche*

*) D. h. also, wenn es Punkte sind, müssen alle drei, P, S, Q, in *einer* Geraden liegen; wenn Ebenen, müssen sie sich in *einer* Geraden schneiden; wenn Gerade, müssen sie in *einer* Ebene liegen und durch denselben Punkt gehen

sich aus den Entfernungsquotienten eines jeden der Elemente $S_1, \dots S_n$ *von den beiden Elementen* Q *und* P *bilden lassen, gleich Null ist: so ist der Ort des Elementes* Q *ein Ort* m*-ten Grades, welcher die auf das Element* P *bezügliche* m*-te Centrale des gegebenen Gebildes heisst; und zwar findet man, wenn* P *zum Ursprungselement gemacht ist, die Gleichung dieses Ortes aus der des gegebenen, wenn man jedes Glied des letzteren mit einer Kombinationszahl multiplicirt, deren Elementenzahl den Grad dieses Gliedes zu* n*, und deren Klassenzahl denselben zu* m *ergänzt.*

Schlussbemerkung.

Als ich den in § 2 angedeuteten Weg einer noch grösseren Verallgemeinerung verfolgte, gelangte ich zu folgendem Satze, welcher eben so einfach als allgemein und von welchem der in der vorhergehenden Abhandlung vorgelegte Hauptsatz wiederum nur ein specieller Fall ist. Da vielleicht dieser Satz einiges Interesse haben möchte, so will ich ihn hier wenigstens aufstellen und seinen Beweis geben, ohne auf die daraus etwa hervorgehenden Folgerungen einzugehen. Nämlich:

Zieht man aus einem festen Punkt P *an eine feste Oberfläche* n*-ter Ordnung eine bewegliche Gerade, welche die Oberfläche in den Punkten* $S_1, \dots S_n$ *schneidet, und bestimmt auf ihr einen Punkt* Q *so, dass der Gleichung*

$$\text{(A)} \qquad \sum \left(\frac{QS_1}{PS_1} \cdots \frac{QS_n}{PS_n}\right)^{\cdot \mathfrak{a}} \left(\frac{QS_1}{PS_1} \cdots \frac{QS_n}{PS_n}\right)^{\cdot \mathfrak{b}} \cdots = 0,$$

unter der Bedingung, dass die Summe der Werthe $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \dots$ *konstant und gleich* m *ist, genügt wird: so ist der geometrische Ort des Punktes* Q *eine Oberfläche* m*-ter Ordnung; und zwar erhält man, wenn für den Axendurchschnittspunkt* P *die Gleichung der gegebenen Oberfläche*

$$\text{(B)} \qquad \sum F_{\mathfrak{a}}(x, y, z) = 0$$

ist, als Ortsgleichung des Punktes Q

$$\text{(C)} \qquad \sum (rn - \mathfrak{r})^{\cdot m - \mathfrak{r}} F_{\mathfrak{a}}(x, y, z) F_{\mathfrak{b}}(x, y, z) \cdots = 0,$$

wo $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \cdots$ *der Kürze wegen mit* $\mathfrak{r}$ *bezeichnet ist und wo* r 72 *die † Anzahl der Faktoren, d. h. also auch die Anzahl der Grössen* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \dots$ *sowohl in dieser als in der ersten Gleichung* (A) *bezeichnet.*

Man kann nämlich die Gleichung (A) zunächst nach § 4 dadurch umwandeln, dass man $\left(1-\frac{q}{s_1}\right)$ statt $\frac{QS_1}{PS_1}$ setzt u. s. w., und dann statt irgend einer, z. B. der r-ten Kombinationsklasse aus den Elementen $\left(1-\frac{q}{s_1}\right)\cdots\left(1-\frac{q}{s_n}\right)$, den oben (§ 4) gefundenen Werth, nämlich

$$\sum(-1)^{\mathfrak{a}}(n-\mathfrak{a})^{\cdot r-\mathfrak{a}}\left(\frac{1}{s_1}\cdots\frac{1}{s_n}\right)^{\cdot\mathfrak{a}} q^{\mathfrak{a}}$$

oder

$$\sum(-1)^{\mathfrak{a}}(n-\mathfrak{a})^{\cdot r-\mathfrak{a}}\frac{(s_1\cdots s_n)^{\cdot n-\mathfrak{a}}}{(s_1\cdots s_n)^{\cdot n}}q^{\mathfrak{a}}$$

substituirt. Nun entwickelt man aus (B), dem Früheren ganz analog, die Gleichung

$$\sum s^{\mathfrak{a}}\frac{F_{\mathfrak{a}}(x,y,z)}{q^{\mathfrak{a}}}=0,$$

deren n Wurzeln eben die vorher durch $s_1, \cdots s_n$ bezeichneten Grössen sind und deren Koefficienten man statt der Kombinationsklassen dieser Wurzeln einführen kann, nämlich

$$(-1)^{\mathfrak{a}}\frac{(s_1\cdots s_n)^{\cdot n-\mathfrak{a}}}{(s_1\cdots s_n)^{\cdot n}}=\frac{F_{\mathfrak{a}}(x,y,z)}{q^{\mathfrak{a}}F_0(x,y,z)}.\text{*)}$$

Dies in den obigen Ausdruck für die r-te Kombinationsklasse gesetzt, giebt für dieselbe

$$\sum(n-\mathfrak{a})^{\cdot r-\mathfrak{a}}\frac{F_{\mathfrak{a}}(x,y,z)}{F_0(x,y,z)}.$$

Wenn man diesen Ausdruck für die Kombinationsklassen in (A) substituirt und dabei nur alle die deutschen Buchstaben, welche Verschiedenes ausdrücken, auch verschieden bezeichnet, so erhält man, nach Multiplikation mit $F_0(x,y,z)^m$, die Gleichung

$$\sum(n-\mathfrak{a})^{\cdot\mathfrak{a}'-\mathfrak{a}}(n-\mathfrak{b})^{\cdot\mathfrak{b}'-\mathfrak{b}}\cdots F_{\mathfrak{a}}(x,y,z)\,F_{\mathfrak{b}}(x,y,z)\cdots=0,$$

mit der Bedingungsgleichung

$$\mathfrak{a}'+\mathfrak{b}'+\cdots=m,$$

oder auch

$$\sum A_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\ldots}F_{\mathfrak{a}}(x,y,z)\,F_{\mathfrak{b}}(x,y,z)\cdots=0,$$

wo nämlich der Koefficient $A_{a,b\ldots}$ (indem man für $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\cdots$ irgend eine Reihe bestimmter Werthe a, b, $\cdots$ gesetzt hat) folgende Summe

---

*) Da keine Verwechselung zu befürchten ist, so sind die Unterscheidungsstriche über x, y, z weggelassen.

$$A_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\dots} = \sum (n-a)^{\cdot \mathfrak{a}'-a} (n-b)^{\cdot \mathfrak{b}'-b} \cdots,$$

73 mit der Bedingungsgleichung $\mathfrak{a}' + \mathfrak{b}' + \cdots = m$ darstellt. Um diese Summe zu finden, wende man folgendes Summationsgesetz an:

$$\sum \alpha^{\cdot \mathfrak{a}} . \beta^{\cdot \mathfrak{b}} \dots = (\alpha + \beta + \cdots)^{\cdot m} \qquad [\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \cdots = m],$$

welches Gültigkeit hat, sowohl wenn $\alpha, \beta, \dots$ Zahlen, also $\alpha^{\cdot \mathfrak{a}}, \beta^{\cdot \mathfrak{b}}, \dots$ Kombinationszahlen, als auch, wenn $\alpha, \beta, \dots$ verschiedene Elementenreihen, also $\alpha^{\cdot \mathfrak{a}}, \beta^{\cdot \mathfrak{b}}, \dots$ wirkliche Kombinationsklassen sind, das Produkt derselben aber die Verbindungen von jeder Kombination der einen Klasse mit jeder der andern darstellt. Denkt man sich das Letztere, so zeigt sich sogleich die Richtigkeit des Gesetzes aus dem Begriff der Kombination; folglich gilt es auch für die Kombinationszahlen. Hiernach ist nun:

$$A_{a,b,\dots} \quad \text{oder} \quad \sum_{[\mathfrak{a}' + \mathfrak{b}' + \cdots = m]} (n-a)^{\cdot \mathfrak{a}'-a} (n-b)^{\cdot \mathfrak{b}'-b} \cdots = (rn - a - b - \cdots)^{\cdot m-a-b-\cdots}.$$

Substituirt man diesen Ausdruck für $A_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\dots}$ in die obige Gleichung, so erhält man

$$\sum (rn - \mathfrak{a} - \mathfrak{b} - \cdots)^{\cdot m-\mathfrak{a}-\mathfrak{b}-\cdots} F_{\mathfrak{a}}(x,y,z) \cdot F_{\mathfrak{b}}(x,y,z) \cdots;$$

was die zu erweisende Gleichung (C) ist.

Es ist klar, dass sich dieser Satz für $r = 1$ in den oben dargestellten Hauptsatz verwandelt. Die Gleichung (A) wird nämlich dann

$$\left(\frac{QS_1}{PS_1} \cdots \frac{QS_n}{PS_n}\right)^{\cdot m} = 0,$$

und die Gleichung (C) wird:

$$\sum (n - \mathfrak{a})^{\cdot m-\mathfrak{a}} F_{\mathfrak{a}}(x,y,z) = 0;$$

welche Gleichungen mit den früher entwickelten (Ic und V) identisch sind.

II.

Grundzüge zu einer rein geometrischen Theorie der Kurven, mit Anwendung einer rein geometrischen Analyse.

Von

H. Grassmann,

Lehrer der Mathematik zu Stettin.

Crelles Journal Bd. 31, Heft II, S. 111—132 (1846).

§ 1.

Hauptsatz über die Erzeugung algebraischer Punktgebilde.

Durch Anwendung einer neuen Analyse, welche ich in einem unlängst erschienenen Werke*) in ihren Grundzügen dargestellt habe, bin ich zu einer neuen Theorie der algebraischen Kurven und Oberflächen gelangt, welche sich von allen bisherigen Theorien über diesen Gegenstand dadurch unterscheidet, dass sie alle algebraischen Kurven und Oberflächen auf rein geometrische Weise behandelt, in demselben Umfange, wie solche Behandlung den Kegelschnitten zu Theil geworden ist. Versucht man das Princip der projectivischen Erzeugung, welches Steiner mit so glänzendem Erfolge auf die Behandlung der Kegelschnitte angewandt hat, auch auf Kurven höherer Ordnungen auszudehnen, so gelangt man nur zu besondern Kurvengattungen, nämlich zu denjenigen, welche Möbius in seinem barycentrischen Calcul behandelt hat und welche, wenn sie von n-ter Ordnung sind, im Allgemeinen durch $3n - 1$ Punkte bestimmt werden, während die allgemeinen Kurven n-ter Ordnung bekanntlich $\frac{1}{2} n(n + 3)$ Punkte zu ihrer

*) Die Ausdehnungslehre, erster Theil; enthaltend die lineale Ausdehnungslehre. Leipzig 1844. {Ges. Werke I, 1.}

Bestimmung erfordern*). Jene Kurven haben das Eigenthümliche, dass sie sich durch blosses Ziehen von geraden Linien konstruiren lassen**). Da nun diese konstruirbaren Kurven, wenn sie von dritter Ordnung sind, durch 3 . 3 — 1, das heisst durch 8, hingegen die allgemeinen Kurven dritter Ordnung durch 9 Punkte bestimmt werden, während die Kurven zweiter Ordnung beiderseits durch 5 Punkte bestimmt sind, so sieht man, wie die projektivische Erzeugung zwar 112 zur allgemeinen Behandlung der Kurven zweiter † Ordnung, aber keineswegs zu der allgemeinen Behandlung der Kurven höherer Ordnungen ausreicht. Diesem Mangel soll die neue Theorie abhelfen, indem sie auch diejenigen algebraischen Kurven einer rein geometrischen Behandlung zugänglich macht, welche sich nicht durch blosses Ziehen von geraden Linien erzeugen lassen. Der Hauptsatz, auf welchen ich die Theorie gründe, findet sich schon in meiner Ausdehnungslehre (§ 145 bis 148, {Ges. Werke I, 1. S. 245—249}), ohne dass ich jedoch dort hätte Raum finden können, um über die Fruchtbarkeit dieses Satzes mehr als blosse Andeutungen zu geben. Um indess nicht zu weitläuftig zu werden, will ich mich hier nur auf Kurven in der *Ebene* beschränken.

Der Satz, dessen Beweis ich weiter unten geben werde, ist folgender:

*Hauptsatz: Wenn die Lage eines beweglichen Punktes x in der Ebene dadurch beschränkt ist, dass ein Punkt und eine Gerade, welche durch Konstruktionen vermittels des Lineals aus jenem Punkte x und einer Reihe fester Punkte und Geraden hervorgehen, zusammenliegen sollen (das heisst der Punkt in der Geraden liegen soll), so beschreibt der Punkt x ein algebraisches Punktgebilde, und zwar vom n-ten Grade, wenn bei jenen Konstruktionen der bewegliche Punkt n-mal angewandt ist****).

Wenn man nämlich den Punkt x mit einem festen Punkte durch eine Gerade verbindet, so wird man sagen müssen, dass der Punkt x zur Konstruktion dieser Geraden einmal angewandt sei; wenn ferner

---

*) Ich werde in dieser Abhandlung auf diese besondern Kurven, auf ihre projektivische Erzeugung oder ihre Erzeugung durch Ziehen von geraden Linien, zurückkommen.

**) Vergl. Möbius barycentr. Calcul § 69 und 70.

***) Ich nenne ein Punktgebilde n-ten Grades ein solches, welches durch eine Gleichung n-ten Grades zwischen den Koordinaten des veränderlichen Punktes dargestellt ist. Die Ausdrücke Kurve oder Linie n-ter Ordnung, und selbst der Ausdruck geometrischer Ort n-ten Grades, lassen nicht diese allgemeine Auffassung zu.

ein Punkt als Durchschnitt zweier Geraden erzeugt ist, zu deren Konstruktion der Punkt x beziehlich α-mal und β-mal angewandt ist, so wird man sagen müssen, dass zur Konstruktion dieses Punktes der Punkt x $(\alpha + \beta)$-mal angewandt sei; ebenso wenn ein Punkt, zu dessen Konstruktion der Punkt x α-mal, und ein Punkt, zu dessen Konstruktion er β-mal angewandt ist, durch eine Gerade verbunden sind, so wird zu der Konstruktion dieser Geraden der Punkt x $(\alpha + \beta)$-mal angewandt sein; und endlich, wenn die Bedingung, durch welche nach dem angeführten Satze die Lage von x beschränkt wird, von der Art ist, dass ein Punkt, zu dessen Konstruktion x α-mal angewandt ist, in einer Geraden liegen soll, zu deren Konstruktion x β-mal angewandt ist, so wird man sagen müssen, dass der Punkt x im Ganzen $(\alpha + \beta)$-mal angewandt sei, und der Satz sagt aus, dass dann x ein Gebilde $(\alpha + \beta)$-ten Grades konstruire. Es seien zum Beispiel (Fig. 1) † a, c, e feste Punkte, B und D feste Gerade; man verbinde den Durchschnittspunkt der beiden Geraden xa und B mit dem Durchschnittspunkte der beiden Geraden xe und D durch eine gerade Linie und setze die Bedingung fest, dass diese gerade Linie durch den Punkt c gehen soll, so sieht man, dass bei diesen Konstruktionen x zweimal angewandt wird, also dass nach dem Satze x ein Gebilde zweiten Grades, das heisst einen Kegelschnitt, konstruiren müsste, oder mit andern Worten, dass eine Ecke (x) eines Dreiecks, dessen zwei andere Ecken in festen Geraden B und D und dessen Seiten um feste Punkte a, c, e sich bewegen, einen Kegelschnitt beschreiben müsste, was bekanntlich der Fall ist.

113

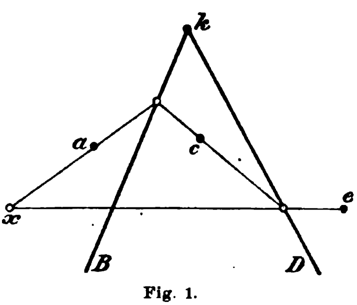


Fig. 1.

§ 2.

Multiplikationsbegriff.

Ich werde den allgemeinen Satz, dessen reciproke Umwandlung sich übrigens leicht von selbst ergiebt, ableiten, ohne eine Kenntniss der in meiner Ausdehnungslehre niedergelegten Resultate vorauszusetzen. Da derselbe jedoch durch die in jener Schrift entwickelte neue Analyse aufgefunden ist und sich eng an sie anschliesst, so werde ich diejenigen Verknüpfungsweisen aus jener Analyse, welche für die Auffassung und Anwendung des Satzes nothwendig scheinen, hier aufführen. Dadurch erreiche ich zugleich den Zweck, die Fruchtbarkeit

der Analyse, welche, wie ich hoffen darf, eine durchgängige Umgestaltung der Geometrie und aller auf sie gestützten Wissenschaften (Statik, Mechanik, Optik etc.) herbeiführen wird, an einem einzelnen Beispiele zur Anschauung zu bringen. Das Eigenthümliche jener Analyse ist, dass die räumlichen Gegenstände (Punkte, Linien, Ebenen etc.) nicht bloss vermittels irgend eines Maasses in Zahlen ausgedrückt und ihrer Lage nach durch Koordinaten bestimmt werden, sondern dass die räumlichen Gegenstände selbst zugleich ihrem metrischen Werthe und ihrer Lage nach aufgefasst und so als räumliche Grössen analytischen Verknüpfungen unterworfen werden*).

An jeder räumlichen Grösse erscheint dabei ein Zwiefaches: erstens der metrische Werth derselben (die Länge einer Linie, der Flächen-114raum einer Figur etc.) und zweitens die † Stellung derselben im Raume (die Lage der Linie oder Ebene, die Richtung der Linie etc.). Der metrische Werth ist zu dem Begriff der *Grösse* ebenso unumgänglich nöthig wie der der Stellung im Raume zu dem Begriffe der *räumlichen* Grösse. Daher erscheinen die Punkte nur dann als Grössen, wenn an ihnen zugleich gewisse Koefficienten haften, welche den metrischen Werth darstellen. Diese Koefficienten, die natürlich auch der Einheit gleich werden können, sind auch für Anwendungen auf die Natur (indem sie Gewichte oder andere Intensitäten darstellen) von wesentlicher Bedeutung. Die Verknüpfungen dieser räumlichen Grössen, wie sie in der neuen Analyse hervortreten, entsprechen nun den algebraischen Verknüpfungen (der Addition, Multiplikation, dem Potenziren und den zugehörigen aufhebenden Verknüpfungsweisen) und unterliegen denselben *allgemeinen* Verknüpfungsgesetzen; zugleich aber gehen sie den geometrischen Konstruktionen in der Art zur Seite, dass jede geo-

---

*) Der Erste, welcher eine ähnliche Idee aufgefasst hat, scheint *Leibniz* gewesen zu sein, welcher (s. *Hugenii aliorumque excercitationes math. et phil. ed. Uylenbroek fasc. II. p. 6*) die Wichtigkeit einer rein geometrischen Analyse (wie er sie auch nennt) vollkommen erkannte {vgl. Ges. Werke I, 1. S. 416}; aber die geometrisch analytische Methode, welche er befolgt, besteht nur darin, dass er unbekannte Punkte als solche bezeichnet, ohne die analytischen Verknüpfungen, welchen diese Punkte unterworfen sind, auszudrücken. Der Erste, welcher wirklich räumliche Grössen analytischen Verknüpfungen unterwarf, war *Möbius*, indem er in seinem barycentrischen Calcul Punkte addiren lehrte. Späterhin hat *Möbius* in seiner Mechanik des Himmels (Leipzig 1843) und in einer Abhandlung in gegenwärtigem Journal (Band XXVIII) auch die Addition gerader Linien und Ebenen behandelt. Ganz unabhängig von ihm ist die Analyse entstanden, welche ich in meiner Ausdehnungslehre dargelegt habe und von welcher ich hier Proben mittheile, obgleich mich der Gang meiner Untersuchungen zu denselben Additionsweisen geführt hatte.

metrische Konstruktion durch eine analytische Verknüpfung ausgedrückt und diese durch jene dargestellt wird.

Zu dem hier vorliegenden Zwecke genügt es, den Multiplikationsbegriff aufzustellen, und auch dieser braucht hier nur theilweise und nur ohne Rücksicht auf den besondern metrischen Werth der verknüpften Faktoren und des entstehenden Produkts aufgefasst zu werden. Denn ich werde hier nur solche Gleichungen betrachten, in welchen ein Produkt räumlicher Grössen gleich Null gesetzt wird; wobei offenbar die besondern metrischen Werthe der einzelnen Faktoren und ihrer Produkte gleichgültig sind, wenn nur feststeht, ob sie Null sind oder nicht. Wollte ich jene Beschränkung nicht machen, so würden sich bald die festzustellenden Begriffe so häufen, dass das vorgesteckte Ziel verfehlt werden würde. Ich verstehe, abgesehen von den besondern metrischen Werthen und vorausgesetzt, dass Alles in derselben Ebene liege,

(Definition 1.) 1. unter dem Produkte ab zweier verschiedener Punkte a und b die durch sie hindurchgelegte gerade Linie ab;

(Definition 2.) 2. unter dem Produkte AB zweier verschiedener gerader Linien A und B ihren Durchschnittspunkt*);

(Definition 3.) 3. unter dem Produkte Ab oder bA einer Linie A in einen Punkt b, der nicht in ihr liegt, verstehe ich einen Flächenraum, welcher, † mit einer andern Grösse multiplicirt, nur dann Null 115 giebt, wenn diese andere Grösse selbst Null ist**);

und ich setze diese Produkte dann und nur dann Null, wenn die Faktoren zusammenliegen, das heisst:

(Definition 1.) 1. wenn die Punkte a und b zusammenfallen;

(Definition 2.) 2. wenn die geraden Linien A und B (als unendliche gedacht) zusammenfallen,

(Definition 3.) 3. wenn der Punkt b in die Gerade A (diese als unendlich gedacht) fällt; und indem ich diese Produkte Null setze, will ich damit zugleich ausdrücken, dass sie, mit irgend einer beliebigen Grösse multiplicirt, das so entstehende Produkt gleich Null machen***).

*) Ich werde in dieser Abhandlung die Punkte mit kleinen lateinischen, die Linien mit grossen lateinischen und die Zahlgrössen im Allgemeinen mit griechischen oder kleinen deutschen Buchstaben bezeichnen; nur die Buchstaben m und n werde ich auch für Zahlgrössen gebrauchen.

**) Es stellt nämlich ein solches Produkt bloss einen metrischen Werth dar; die Besonderheit dieses Werthes ist hier gleichgültig; es kommt nur darauf an, wann ein Produkt, welches diesen Werth als Faktor enthält, Null wird; und in dieser Beziehung verhält sich jener metrische Werth wie eine Zahlgrösse, die nicht Null ist; worin dann die im Texte angegebene Bestimmung liegt.

***) Hierbei ist festzuhalten, dass der Ausdruck $\frac{1}{0}$ nie als Grösse verstanden werden darf, sondern als blosse Grenzform. Hält man dies *nicht* fest, so ver-

Die genauere Bestimmung dieser drei Multiplikationsarten, in welcher auch die metrischen Werthe berücksichtigt sind, habe ich in meiner oben angeführten Schrift gegeben und dort zugleich diese Verknüpfungsarten auf streng wissenschaftlichem Wege als Multiplikationsarten nachgewiesen. Doch hoffe ich auch, dass die in dieser Abhandlung sich ergebenden Resultate schon hinreichen werden, um die Auffassung jener Verknüpfungsweisen, als multiplikativer, wenigstens zweckmässig erscheinen zu lassen.

Da bei den hier zu betrachtenden Produkten aus mehreren Faktoren, wie ich hernach zeigen werde, die Ordnung der Faktoren und die Art, wie sie zu besondern Produkten verbunden sind, nicht gleichgültig ist, so halte ich stets fest, dass, wenn die Faktoren eines Produktes durch keine Klammern zusammengefasst sind, die Multiplikation stets von der Linken zur Rechten fortschreiten soll, d. h. also der erste (am weitesten links stehende) Faktor mit dem zweiten multiplicirt werden soll, das so gewonnene Produkt mit dem dritten und so fort bis zum letzten (am weitesten rechts stehenden) Faktor hin. Man betrachte beispielsweise das Produkt $abCdEf$, so drückt dasselbe eine Linie aus, welche dadurch konstruirt wird, dass (Fig. 2) der Punkt a mit b geradlinig verbunden wird; der Durchschnitt dieser Verbindungslinie und der Linie C mit dem Punkte d und

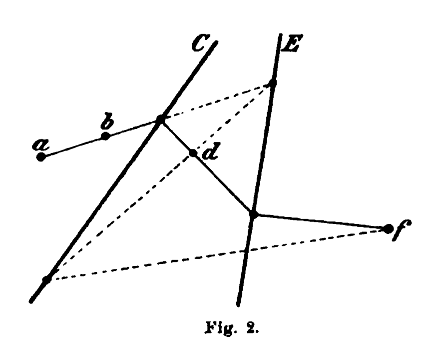


Fig. 2.

116 der Durchschnitt dieser Verbindungslinie † und der Linie E mit dem Punkte f verbunden wird; dann wird die zuletzt gezogene Verbindungslinie durch das Produkt $abCdEf$ dargestellt. Es leuchtet ein, dass man zwar die zu einer geraden Linie verbundenen Punkte (hier a und b) oder die in einem Punkte sich schneidenden Linien als Faktoren vertauschen kann, ohne das resultirende Gebilde (abgesehen von seinem metrischen Werthe) zu ändern, aber dass man sonst im Allgemeinen keine Vertauschungen vornehmen darf, ohne Aenderung des Ergebnisses: denn wird z. B. C und E vertauscht, so liefert die Konstruktion eine ganz andere Linie, wie man sogleich aus der Figur sieht, in welcher die Konstruktion, durch welche das Produkt $abEdCf$ erfolgt, durch punktirte Linien angedeutet ist.

---

schwindet die Allgemeingültigkeit der meisten algebraischen Sätze. Hingegen kann das Imaginäre allerdings als Grösse genommen werden, indem es denselben Verknüpfungsgesetzen unterliegt wie alle Grössen.

§ 3.

Beweis des Hauptsatzes.

Bezeichnet x einen beweglichen Punkt, X eine bewegliche Gerade, so ist

(1) $$Ax = 0 \quad \text{oder} \quad abx = 0$$

die Gleichung einer geraden Linie, indem sie nach der Definition 3 ausdrückt, dass der Punkt x in der geraden Linie A oder ab liegt;

(2) $$aX = 0 \quad \text{oder} \quad ABX = 0,$$

ist die Gleichung eines Punktes als eines von der beweglichen Geraden X umhüllten Gebildes, indem sie nach derselben Definition ausdrückt, dass die Gerade X durch den Punkt a oder durch den Durchschnitt der geraden Linien A und B geht. Hiernach wird also sowohl das Punktgebilde ersten Grades als auch das Liniengebilde ersten Grades durch eine geometrische Gleichung ersten Grades ausgedrückt.

Für die Gebilde, die ein Punkt beschreibt, dessen Bewegung auf die in dem oben aufgestellten Satze angegebene Weise beschränkt ist, lässt sich gleichfalls in jedem besondern Falle die Gleichung leicht aufstellen. Denn es sei A_x irgend eine gerade Linie, welche durch lineale Konstruktionen (d. h. durch Konstruktionen vermittels des Lineals) aus x und gewissen festen Punkten und Geraden hervorgeht, und es sei x bei diesen Konstruktionen α-mal angewandt, so wird A_x als ein geometrisches Produkt erscheinen, in welchem x α-mal als Faktor vorkommt; und ebenso, wenn b_x ein Punkt ist, welcher gleichfalls durch lineale Konstruktionen aus x und gewissen festen Punkten und Geraden hervorgeht, und x dabei β-mal angewandt ist, so wird b_x als geometrisches Produkt erscheinen, in welchem x β-mal als Faktor erscheint. Die Bedingung, dass der Punkt b_x in der Geraden A_x liegen soll, wird dann dargestellt durch die Gleichung

(3) $$A_x \,.\, b_x = 0,$$

auf deren linker Seite x $(\alpha + \beta)$-mal als Faktor vorkommt. Der Satz sagt dann aus, dass das von x konstruirte Gebilde vom Grade $\alpha + \beta$ ist.

Es bleibt uns somit nur zu beweisen, dass, wenn eine geometrische Gleichung von der Form (3), als *geometrische*, vom n-ten Grade ist, das heisst x n-mal als Faktor darin vorkommt, dann das von ihm konstruirte Gebilde gleichfalls vom n-ten Grade ist, das heisst, dass dann die *algebraische* Gleichung zwischen den Koordinaten von x gleichfalls vom n-ten Grade sei. 117

Um dies zu beweisen, nehme ich zwei feste Richtaxen (Koordinatenaxen) A und B an, gleichviel, ob rechtwinklige oder schiefwinklige,

und ein Maass, durch welches die Koordinaten gemessen werden*). Wenn man nun nach diesem Richtsysteme (Koordinatensysteme) die Koordinaten eines Punktes bestimmt und durch das angenommene Maass misst, so nenne ich die Quotienten dieser Messung, nebst der Zahl Eins, oder irgend drei Zahlen, welche diesen dreien proportional sind, die drei *Zeiger* des Punktes**). Sind nun φ', ψ', 1 in diesem Sinne die Zeiger eines Punktes, so müssen, wenn der Punkt in einer festen Geraden liegen soll, die Zeiger, wie bekannt, einer Gleichung von der Form

$$\alpha\varphi' + \beta\psi' + \gamma = 0 \tag{4}$$

genügen. Wir nennen hier α, β, γ die Zeiger der durch diese Gleichung dargestellten geraden Linie. Ueberhaupt wird, wenn zwischen φ' und ψ' eine Gleichung n-ten Grades stattfindet, der Ort des Punkts, dessen Zeiger φ', ψ', 1 sind, ein Gebilde n-ten Grades sein. Wird $\varphi' = \varphi:\chi$ und $\psi' = \psi:\chi$ gesetzt und die Gleichung mit χ^n multiplicirt, so erhält man eine homogene Gleichung n-ten Grades zwischen den veränderlichen Zeigern φ, ψ, χ (welche mit φ', ψ', 1 proportional sind), das heisst eine Gleichung, deren Glieder in Bezug auf diese drei Veränderlichen alle vom n-ten Grade sind, und wir können somit und wollen das Punktgebilde n-ten Grades als ein solches definiren, für welches die Zeiger des konstruirenden Punkts einer homogenen Gleichung n-ten Grades genügen. Die Gleichung (4) geht dann über in

$$\alpha\varphi + \beta\psi + \gamma\chi = 0, \tag{5}$$

welche ausdrückt, dass der Punkt, dessen Zeiger φ, ψ, χ sind, in der 118 Geraden † liege, deren Zeiger α, β, γ sind.

Ebenso können wir als Liniengebilde n-ten Grades solche Gebilde definiren, für welche die Zeiger der umhüllenden geraden Linie einer homogenen Gleichung n-ten Grades genügen. So zum Beispiel wird die Gleichung (5), wenn φ, ψ, χ konstant und α, β, γ variabel sind, ein Liniengebilde ersten Grades darstellen, und man sieht, dass dasselbe,

---

*) Man kann auf jeder Richtaxe ein eignes Maass annehmen, durch welches die ihr angehörigen Koordinaten gemessen werden; und die den beiden Richtaxen angehörigen Maasse können verschieden sein (s. meine Ausdehnungslehre § 87 und 89 {Ges. Werke I, 1, S. 151—152}). Der Einfachheit wegen nehme ich jedoch beide Maasse als gleich an, wie es gewöhnlich geschieht.

**) Wenn man unter Koordinaten bald Linien, bald Zahlen (die Quotienten der im Texte angegebenen Messungen) versteht, so kann dies nur Verwirrung hervorbringen, weshalb ich mich gezwungen sah, hier einen neuen Namen (Zeiger) einzuführen; weshalb ich aber drei Zeiger eines Punktes annehme, dafür ist der Grund in meiner Ausdehnungslehre § 116 und 117 {a. a. O. I, 1, S. 191—193} zu finden.

wie gehörig, einen von der veränderlichen Linie umhüllten festen Punkt darstellt; nämlich den Punkt, dessen Zeiger φ, ψ, χ sind.

Um nun zu dem Beweise des obigen Satzes zu gelangen, kommt es zunächst darauf an, zwei Aufgaben zu lösen, nämlich die Aufgaben: „aus den Zeigern zweier Punkte diejenigen der hindurchgelegten geraden Linie" und „aus denen zweier gerader Linien diejenigen ihres Durchschnittspunktes zu finden". Die Zeiger der beiden Punkte in der ersten Aufgabe seien $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$, die gesuchten Zeiger der Verbindungslinie seien α, β, γ: so erhält man aus der Gleichung (5) die beiden Gleichungen

$$(6) \qquad \begin{cases} \mathfrak{a}\alpha + \mathfrak{b}\beta + \mathfrak{c}\gamma = 0 \text{ und} \\ \mathfrak{a}'\alpha + \mathfrak{b}'\beta + \mathfrak{c}'\gamma = 0, \end{cases}$$

durch welche die Verhältnisse der Zeiger α, β, γ bestimmt sind; nämlich es findet sich

$$(7) \qquad \alpha:\beta:\gamma = (\mathfrak{b}\mathfrak{c}' - \mathfrak{b}'\mathfrak{c}):(\mathfrak{c}\mathfrak{a}' - \mathfrak{c}'\mathfrak{a}):(\mathfrak{a}\mathfrak{b}' - \mathfrak{a}'\mathfrak{b}).$$

Hiermit ist zugleich die andere Aufgabe gelöset, nämlich: wenn $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$ die Zeiger zweier gerader Linien und α, β, γ die ihres Durchschnittspunkts sind, so findet man genau auf dieselbe Weise für α, β, γ dieselben Ausdrücke (7). Sind nun $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ homogene Funktionen m-ten Grades von drei Veränderlichen φ, ψ, χ und $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$ homogene Funktionen n-ten Grades von denselben Veränderlichen, so sieht man, dass die Ausdrücke für α, β, γ in (7) homogene Funktionen $(m+n)$-ten Grades von denselben Veränderlichen sind. Daraus folgt, dass, wenn in einem Produkte räumlicher Grössen, in welchem nur die beiden ersten Multiplikationsarten vorkommen, nämlich die Multiplikation zweier Punkte und die zweier Linien, die Zeiger einer jeden veränderlichen Grösse homogene Funktionen dreier Veränderlichen φ, ψ, χ sind, das entstehende Produkt gleichfalls zu Zeigern homogene Funktionen derselben Veränderlichen hat, und dass der Grad dieser Funktionen die Summe aus den Graden der einzelnen Funktionen ist, welche die Zeiger der in dem Produkte vorkommenden Faktoren ausmachen. Wenn namentlich nur eine Veränderliche x vorkommt, deren drei Zeiger φ, ψ, χ selbst sind, so wird ein räumliches Produkt A_x, welches x α-mal als Faktor und ausserdem nur konstante Faktoren enthält, homogene Funktionen α-ten Grades von φ, ψ, χ zu Zeigern haben; und † ebenso wird b_x in der Formel (3) homogene Funktionen 119 β-ten Grades von φ, ψ, χ zu Zeigern haben. Dasselbe würde auch gelten, wenn statt des Punktes x eine Gerade X gesetzt würde. Die Bedingung nun, dass der Punkt b_x in der Geraden A_x liegen soll,

wird, wenn $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ die Zeiger von b_x sind und $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$ die von A_x, nach der Gleichung (5) durch die Gleichung

$$(8) \qquad \mathfrak{a}\mathfrak{a}' + \mathfrak{b}\mathfrak{b}' + \mathfrak{c}\mathfrak{c}' = 0$$

dargestellt, und es ist klar, dass, wenn $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ homogene Funktionen vom Grade α und $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$ homogene vom Grade β sind, wie wir gezeigt haben, dann die Gleichung (8) eine homogene Gleichung vom Grade $(\alpha + \beta)$ ist, also das dadurch dargestellte Gebilde ein Gebilde vom $(\alpha + \beta)$-ten Grade. Der Grad der Gleichung könnte sich nur dadurch vermindern, dass sämtliche Koefficienten Null würden; dann würde derselben durch beliebige Werthe von φ, ψ, χ, das heisst durch jeden Punkt genügt und somit die Bewegung des Punktes durch die hinzugefügte Bedingung gar nicht beschränkt; was der in dem Satze gemachten Voraussetzung entgegen ist.

Damit ist denn der obige Satz bewiesen. Auch sieht man, dass, wenn man statt des Punktes x eine Linie X setzt, in dem Beweise nichts geändert wird; und somit ist der Satz zugleich in seiner reciproken Form bewiesen, in welcher wir ihn hier noch einmal aufstellen wollen; nämlich:

Wenn die Lage einer beweglichen Geraden X in der Ebene dadurch beschränkt ist, dass ein Punkt und eine Gerade, welche durch Konstruktionen vermittels des Lineals aus jener Geraden X und einer Reihe fester Punkte und Geraden hervorgehen, zusammenliegen sollen (d. h. der Punkt in der Geraden liegen soll), so umhüllt die Gerade X ein algebraisches Liniengebilde, und zwar n-ten Grades, wenn bei jenen Konstruktionen die bewegliche Gerade n-mal angewandt ist.

Dass diese Sätze hier in so bestimmter Form ausgesprochen werden durften, ohne zu solchen, in der Mathematik viel zu häufig angewandten Zugaben wie „im Allgemeinen“ u. s. w. seine Zuflucht zu nehmen, liegt in der allgemeinen Auffassung eines Gebildes n-ten Grades. Wir hätten jener, alle Wahrheiten ins Unbestimmte zerstreuenden Zugabe bedurft, wenn wir uns der gewöhnlichen Ausdrücke Kurve oder Linie n-ter Ordnung oder Klasse, und selbst auch, wenn wir uns des allgemeineren Ausdrucks geometrischer Ort n-ten Grades hätten bedienen wollen. Unter diesen Ausdrücken ist der der Kurve der engste, weil er nicht einmal die gerade Linie umfasst; weiter schon ist der der Linie n-ter Ordnung, doch umfasst dieser wiederum nicht einzelne Punkte; der 120 letzte Ausdruck geometrischer Ort umfasst zwar beides, auch † wird der Verein zweier Linien m-ter und n-ter Ordnung (wenn sie nicht ganz oder theilweise zusammenfallen) als geometrischer Ort $(m + n)$-ter Ordnung aufgefasst werden können, aber dennoch giebt es Gebilde

n-ten Grades, welche als geometrische Oerter von niederen Graden sind. Dies wird nämlich dann der Fall sein, wenn die gleich Null gesetzte Funktion n-ten Grades, durch welche das Gebilde n-ten Grades dargestellt ist, sich in Faktoren zerlegen lässt, welche wieder ganze rationale Funktionen sind, und von welchen zwei oder mehrere einander gleich sind. Setzt man dann diese einander gleichen Faktoren gleich Null, so wird dadurch offenbar der gegebenen Gleichung genügt, und von den Partialgebilden, in welche das ganze Gebilde zerfällt, fallen also zwei oder mehrere zusammen. Will man nun aber nur den geometrischen Ort des veränderlichen Punktes haben, so hat man jenes Partialgebilde nur einmal zu setzen, wodurch sich der Grad des geometrischen Ortes verringert.

§ 4.

Anwendung auf Kegelschnitte.

Ich will nun einige specielle Fälle des allgemeinen Satzes hervorheben, um ihn der Anschauung näher zu bringen und um zugleich bestimmter darauf hinweisen zu können, wie auf ihm eine allgemeine Kurventheorie aufgebaut werden kann. Doch will ich mich nur auf Punktgebilde beschränken, indem die Uebertragung auf Liniengebilde zu sehr auf der Hand liegt, als dass ich sie hier auszuführen nöthig hätte.

Ich habe schon oben gezeigt, wie aus jenem Satze hervorgeht dass, wenn die Seiten eines Dreiecks um drei feste Punkte a, c, e sich drehen und zwei Ecken desselben sich in festen Geraden B, D bewegen, dann die dritte x einen Kegelschnitt konstruirt (Fig. 1). Die Bedingung, durch welche hier die Bewegung beschränkt ist, kann auch so ausgedrückt werden, dass die Gerade $axBcDx$ durch den Punkt e gehen soll; die Gleichung des Kegelschnittes ist daher

$$(9) \qquad axBcDxe = 0 \quad \text{oder auch} \quad exDcBxa = 0.$$

Man überzeugt sich leicht {davon}, dass in diesem Kegelschnitte folgende fünf Punkte liegen: a, e, BD, acD, ecB; denn fällt x in a, so wird ax Null (Definition 1), also auch das ganze Produkt Null, also wird der Gleichung genügt, das heisst a ist ein Punkt des Kegelschnittes, und aus demselben Grunde e, ferner auch BD, das heisst (Def. 2) der Durchschnitt der Geraden B und D; denn es sei k dieser Durchschnittspunkt, so fällt $akBcD$ wieder in k zurück, und da kk Null ist, so wird, wenn in (9) k statt x gesetzt wird, $akBcDk$ gleich Null, also auch das ganze Produkt Null, mithin ist k ein Punkt des Kegel-

schnitts. Ferner ist auch acD, was gleich d gesetzt werde (Fig. 3), ein Punkt des Kegelschnitts; denn es fällt $adBcD$ zurück in d, also 121 ist $adBcDd$ Null, folglich auch $adBcDde$, † das heisst d ist ein Punkt des Kegelschnitts, und endlich aus demselben Grunde auch ecB, was gleich b gesetzt werde; denn es fällt wieder $ebDcB$ in b, also ist $ebDcBb$ Null, also auch $ebDcBba$ Null, das heisst b ist ein Punkt des Kegelschnitts. Da nun durch diese fünf Punkte (Fig. 3) leicht die fünf in der Gleichung (9) vorkommenden Konstanten ausgedrückt werden können, indem B durch bk, D durch dk, c durch $(ad)(be)$ ausgedrückt werden kann, so hat man zugleich die Gleichung eines Kegelschnitts, welcher durch fünf gegebene Punkte gehen soll, nämlich

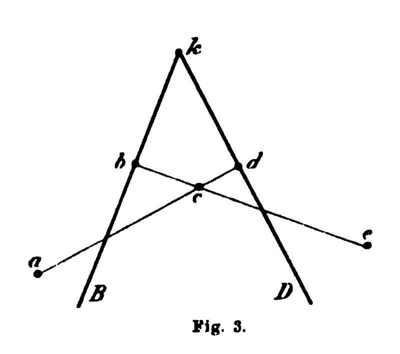


Fig. 3.

$$ax(bk)[(ad)(be)](dk)xe = 0. \tag{10}$$

Wir können den obigen Satz für Kegelschnitte noch erweitern, indem wir sagen:

Wenn die sämtlichen Seiten eines n-Ecks um feste Punkte sich drehen und $n-1$ Ecken in festen Geraden sich bewegen, so beschreibt die n-te Ecke x einen Kegelschnitt.

Denn stellt man sich die festen Punkte und Geraden gegeben vor, und den Punkt x in irgend einer Lage, so ergeben sich dadurch nicht nur die Seiten und Ecken des n-Ecks der Reihe nach durch blosses Ziehen von geraden Linien, sondern es tritt auch, wenn x in der That eine Ecke desselben sein soll, die Bedingung hinzu, dass die letzte, durch jene Konstruktion erfolgende Seite des n-Ecks wieder durch x gehen muss; und da bei diesen Konstruktionen x zweimal angewandt ist, so folgt, das x ein Gebilde zweiten Grades, das heisst einen Kegelschnitt konstruirt. Es seien, um dies noch mehr zu veranschaulichen, $a_1, a_2, \dots a_n$ die festen Punkte, um welche sich der Reihe nach von der Ecke x aus, etwa nach rechts herum gerechnet, die Seiten des n-Ecks drehen (Fig. 4, wo $n=4$ angenommen ist), und $B_1, B_2, \dots B_{n-1}$ seien die festen Geraden, in welchen sich ebenfalls von x aus in derselben Reihenfolge ge-

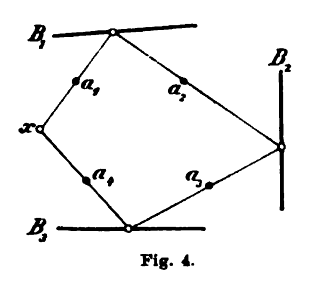


Fig. 4.

nommen die übrigen Ecken ausser x bewegen: so wird die Gleichung des Kegelschnitts

(11) $$x a_1 B_1 a_2 B_2 \ldots a_{n-1} B_{n-1} a_n x = 0,$$

zum Beispiel, wenn $n = 4$ ist, zu

(12) $$x a_1 B_1 a_2 B_2 a_3 B_3 a_4 x = 0.$$

§ 5.

Anwendung auf die Kurven dritten Grades.

Um die folgenden Specialsätze noch unmittelbarer aus dem Hauptsatze ableiten zu können, will ich denselben noch zuvor in einer etwas andern Form darstellen, nämlich wie folgt:

Wenn in einem gleich Null gesetzten Produkte räumlicher Grössen derselben Ebene nur eine veränderliche Grösse als Faktor vorkommt, und zwar diese n-mal, und wenn alle übrigen multiplikativen Verknüpfungen, welche in dem † Produkte vorkommen, ausser der letzten), zu den beiden* 122 *ersten Arten (Def. 1 und 2) gehören, die letzte aber zu der dritten Art (Def. 3) gehört, so beschreibt die veränderliche Grösse (wenn sie nicht etwa in jeder Lage das Produkt zu Null machen sollte**), ein bestimmtes Gebilde n-ten Grades.*

---

*) Es muss nämlich nach der Art, wie wir das Produkt schreiben, stets eine bestimmte multiplikative Verknüpfung als die letzte, das ganze Produkt bildende erscheinen.

**) Dieser Fall tritt z. B. ein, wenn ein Punkt x mit den drei Ecken a, b, c eines Dreiecks verbunden wird und die Punkte, worin diese drei Verbindungslinien die gegenüberliegenden Seiten A, B, C schneiden, paarweise verbunden werden, und wenn dann die Bedingung hinzugefügt wird, dass die drei Punkte, in welchen diese drei letzten Verbindungslinien die jedesmalige dritte Seite schneiden, in gerader Linie liegen sollen; denn dieser Bedingung wird bekanntlich für jeden Punkt x genügt (Fig. 5). Die Gleichung würde dann

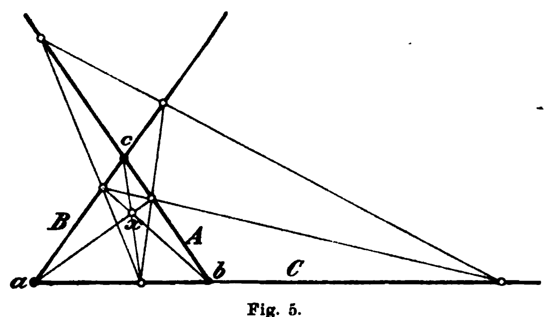


Fig. 5.

$$[xaA(xbB)C][xbB(xcC)A][xcC(xaA)B] = 0$$

sein, welche den Punkt x somit ganz unbestimmt lässt, obgleich sie beim ersten Anblick ein bestimmtes Gebilde sechsten Grades zu liefern scheint. Bei einer ausgeführten Kurventheorie würden solche Fälle eine besondere Beachtung verdienen. Um jedoch durch solche Fälle nicht beschränkt zu werden, wollen wir dann das Gebilde ein unbestimmtes Gebilde n-ten Grades nennen.

Ich gehe nun zu den Gebilden vom *dritten* Grade über. Wenn ein Punkt x der Gleichung

$$axBcDxD_1c_1B_1xa_1 = 0 \tag{13}$$

unterliegt, so beschreibt er nach dem angeführten Satze ein Gebilde dritten Grades, das heisst (Fig. 6):

Wenn die Winkel an der Spitze zweier Dreiecke stetig an einem Punkte x {mit einem Schenkel zusammen} liegen und die Grundseiten wie auch die äussersten Schenkel um feste Punkte c, c_1, a, a_1 sich drehen, die Endpunkte der Grundseiten aber in festen Geraden B, D, B_1, D_1 sich bewegen, so beschreibt die gemeinschaftliche Spitze x ein Gebilde vom dritten Grade.

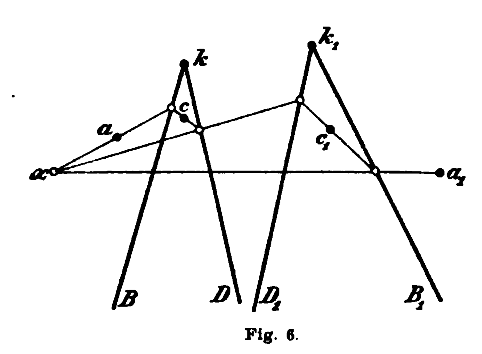


Fig. 6.

Man kann, wie leicht zu sehen, den Satz zu folgendem Satze verallgemeinern:

Wenn zwei veränderliche Vielecke eine Ecke x und eine an dieser Ecke liegende Seite) gemeinschaftlich behalten, während die übrigen Ecken in festen Geraden und die übrigen Seiten um feste Punkte sich bewegen, so beschreibt die gemeinschaftliche Ecke ein Punktgebilde dritten Grades und die gemeinschaftliche Seite ein Liniengebilde dritten Grades.*

Der Anblick von Figur 7 genügt, um diesen Satz auf den allgemeinen zurückführen zu können. Es ist hier für die Theorie der Kurven dritten Grades von der grössten Wichtigkeit, zu zeigen, dass schon durch die in der † Formel (13) gegebene Gleichung und durch die darauf gegründete Konstruktion vermittels der gemeinschaftlichen Spitze zweier stetig zusammenliegender Dreiecke *jedes* Punktgebilde dritten Grades erzeugt werden kann; auch dann noch, wenn man in (13) B und B_1 zusammenfallen lässt; was ich nun beweisen will. Die in Fig. 6 dargestellte Konstruktion geht dann über in die von Fig. 8.

123

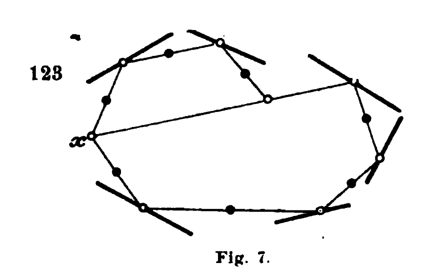


Fig. 7.

Noch ist, ehe wir zur Diskussion übergehen, zu bemerken, dass

*) Wir sagen, dass zwei Figuren eine Seite gemeinschaftlich haben, wenn eine Seite der einen mit einer Seite der andern in derselben geraden Linie liegt.

man die Formel (13) umkehren kann, ohne ihre Bedeutung zu ändern, wie man sogleich aus der Figur (Fig. 6 oder 8) ersieht; sie ist also

$$(13) \qquad axBcDxD_1c_1B_1xa_1 = 0 \text{ oder}$$
$$(13^*) \qquad a_1xB_1c_1D_1xDcBxa = 0,$$

wo man dann auch B statt B_1 setzen kann, da wir annehmen (Fig. 8), dass beide zusammenfallen. Es lassen sich nun leicht neun Punkte der erzeugten Kurve finden.

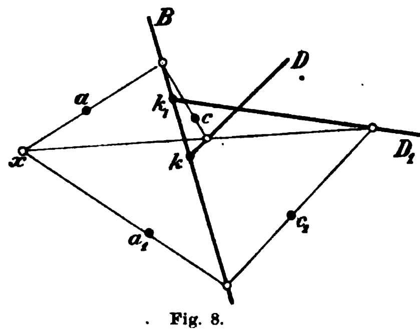


Fig. 8.

Erstens sind a und a_1 Punkte der Kurve, weil, wenn x gleich a oder a_1 wird, nach Formel (13) oder (13*) schon die erste Multiplikation Null giebt. Zweitens sind BD und B_1D_1 Punkte der Kurve, die wir mit k und k_1 bezeichnen; denn setzt man in (13) statt x den Punkt k, so giebt, wie man sogleich durch die ausgeführte Konstruktion sieht, akB wieder den Punkt k und kcD giebt gleichfalls den Punkt k; also ist $akBcDk$ Null, folglich wird auch der ganze linksstehende Ausdruck in (13) zu Null, wenn man k statt x setzt, das heisst, k genügt, statt x gesetzt, jener Gleichung (13) oder ist ein Punkt der Kurve. Ebenso ergiebt sich aus (13*) k_1 als Punkt der Kurve.

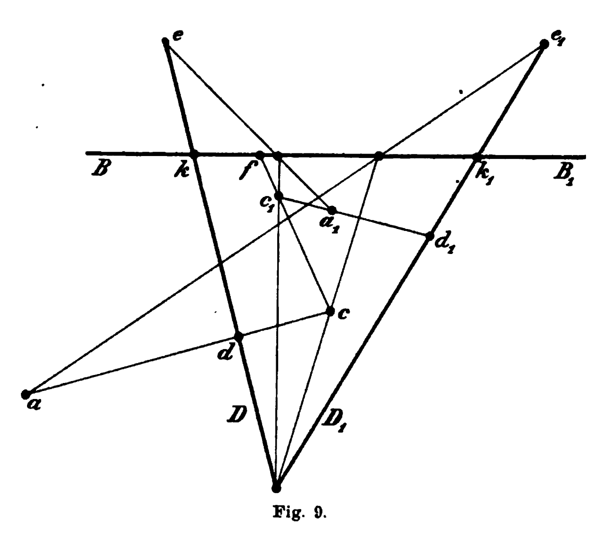


Fig. 9.

Drittens sind acD und $a_1c_1D_1$ Punkte der Kurve, die wir mit d und d_1 bezeichnen. Denn setzt man in (13) d statt x (Fig. 9), so fällt $adBcD$ wieder in d zurück, also ist $adBcDd$ schon Null, und d wird somit ein Punkt der Kurve sein; ebenso d_1 vermöge (13*).

Viertens sind nun in D und D_1 noch leicht die dritten Punkte zu finden, in welchen sie die Kurve schneiden {und} die wir e und e_1 nennen wollen. Es sei x ein Punkt {der Kurve} in D, aber weder k

noch d, so wird, da $axBcD$ stets ein Punkt in D ist und zugleich x in D liegt, $axBcDx$ wieder die Linie D darstellen, und die Gleichung (13) sagt dann aus, dass der Ausdruck $DD_1c_1B_1xa_1$ Null sein, d. h. $DD_1c_1B_1$ mit x und a_1 in gerader Linie liegen muss, also wird x in der Linie $DD_1c_1B_1a_1$, aber nach der Voraussetzung auch in D liegen: es ist also x, was wir in diesem Falle durch e bezeichneten, gleich $DD_1c_1B_1a_1D$, und aus demselben Grunde wird D_1DcBaD_1 ein Punkt e_1 der Kurve sein.

Endlich lässt sich zu den beiden Punkten k und k_1 der dritte 124 Punkt {der Kurve} in B oder B_1, vorausgesetzt, dass diese † beiden Linien zusammenfallen, leicht finden. Nämlich, liegt x in B, ohne in k oder k_1 zu fallen, so fällt axB wieder in x zurück, $xcDx$ ist die Gerade cx. Es bleibt zu fordern: $cxD_1c_1Bxa_1 = 0$ oder, umgekehrt geschrieben: $a_1xBc_1D_1xc = 0$. Nun fällt a_1xB in x zurück; ferner ist xc_1D_1x die Gerade xc_1, also bleibt: $xc_1c = 0$, was, da x in B liegt, nur möglich ist, wenn x in cc_1B fällt*); wir bezeichnen diesen Punkt cc_1B mit f.

Es liesse sich nun schon leicht zeigen, dass man in *jeder* Kurve dritten Grades neun solche Punkte annehmen kann, wie sie sich durch obige Konstruktionen ergeben haben; doch der grössern Einfachheit wegen will ich noch annehmen, dass die Punkte k und e, und ebenso k_1 und e_1 (Fig. 9), zusammenfallen, wodurch also die Linien D und D_1 Tangenten werden, welche die Kurve in e und e_1 berühren. Fällt nun zuerst e in k, so sieht man aus Fig. 9 sogleich, dass auch gleichzeitig c_1 in D fällt, und ebenso wird c in D_1 fallen, wenn e_1 in k_1 fällt. Fig. 9 geht somit in Fig. 10 über. Hieraus folgt nun sogleich, dass jede Kurve dritter Ordnung durch eine Gleichung von der Form (13) dargestellt werden kann.

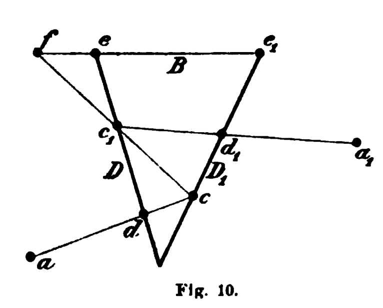


Fig. 10.

Denn es sei eine Kurve dritter Ordnung oder überhaupt ein Punktgebilde dritten Grades gegeben. Man ziehe an zwei Punkten e und e_1 der Kurve die Tangenten D und D_1, welche die Kurve noch jede in einem Punkte schneiden müssen; diese Punkte seien d und d_1; sodann verbinde man die Berührungspunkte e und e_1 durch eine Gerade B, welche die Kurve noch in einem Punkte schneiden muss; dieser sei f. Dann ziehe man von f eine willkürliche gerade Linie, welche die

*) Vorausgesetzt nämlich, dass a nicht in B (oder B_1) liegt; in diesem Falle wäre x unbestimmt, die Linie B wäre dann selbst ein Theil des Gebildes dritten Grades.

Tangenten D und D_1 in den Punkten c und c_1 schneide, ziehe dann die Geraden $c_1 d_1$ und cd, deren jede die Kurve im Allgemeinen noch in zwei Punkten schneiden wird; einen der Punkte, worin $c_1 d_1$ sie schneidet, nenne man a_1, einen der Punkte, worin cd sie schneidet, nenne man a. So hat man nun neun Punkte (in e und e_1 fallen jedesmal zwei zusammen), durch welche die Kurve dritten Grades im Allgemeinen bestimmt ist. Die Kurve dritten Grades kann bekanntlich durch neun Punkte, von denen sechs auf zwei geraden Linien liegen, nur dann nicht bestimmt sein, wenn die übrigen drei Punkte, hier a, a_1, f, in gerader Linie liegen. Nun kann man aber von jenen vier neuen Punkten, in welchen die beiden zuletzt gezogenen geraden Linien die Kurve schneiden, da sie doch nicht alle vier in gerader Linie liegen können, stets wenigstens zwei, a und a_1, so auswählen, dass sie mit f nicht in gerader Linie liegen; dann hat man also stets neun Punkte, durch † welche 125 die Kurve vollkommen bestimmt ist. Da nun das Gebilde dritten Grades

(13) $$axBcDxD_1c_1Bxa_1 = 0$$

jene neun Punkte mit der gegebenen Kurve gemeinschaftlich hat, so fallen beide zusammen. Also kann jede Kurve dritter Ordnung durch eine Gleichung von der Form (13) dargestellt oder durch die gemeinschaftliche Ecke zweier Dreiecke erzeugt werden, welche ausserdem noch eine an dieser Ecke liegende Seite (als unendliche Linie gedacht) gemeinschaftlich haben und deren andere Ecken in festen Geraden und deren andere Seiten um feste Punkte sich bewegen. Geht man also von dieser allgemeinen Eigenschaft der Punktgebilde dritten Grades aus, welche auch als Definition der Gebilde dritten Grades gebraucht werden kann, so sieht man, wie diese Gebilde sich einer rein geometrischen Behandlung fügen; ja man sieht, wie sich leicht mechanische Vorrichtungen ersinnen lassen, durch welche ein Punkt gezwungen wird, irgend ein beliebiges Punktgebilde dritten Grades zu beschreiben.

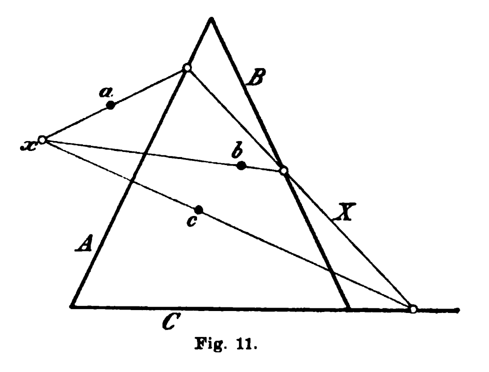


Fig. 11.

Um zunächst noch bei den Gebilden dritten Graden stehen zu bleiben, will ich einige andere Erzeugungsarten derselben aus dem Hauptsatze ableiten. Da die Gleichung

(14) $$(xaA)(xbB)(xcC) = 0$$

ein Gebilde dritten Grades liefert, so folgt (Fig. 11):

Wenn drei von einem beweglichen Punkte x ausgehende Strahlen sich um drei feste Punkte a, b, c drehen und die Punkte, in welchen diese Strahlen von einer beweglichen geraden Linie (X) getroffen werden, in drei Geraden A, B, C sich bewegen, so beschreibt der Punkt x ein Punktgebilde dritten Grades und die gerade Linie X ein Liniengebilde dritten Grades.

Das letztere folgt aus der Gleichung

$$(14^*) \qquad (XAa)(XBb)(XCc) = 0.$$

Es ergeben sich leicht folgende neun Punkte als Punkte jenes Punktgebildes dritten Grades: a, b, c; AB, BC, CA; abC, bcA, caB, wovon man sich leicht durch Konstruktion überzeugt. Fügt man in (14) oder (14*) den beiden ersten in Klammer geschlossenen Faktoren noch paarweise beliebige Punkte und Gerade abwechselnd als Faktoren hinzu, so dass z. B. aus xaA wird $xaAa_1A_1\dots a_mA_m$, so gelangt man zu folgendem allgemeineren Satze:

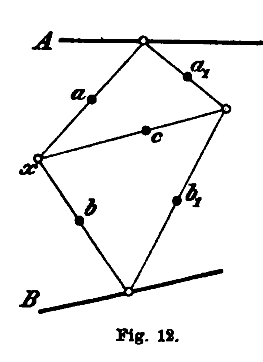


Fig. 12.

Zieht man von irgend einer Ecke x eines veränderlichen n-Ecks eine Linie nach irgend einer Seite X desselben, und nimmt an, dass alle übrigen Ecken in festen Geraden und alle übrigen Seiten desselben um feste Punkte sich bewegen, während zugleich die von der Ecke x nach der Seite X 126 *gezogene † Gerade um einen festen Punkt sich dreht und der Punkt, worin sie die Seite X trifft, in einer festen Geraden sich bewegt, so beschreibt der Punkt x ein Punkt-, die Linie X ein Liniengebilde dritten Grades.*

Ferner, da die Gleichung

$$(15) \qquad (xaAa_1)(xbBb_1)xc = 0$$

ein Gebilde dritten Grades liefert, so folgt (Fig. 12):

Wenn die vier Seiten und eine Diagonale eines Vierecks sich um feste Punkte drehen und die beiden Ecken, welche nicht von der Diagonale getroffen werden, in festen Geraden sich bewegen, so beschreiben die von der Diagonale getroffenen Ecken jede ein Punktgebilde dritten Grades.

Fügt man in (15) den beiden ersten Faktoren noch paarweise beliebige Gerade und Punkte abwechselnd als Faktoren hinzu, sodass z. B. aus $xaAa_1$ wird $xaAa_1A_1a_2 \dots A_{m-1}a_m$, so gelangt man zu dem allgemeineren Satze:

Wenn die n Seiten und eine Diagonale eines veränderlichen n-Ecks sich um feste Punkte drehen und die von der Diagonale nicht getroffenen Ecken in festen Geraden sich bewegen, so beschreibt jede von den

beiden Ecken, die von der Diagonale getroffen werden, ein Punktgebilde dritten Grades.

Da endlich die Gleichung

$$xaAbCd(xa)b_1C_1d_1x = 0 \tag{16}$$

ein Gebilde dritten Grades liefert, so folgt (Fig. 13):

Wenn die Grundseiten zweier veränderlichen Dreiecke fortdauernd in gerader Linie stetig aneinander liegen, d. h. so liegen, dass, wo die eine aufhört, die andere anfängt, und wenn zugleich die Seiten um feste Punkte a, b, d, b_1, d_1 sich drehen, die Spitzen aber und der nicht gemeinschaftliche Endpunkt einer Grundseite in festen Geraden C, C_1, A sich bewegen, so beschreibt der nicht gemeinschaftliche Endpunkt der andern Grundseite ein Punktgebilde dritten Grades, welches in demjenigen festen Punkte a, um welchen sich die gemeinschaftliche Grundlinie dreht, einen Doppelpunkt hat.

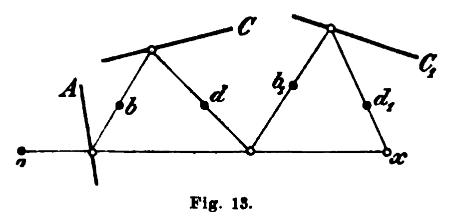


Fig. 13.

Letzteres folgt leicht, wenn man durch a eine beliebige Gerade D zieht und in ihr einen Punkt a_1 setzt, den man in (16) statt des zweiten Faktors a einführt, wodurch dann (16) übergeht in

$$xaAbCd(xa_1)b_1C_1d_1x = 0. \tag{16*}$$

Denn nimmt man nun an, dass der Punkt a_1 sich dem Punkte a nähert, während er immer in der Geraden D bleibt, so nähert sich das durch (16*) dargestellte Gebilde f dem durch (16) dargestellten während a und a_1 stets Durchschnittspunkte dieses Gebildes mit der Geraden D bleiben. In dem † Augenblicke, wo a_1 in a fällt, fallen 127 somit zwei der Durchschnittspunkte der Geraden D und der Kurve (16) in a zusammen, und zwar geschieht dies, welche Richtung auch D haben mag, was die Idee des Doppelpunktes ist. Es leuchtet ein, dass man diesen Satz durch Hinzufügen von Faktoren zu (16) verallgemeinern kann, wodurch dann die Dreiecke in Vielecke übergehen.

§ 6.

Anwendung auf Kurven *n*-ten Grades.

Für die Gebilde höherer Grade will ich nur noch ein Paar Sätze hinzufügen, indem ich durch die Behandlung der Gebilde dritten Grades schon glaube den Weg der Behandlung bezeichnet zu haben,

welcher die Gebilde höherer Grade zu unterwerfen sein möchten. Da die Gleichung

(17) $$axBcDxB_1c_1D_1xB_2c_2D_2\ldots ex=0,$$

wenn x darin $(n+1)$-mal vorkommt, ein Punktgebilde $(n+1)$-ten Grades darstellt, so folgt der Satz (vergl. Fig. 6 {S. 62}):

Wenn n veränderliche Dreiecke fortdauernd eine gemeinschaftliche Spitze x haben, und ihre Winkel an der Spitze stetig aneinanderliegen, während die übrigen Ecken in geraden Linien fortschreiten, die Grundseiten aber und diejenigen zwei Schenkel der Winkel an der Spitze, welche nicht zweien dieser Winkel gemeinschaftlich sind, um feste Punkte sich drehen, so beschreibt die Spitze x ein Punktgebilde $(n+1)$-ten Grades.

Man kann den Satz noch allgemeiner fassen, indem man statt der n Dreiecke n Vielecke setzt, welche eine gemeinschaftliche Ecke haben und deren an dieser Ecke befindliche Polygonwinkel stetig aneinanderliegen, während alle übrigen Ecken in geraden Linien fortschreiten und alle Seiten ausser denen, welche in den gemeinschaftlichen Schenkeln der stetigen Winkel liegen, um feste Punkte sich drehen; denn auch dann wird jene gemeinschaftliche Ecke ein Punktgebilde $(n+1)$-ten Grades beschreiben. Da ferner die Gleichung

(18) $$xaAbCd(xa)b_1C_1d_1(xa)b_2C_2d_2\ldots ex=0,$$

wenn x darin $(n+1)$-mal vorkommt, ein Punktgebilde $(n+1)$-ten Grades liefert und der Punkt a darin n-mal als Punkt dieses Gebildes erscheint, so ergiebt sich (vergl. Fig. 13) der Satz:

Wenn die Grundseiten von n veränderlichen Dreiecken fortdauernd in gerader Linie, {die durch einen festen Punkt a geht,} stetig aneinanderliegen, während die sämtlichen Seiten um feste Punkte sich drehen, die Spitzen aber und eine von denjenigen zwei in der Grundlinie liegenden Ecken, welche nicht zwei Dreiecken gemeinschaftlich sind, in festen geraden Linien sich bewegen, so beschreibt die andere dieser Ecken ein Punktgebilde $(n+1)$-ten Grades, welches in dem festen Punkte a, um welchen sich die Grundlinie dreht, einen n-fachen Punkt hat.

128 Dass der Punkt a ein n-facher ist, folgt leicht. Dann zieht man durch a eine beliebige gerade Linie E und setzt in ihr ausser a noch $(n-1)$ feste Punkte $a_1\ldots a_{n-1}$, welche man nach der Reihe in (18) statt der n Faktoren a setzt, sodass man also erhält

(18*) $$xaAbCd(xa_1)b_1C_1d_1(xa_2)b_2C_2d_2\ldots ex=0,$$

so werden die n Punkte $a, a_1,\ldots a_{n-1}$ Punkte des durch die Gleichung (18*) dargestellten Gebildes $(n+1)$-ten Grades, und da sie zu-

gleich in der Geraden E liegen, so bilden sie n Durchschnittspunkte dieser Geraden und jenes Gebildes. Rücken nun in (18*) die Punkte $a \ldots a_{n-1}$, ohne die Gerade E zu verlassen, in einen Punkt a zusammen, so geht (18*) in (18) über, und in der Geraden E fallen n Durchschnittspunkte derselben mit der Kurve in einen Punkt a zusammen, und zwar geschieht dies, wie auch die Gerade E angenommen werden mag, das heisst, der Punkt a ist ein n-facher Punkt.

Die Gleichung (18) ist zugleich dadurch interessant, dass sie unmittelbar die projektivische Erzeugung der Punktgebilde n-ten Grades, welche einen $(n-1)$-fachen Punkt haben, vor Augen stellt. Denn denkt man sich den Punkt x in verschiedenen Lagen, so erscheinen überall um die festen Punkte Strahlenbüschel und in den festen Geraden Punkte, und setzt man diejenigen Strahlen dieser Büschel und diejenigen Punkte dieser Geraden, welche aus derselben Lage des Punktes x hervorgehen, als entsprechende, so erscheint jeder Punkt x der Kurve als Durchschnitt zweier entsprechender Strahlen (z. B. Fig. 13), und die ganze Kurve erscheint also als Durchschnitt zweier Strahlenbüschel, und es erhellt unmittelbar aus der Figur, wie man zu jedem Strahle (ax), welcher dem um den $(n-1)$-fachen Punkte (a) liegenden Strahlenbüschel angehört, den entsprechenden Punkt (x) der Kurve durch das Ziehen von wenigen $[2(n-1)]$ geraden Linien findet.

Hingegen tritt in dem allgemeinen Falle nicht mehr die projektivische Erzeugung hervor, indem im Allgemeinen in x mehr als zwei Strahlen zusammenlaufen. Jedoch giebt es ausser den Kurven n-ten Grades mit $(n-1)$-fachem Punkte noch andere, welche sich durch blosse Konstruktionen vermittelst des Lineals oder, was dasselbe ist, durch projektivische Erzeugung darstellen lassen. Um dies vollständiger darzulegen, will ich hier den allgemeinen Satz für die projektivische Erzeugung der Kurven ableiten. Jede Konstruktion eines Punktgebildes*) vermittelst des Lineals allein kann nur, wie man leicht sieht, auf die Weise erfolgen, dass man entweder in einer Geraden 129 einen beweglichen Punkt oder um einen Punkt eine bewegliche Gerade annimmt, und aus jenem beweglichen Punkt oder dieser beweglichen Geraden und aus festen Punkten und Geraden durch lineale Konstruktionen den Punkt herleitet, welcher die Kurve erzeugt. In dem obigen Falle zum Beispiel der projektivischen Erzeugung von Punktgebilden n-ten Grades mit $(n-1)$-fachem Punkte war es die um den

*) Ich werde mich hier nur auf Punktgebilde beschränken, indem die Sätze für Liniengebilde aus den entsprechenden für Punktgebilde unmittelbar abgelesen werden können.

$(n-1)$-fachen Punkt a sich drehende Gerade ax, welche der projektivischen Erzeugung der Kurve zu Grunde lag. Lege ich nun überhaupt zunächst eine um einen festen Punkt a sich drehende Gerade (P) der Erzeugung zu Grunde und nehme diesen Punkt als Durchschnitt der Koordinatenaxen an, so wird, wenn φ' und ψ' die durch irgend ein Maass gemessenen Koordinaten eines Punktes jener Geraden P sind, die Gleichung dieser Geraden von der Form $\alpha\varphi' + \beta\psi' = 0$ sein, und es sind somit nach der an Formel (4) sich anschliessenden Erklärung α, β die Zeiger der Geraden, indem der dritte Zeiger Null ist. Diese Zeiger α, β sind aber, wenn die Gerade P beweglich ist, als Veränderliche zu setzen; wir wollen $\beta:\alpha$ mit ν bezeichnen. Nun haben wir gezeigt, dass jeder Punkt x, welcher durch lineale Konstruktionen aus der beweglichen Geraden P und aus festen Punkten und Geraden hervorgeht, wenn bei diesen Konstruktionen P n-mal angewandt ist, zu Zeigern homogene Funktionen n-ten Grades von den Zeigern der Geraden P hat, also hier von α und β, oder, indem man mit α^n dividirt, Funktionen von ν, welche im Allgemeinen vom n-ten Grade sind und nur dann von einem anderen und zwar niederem Grade sind, wenn α in allen Gliedern jener Funktionen enthalten ist. Ebenso verhält es sich, wenn wir einen Punkt zu Grunde legen, welcher sich in einer der Koordinatenaxen bewegt, indem auch für ihn der dritte Zeiger Null ist; nennen wir dann α und β die Zeiger desselben und setzen $\beta:\alpha = \nu$, so gelangen wir auf dieselbe Weise und aus denselben Gründen zu demselben Resultate wie vorher. Nun hat Möbius in seinem barycentrischen Calcul (§ 136 und § 137) dargethan, dass, wenn die drei Zeiger eines veränderlichen Punktes sich als ganze rationale Funktionen n-ten Grades einer Hülfsgrösse ν darstellen lassen, dann der Punkt eine algebraische Kurve beschreibt, deren Ordnungszahl im Allgemeinen n ist und nie diese Zahl n übersteigt, dass aber (§ 138) diese Kurven nicht die allgemeinen Kurven n-ter Ordnung 130 sind, sondern vielmehr (§ 70) schon durch $3n-1$ † Punkte bestimmt sind, also von der dritten Ordnung an (s. o. {S. 50}) von einer geringeren Anzahl von Punkten als die allgemeinen Kurven derselben Ordnung. Nehmen wir diese Resultate hier auf, so gelangen wir zu dem Satze:

Wenn ein Punkt (p) sich in einer festen Geraden bewegt oder eine Gerade P sich um einen festen Punkt dreht, und man durch lineale Konstruktionen aus diesem Punkte oder dieser Geraden und einer Reihe fester Punkte und Geraden einen (gleichfalls beweglichen) Punkt x konstruirt, so beschreibt der Punkt x ein algebraisches Punktgebilde, welches, wenn p oder P bei jenen Konstruktionen n-mal angewandt ist, im All-

gemeinen vom n-ten und nie von einem höheren Grade ist; und zwar sind die so konstruirbaren Gebilde n-ten Grades, vom dritten Grade an, besondere Gattungen der Gebilde n-ten Grades, indem sie im Allgemeinen durch (3n — 1) Punkte bestimmt sind.

Setzt man die aus demselben Punkte p konstruirten Strahlen und Punkte bis zu x hin als entsprechende, so erhält man Strahlenbüschel und mit Punkten besetzte Gerade, welche sich einander entsprechen und von denen immer zwei nach einander entstehende so liegen, dass die Punkte in den entsprechenden Strahlen liegen, und welche also als perspektivische Gebilde aufgefasst werden können. Das Gebilde n-ten Grades wird dann schliesslich durch das gegenseitige Durchschneiden der entsprechenden Strahlen zweier Strahlenbüschel erzeugt (vergl. z. B. Fig. 13 {S. 67}). Somit drückt zugleich dieser Satz die allgemeine projektivische Erzeugbarkeit der Kurven aus.

Ich will hier noch zum Schlusse zwei Bemerkungen hinzufügen, nämlich erstens, dass es ausser der hier angeregten geometrischen Behandlungsweise der Kurven, bei welcher nur auf das Ziehen von geraden Linien zurückgegangen ist, noch eine andere giebt, welche zugleich auf den Kreis zurückgeht. Schon bei den Kegelschnitten tritt diese verschiedene Behandlungsweise hervor, indem die Eigenschaft des mystischen Sechseckes oder, was dasselbe ist, die Konstruktion eines Kegelschnittes durch eine Ecke eines Dreiecks, dessen beide anderen Ecken in festen Geraden und dessen Seiten um feste Punkte sich bewegen, die rein lineale Behandlung der Kegelschnitte bedingt, während die Erzeugung eines Kegelschnittes als Durchschnittes einer Ebene und eines Kegels auf den Kreis zurückführt. Diese zweite Behandlungsweise der Kurven will ich jedoch bis zum Erscheinen des zweiten Theiles meiner Ausdehnungslehre verschieben, indem in dem ersten Theile, welcher die lineale † Ausdehnungslehre enthält, die Principien 131 nur für die lineale Behandlungsweise der Kurven sich vorfinden.

Die zweite Bemerkung bezieht sich auf eine neue Stufe der Verallgemeinerung, indem man nämlich statt der festen Punkte und Geraden Gebilde höherer Grade setzt und zwar statt der festen Punkte Liniengebilde und statt der festen Geraden Punktgebilde und dann statt des Durchschnitts einer durch Konstruktion gewonnenen (beweglichen) Geraden mit einer gegebenen festen Geraden die Durchschnittspunkte der ersteren mit dem statt der letzteren eingeführten Punktgebilde setzt und statt der Verbindungslinie zwischen einem durch Konstruktion gewonnenen (beweglichen) Punkte und einem gegebenen festen Punkte die Tangenten setzt, welche von dem ersteren an das statt des letzteren eingeführte Liniengebilde gezogen werden können.

Führt man statt einer solchen festen Geraden, welche nur einmal bei der Konstruktion angewandt wird, (oder statt eines solchen festen Punktes) ein Punktgebilde (oder ein Liniengebilde) m-ten Grades ein, so lässt sich leicht beweisen, dass dadurch der Grad des nach dem Hauptsatze erzeugten Gebildes ver-m-facht wird, d. h. wenn der Grad des erzeugten Gebildes ursprünglich n betrug, so beträgt derselbe, nachdem statt einer festen Geraden, welche einmal bei der Konstruktion angewandt wurde, (oder statt eines solchen festen Punktes) ein Punktgebilde (oder ein Liniengebilde) m-ten Grades eingeführt wird, nach dieser Einführung $n \, . \, m$.

Doch will ich den Gang des Beweises nur andeuten. Es lässt sich jede den Hauptsatz auf besondere Weise darstellende Gleichung, wenn die feste Gerade A darin einmal vorkommt, stets sehr leicht auf die Form bringen,

$$p_x A = 0,$$

welche ausdrückt, dass der Punkt p_x in der Geraden A liegt, und welche, wenn p_x vom n-ten Grade ist, ein Punktgebilde n-ten Grades darstellt. Wird nun statt A ein Punktgebilde m-ten Grades gesetzt, so heisst das, es soll der Punkt p_x in diesem Punktgebilde liegen. Es sei nun dies Punktgebilde m-ten Grades, welches statt A gesetzt werden soll, ausgedrückt durch eine geometrische Gleichung von der Form, wie sie dem Hauptsatze genügt, in welcher also der dies Gebilde konstruirende Punkt y m-mal als Faktor vorkommt; setzt man dann statt y den Punkt p_x, so ist dadurch der Bedingung genügt, dass p_x in diesem Gebilde m-ten Grades liegen soll. Da dann p_x m-mal als Faktor erscheint, p_x selbst aber x n-mal als Faktor enthält, so wird in der resultirenden Gleichung x im Ganzen $(n \, . \, m)$-mal als Faktor er-132scheinen, † also der Punkt x ein Punktgebilde $(n \, . \, m)$-ten Grades beschreiben. Es liegt am Tage, wie man auf diese Weise statt beliebig vieler fester Geraden nach und nach solche Punktgebilde und statt der festen Punkte nach und nach solche Liniengebilde einführen und dadurch den Satz in seiner allgemeinsten Form darstellen kann. Da jedoch die zuletzt hervorgehende Gleichung immer in einer Form erscheint, welche dem zuerst aufgestellten Hauptsatze genügt, so bleibt dieser der eigentliche Mittelpunkt der neuen Theorie.

Stettin, den 15. April 1845.

III.

Ueber die Erzeugung der Kurven dritter Ordnung[177] durch gerade Linien und über geometrische Definitionen dieser Kurven.

Von

Prof. Dr. **H. Grassmann,**

Oberlehrer an der Friedrich-Wilhelm-Schule zu Stettin.

Crelles Journal Bd. 36, Heft II, S. 177—184 (1848).

In einem Aufsatze über Kurven dritter Ordnung, im 34. Bande des Crelle'schen Journals, behauptet Herr Professor Plücker, es gebe noch keine allgemeine geometrische Definition einer Kurve dritter Ordnung, und schliesst daraus, dass eine rein geometrische Behandlung dieser Kurven, und also um so mehr der höheren Kurven, gegenwärtig noch unmöglich sei. Nun habe ich im 31. Bande desselben Journals die Grundzüge einer rein geometrischen Behandlung der höheren Kurven zu geben versucht und habe dort, namentlich für die Kurven dritter Ordnung, eine geometrische Definition aufgestellt, deren Allgemeinheit ich dort nachgewiesen habe (S. 123—125 {hier S. 63—65}); ich könnte daher den Gegenstand als abgemacht ansehen und mich damit beruhigen, dass Herrn Plücker jener Band des Journals nicht zu Gesichte gekommen sei, wenn ich nicht befürchten müsste, dass durch die so entschieden ausgesprochene Behauptung mancher Leser irre geführt werden möchte. Ich werde daher den Gegenstand hier noch einmal, und zwar von einem umfassenderen Gesichtspunkte aus, aufnehmen.

Die einfachsten geometrischen Definitionen der Kurven dritter Ordnung, deren jede diese Kurven in ihrer ganzen Allgemeinheit darstellt, würden folgende drei sein, zwischen denen man, um eine methodische Behandlung darauf zu gründen, wählen kann:

No. 1. Der geometrische Ort der gemeinschaftlichen Spitze zweier Dreiecke, deren Winkel an der Spitze einen gemeinschaftlichen Schenkel haben, während von den beiden nicht gemeinschaftlichen Schenkeln derselben jeder durch einen gegebenen Punkt geht und von den vier Endpunkten der Grundseiten jeder in einer gegebenen geraden Linie liegt, ist eine Kurve dritter Ordnung.

No. 2. Wenn die Seiten eines veränderlichen Vierecks und eine Diagonale desselben um feste Punkte sich drehen und die von der Diagonale nicht getroffenen Ecken in festen Geraden liegen, so ist der geo- 178 *metrische † Ort jeder von der Diagonale getroffenen Ecke des Vierecks eine Kurve dritter Ordnung.*

*No. 3. Der geometrische Ort eines Punktes, dessen Verbindungslinien mit drei gegebenen Punkten drei gegebene Gerade so schneiden, dass die drei Durchschnittspunkte in gerader Linie liegen, ist eine Kurve dritter Ordnung.**)

Von diesen drei Definitionen habe ich die erste in dem oben angeführten Aufsatze als eine alle Kurven dritter Ordnung umfassende nachgewiesen, und ich habe dem Beweise nichts weiter hinzuzufügen. Dass der geometrische Ort, welcher in der zweiten und dritten Definition genannt ist, gleichfalls eine Kurve dritter Ordnung sei, ist dort ebenfalls bewiesen. Es bleibt nur übrig, zu zeigen, dass auch jede dieser beiden letzten Definitionen alle Kurven dritter Ordnung umfasst. Für die zweite Definition will ich hier den Nachweis vollständig liefern, während ich für die dritte nur den Gang des Beweises angeben werde.

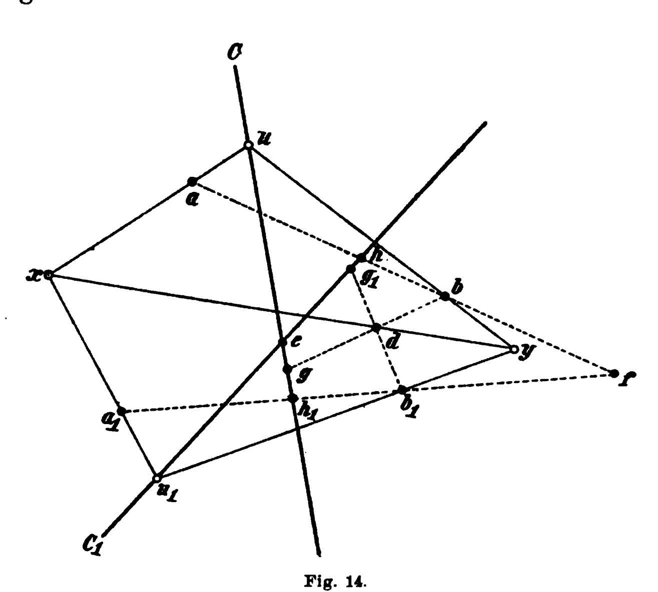


Fig. 14.

Es sei $xuyu_1$ (Fig. 14) das veränderliche Viereck, dessen Seiten

*) Ich verstehe hier unter Kurve dritter Ordnung (algebraisch gefasst) die Gesamtheit der Punkte, deren Koordinaten einer algebraischen Gleichung ge-

xu, uy, yu_1, u_1x und dessen Diagonale xy sich beziehlich um die festen Punkte a, b, b_1, a_1 und d drehen und dessen Ecken u und u_1 sich beziehlich in den festen Geraden C und C_1 bewegen. Der Kürze wegen bezeichne ich, wie im ersten Aufsatze, die Verbindungslinie zweier verschiedener Punkte a und b durch ab und den Durchschnitt zweier verschiedener Geraden A und B durch AB; wenn mehrere solche Ausdrücke ohne Klammern neben einander geschrieben sind, so soll die Konstruktion in der Ordnung fortschreiten, wie diese Ausdrücke von links nach rechts hin folgen. Dann lässt sich nachweisen, dass die von dem Punkte x konstruirte Kurve dritter Ordnung die neun Punkte

$$a, \quad a_1, \quad d, \quad CC_1, \quad (ab)(a_1b_1),$$
$$dbC, \quad db_1C_1, \quad abC_1, \quad a_1b_1C$$

enthält, die ich nach der Reihe beziehlich mit

$$a, \; a_1, \; d, \; e, \; f, \; g, \; g_1, \; h, \; h_1$$

bezeichnen will. In der That: liegt x in einem der Punkte a, a_1 oder d, so kann die Verbindungslinie zwischen x und diesem Punkte jede Richtung † annehmen, und es lässt sich daher dann leicht ein Viereck von der verlangten Art zeichnen. Liegt zum Beispiel (Fig. 15) x in a, so giebt xa_1C_1 den Punkt u_1, $(u_1b_1)(xd)$ den Punkt y, ybC den Punkt u; und verbindet man nun noch u mit a, so hat das so konstruirte Viereck xu_1yu die verlangte Eigenschaft, das heisst, a ist ein Punkt der von x konstruirten Kurve. Liegt x nicht in einem dieser drei Punkte, so haben die drei von x ausgehenden Geraden xa, xd, xa_1 bestimmte Richtungen, und es werden alle diejenigen Punkte x-Punkte der Kurve sein, für welche die drei Geraden

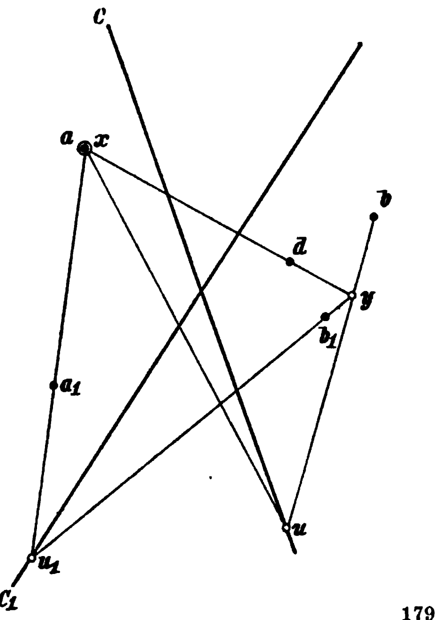


Fig. 15.

179

$$xaCb, \quad xa_1C_1b_1, \quad xd$$

---

nügen, welche in Bezug auf diese Koordinaten vom dritten Grade ist; und zwar auch dann noch, wenn beliebig viele der Konstanten Null werden. Ich würde hiefür den Ausdruck *Punktgebilde dritten Grades* vorziehen, wenn ich nicht befürchtete, dadurch undeutlicher zu werden.

durch denselben Punkt (y) gehen. Liegt nun x in C oder in ab, so wird die erste jener drei Geraden gleich xb; liegt x in C_1 oder in a_1b_1, so wird die zweite jener Geraden gleich xb_1. Liegt also x in dem Durchschnitt von C und C_1 oder von ab und a_1b_1 oder von C und a_1b_1 oder von C_1 und ab, so gehen jene drei Geraden durch denselben Punkt x; das heisst, es sind diese Durchschnitte Punkte der von x konstruirten Kurve, das heisst, es liegen e, f, h, h_1 in dieser Kurve. Endlich: liegt x im Durchschnitt von db und C, so wird die erste jener drei Geraden gleich xb, während die dritte, xd, mit xb zusammenfällt: also gehen dann wieder die drei Geraden durch denselben Punkt; das heisst, g ist ein Punkt der Kurve, und aus demselben Grunde auch g_1. Es sind daher alle neun oben genannten Punkte als Punkte der durch die Ecke x beschriebenen Kurve dritter Ordnung nachgewiesen.

Nach diesen Vorbereitungen hat es nun keine Schwierigkeit mehr, die in No. 2 angegebene Erzeugung als eine allgemeine, das heisst als eine solche nachzuweisen, durch welche jede beliebige Kurve dritter Ordnung erzeugt werden kann. In der That: ist irgend eine Kurve dritter Ordnung gegeben, so schreibe man ihr irgend ein Viereck $fheh_1$ ein, dessen Seiten fh, he, eh_1, h_1f die Kurve zum dritten Male beziehlich in den Punkten a, g_1, g, a_1 treffen mögen, und ziehe von irgend einem andern Punkte d der Kurve, der aber nicht in dem Durchschnitt der beiden Linien ag und a_1g_1 liegt, nach zwei auf einander folgenden der letztgenannten Punkte, zum Beispiel nach g_1 und g, die Geraden, welche die gegenüberstehenden Seiten des Vierecks beziehlich in b_1 und b schneiden mögen; dann sind die neun so gewonnenen Punkte der Kurve zufolge der vorher gegebenen Entwickelung zugleich Punkte derjenigen Kurve dritter Ordnung, welche durch eine Ecke x eines Vierecks $xuyu_1$ beschrieben wird, dessen Ecken u und u_1 sich beziehlich in den Geraden eh_1 und eh bewegen, während die 180 Seiten xu, uy, yu_1, u_1x und die Diagonale xy † beziehlich um die Punkte a, b, b_1, a_1, d sich drehen. Diese so erzeugte Kurve hat mit der gegebenen neun Punkte gemein; und zwar, da d nicht in dem durch die übrigen acht Punkt schon *bedingten Punkte* (nämlich in dem Durchschnittspunkte der Geraden ag und a_1g_1) liegt, neun solche Punkte, durch welche eine Kurve dritter Ordnung bestimmt ist. Somit fällt die durch die Ecke x erzeugte Kurve mit der gegebenen zusammen, und die Definition No. 2 ist als allgemein nachgewiesen. Hiermit ist zugleich gelegentlich der nachstehende Satz bewiesen:

Wenn man einer Kurve dritter Ordnung ein Viereck ($fheh_1$) *einschreibt, dessen vier Seiten* (fh, he, eh_1, h_1f) *die Kurve beziehlich in*

vier neuen Punkten (a, g_1, g, a_1) *treffen, und man zieht von zweien dieser letztgenannten vier Punkte, die in gegenüberliegenden Seiten jenes Vierecks liegen (zum Beispiel von g und a oder von g_1 und a_1), die Geraden beziehlich nach einem neunten und einem zehnten Punkte der Kurve (d und x), was auf vier Arten möglich ist, so geht jedesmal die Verbindungslinie derjenigen Punkte (b und u oder b_1 und u_1), worin diese Geraden beziehlich die gegenüberliegenden Seiten des Vierecks treffen, durch einen und denselben Punkt (y) der Verbindungslinie des neunten und zehnten Punkts, welche jener vier möglichen Arten der Verbindung man auch wählen mag.*

Den Beweis davon, dass auch die *dritte* Definition allgemein sei, will ich hier nur mehr andeuten als ausführen. Es sei x (Fig. 16) der veränderliche Punkt, dessen Verbindungslinien mit den festen Punkten a, b, c beziehlich die festen Geraden A, B, C so schneiden, dass die drei Durchschnittspunkte u, v, w in gerader Linie liegen. In dem angeführten Aufsatze (S. 125 {hier S. 65 f.}) habe ich gezeigt, dass dann der geometrische Ort von x eine Kurve dritter Ordnung ist, welche durch folgende neun Punkte geht:

a, b, c, BC, CA, AB, bcA, caB, abC,

die ich beziehlich mit

a, b, c, a_1, b_1, c_1, α, β, γ

bezeichnen will. Nun lässt sich leicht zeigen, dass man jeder Kurve dritter Ordnung Dreiecke einschreiben kann, deren entsprechende Seiten sich auf der Kurve schneiden. Es seien abc und $a_1b_1c_1$ zwei solche, einer gegebenen Kurve dritter Ordnung eingeschriebene Dreiecke, deren entsprechende Seiten sich beziehlich in den Kurvenpunkten γ, α, β schneiden. Dann sind diese neun Punkte zugleich Punkte der Kurve dritter Ordnung, welche durch einen Punkt x beschrieben wird, dessen Verbindungslinien mit a, b, c die Geraden † b_1c_1, c_1a_1, a_1b_1 beziehlich in dreien in gerader Linien lie- 181 genden Punkten schneiden; und zwar sind es neun solche Punkte, durch

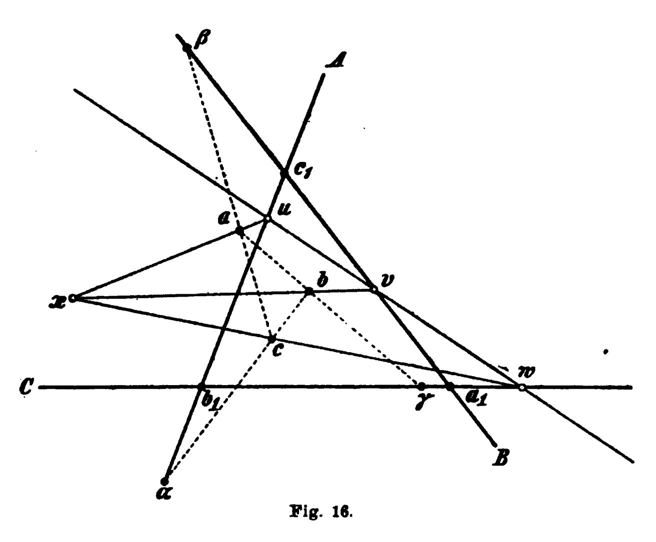


Fig. 16.

welche die Kurve dritter Ordnung bestimmt ist; folglich fällt die durch x erzeugte Kurve mit der gegebenen zusammen, und die Definition No. 3 ist als allgemein nachgewiesen.

Um den Gegenstand endlich noch von einem allgemeineren Gesichtspunkte aus zu betrachten, werde ich den allgemeinen Satz über die Art, wie Kurven dritter Ordnung und Kurven dritter Klasse durch Bewegung von geraden Linien erzeugt werden können, aufstellen, aus welchem man dann beliebig viele rein geometrische Definitionen der Kurven dritten Grades ableiten kann.

Um diesen Satz in leicht fasslicher Form aussprechen zu können, will ich mich des Begriffs der offenen (nicht geschlossenen) Figur bedienen. Die offene Figur besteht aus einer Reihe von Punkten und geraden Linien, in der Art, dass auf jeden Punkt eine durch ihn gehende Gerade und auf jede Gerade ein in ihr liegender Punkt folgt, bis endlich die Reihe entweder mit einem Punkte oder einer Geraden schliesst; wie sie denn auch entweder mit einem Punkte oder mit einer Geraden beginnt. Punkt und Gerade will ich zusammen *Elemente* nennen; das Element, mit welchem jene Reihe beginnt, will ich Anfangselement, das, womit sie schliesst, Endelement, beide zusammen Grenzelemente der offenen Figur nennen; alle Punkte der Reihe, die nicht Grenzelemente sind, nenne ich Ecken, alle Geraden der Reihe, die nicht Grenzelemente sind, Seitenlinien oder kurzweg Seiten der offenen Figur. Es sind hiernach also drei Fälle möglich: entweder beide Grenzelemente sind Punkte; dann hat die Figur eine Seite mehr als sie Ecken hat; oder beide Grenzelemente sind Gerade; dann hat sie eine Ecke mehr, als sie Seiten hat; oder endlich: Ein Grenzelement ist ein Punkt, das andere eine Gerade; dann hat sie ebenso viele Ecken als Seiten und verwandelt sich, wenn der Grenzpunkt in der Grenzlinie liegt, in eine geschlossene Figur. Wenn die offene Figur sich stetig verändert, so können bei dieser Veränderung in besonderen Uebergangsfällen zwei aufeinander folgende Gerade der Reihe oder zwei aufeinander folgende Punkte derselben zusammenfallen; alsdann kann man *dort* jeden Punkt der zusammenfallenden Geraden als zwischenliegende Ecke, *hier* jede durch die zusammenfallenden Punkte gelegte Gerade als zwischenliegende Seitenlinie der offenen Figur auffassen. Der Satz von Erzeugung der Kurven dritten Grades wird sich nun in folgender Gestalt darstellen lassen:

Wenn in einem Verein dreier offener Figuren, deren Anfangselemente und deren Endelemente zusammenfallen, alle Seiten der- 182 *selben um † feste Punkte und alle Ecken derselben in festen Geraden sich bewegen, so beschreibt jedes Grenzelement ein Gebilde dritten*

Grades); und ausser dieser giebt es keine durch blosse gerade Linien bedingte Erzeugung der Gebilde dritten Grades.*

Der Beweis des ersten Theils dieses Satzes ist in dem oben angeführten Aufsatze gegeben, in welchem der Satz für höhere Kurven aufgestellt ist. Dass es ausserdem keine andere lineale Erzeugungsweise der Gebilde dritten Grades giebt, folgt leicht aus demselben allgemeinen Satze für höhere Kurven, indem sich leicht zeigen lässt, dass alle andern Erzeugungsarten entweder höhere oder niedere Gebilde liefern. Der Satz, den ich hier aufgestellt habe, bietet drei wesentlich verschiedene Fälle dar, nämlich: erstens, wenn die drei offenen Figuren Punkte zu Grenzelementen haben, so beschreiben beide Punkte, jeder eine Kurve dritter Ordnung; oder zweitens, wenn die Grenzelemente gerade Linien sind, dann umhüllen diese Geraden jede eine Kurve dritter Klasse; oder endlich, wenn von den Grenzelementen eins ein Punkt, das andere eine Gerade ist, so wird von jenem eine Kurve dritter Ordnung beschrieben, von dieser eine Kurve dritter Klasse umhüllt. Ich will hierbei noch bemerken, dass von den drei oben zu einer Definition aufgestellten Erzeugungsarten No. 2 zu dem ersten dieser drei Fälle, und No. 1 und No. 3 zu dem letzten derselben gehören.

Stettin, den 28. November 1847.

---

*) Ich sage, ein Punkt beschreibe ein Gebilde n-ten Grades, wenn er eine Kurve n-ter Ordnung (ein Punktgebilde n-ten Grades) durchläuft, und eine Gerade beschreibe ein Gebilde n-ten Grades, wenn sie eine Kurve n-ter Klasse (ein Liniengebilde n-ten Grades) umhüllt.

IV.

[187] Der allgemeine Satz über die Erzeugung aller algebraischer Kurven durch Bewegung gerader Linien.

Von

Prof. Dr. **H. Grassmann,**

Oberlehrer an der Friedrich-Wilhelm-Schule zu Stettin.

Crelles Journal Bd. 42, Heft III, S. 187—192 (1851).

Vor längerer Zeit habe ich in dem ersten Theile meiner Ausdehnungslehre (§ 145—148)*) einen allgemeinen Satz mitgetheilt über die Erzeugung der Kurven höherer Ordnungen sowie der algebraischen Oberflächen durch Bewegung gerader Linien oder Ebenen; und im *Crelle*'schen Journal (Band 31 und 36) habe ich besondere Anwendungen desselben, besonders auf Kurven dritter Ordnung, gegeben. Die Bearbeitung des zweiten Theils jenes Werks, den ich jetzt unter der Feder habe, hat mich wieder auf den Gegenstand zurückgeführt, und ich bin dabei zu einer Reihe neuer Resultate gelangt, von denen ich diejenigen, welche sich an die in den erwähnten Abhandlungen dargestellte Analyse anschliessen, den Lesern des *Crelle*'schen Journals in einer Reihe von Aufsätzen mitzutheilen beabsichtige.

Der oben erwähnte Satz, dem ich hier eine wesentliche Ergänzung hinzufügen will, findet sich im 31. Bande des *Crelle*'schen Journals {hier S. 50} in folgender Form ausgesprochen:

Wenn die Lage eines beweglichen Punktes x in der Ebene dadurch beschränkt ist, dass ein Punkt und eine Gerade, welche durch Konstruktionen vermittels des Lineals aus jenem Punkte x und einer Reihe fester Punkte und Geraden hervorgehen, zusammenliegen sollen (das heisst der Punkt in der Geraden liegen soll), so beschreibt der Punkt x ein algebraisches Punktgebilde und zwar ein Punktgebilde n-ten Grades (eine

*) {Ges. Werke I, 1, S. 245—249.}

Kurve n-ter Ordnung), wenn bei den Konstruktionen der bewegliche Punkt n-mal angewandt ist.

Den Beweis dieses Satzes, der eine Erweiterung des *Pascal*'schen Satzes über das mystische Sechseck ist, habe ich in der Ausdehnungslehre aus den † Principien dieser Wissenschaft und im 31. Bande 188 des *Crelle*'schen Journals aus der gewöhnlichen Analyse hergeleitet, und habe diesem Beweise hier nichts hinzuzufügen. Um jedoch den Satz einer allgemeinen Behandlung algebraischer Kurven zu Grunde legen zu können, bedarf derselbe noch einer Ergänzung, indem nämlich gezeigt werden muss, *dass auch umgekehrt jede algebraische Kurve auf die in dem Satze angegebene Weise erzeugt werden kann.* Und dies nachzuweisen ist der Hauptzweck des gegenwärtigen Aufsatzes.

Ist $f(x, y) = 0$ die Gleichung einer algebraischen Kurve, bezogen auf irgend ein Axenkreuz, also $f(x, y)$ eine ganze rationale Funktion von x und y, so geht diese Funktion aus x, y und den Konstanten durch Addition und Multiplikation hervor. Es kommt also nur darauf an, die Addition und Multiplikation zweier Zahlgrössen durch lineale Konstruktion darzustellen. Unter linealer Konstruktion verstehe ich nicht nur die Verbindung zweier endlich entfernter Punkte durch eine gerade Linie, sondern auch das Ziehen der Parallele oder, anders ausgedrückt, die Verbindung eines endlich und eines unendlich entfernten Punktes durch eine Gerade, also überhaupt das Verbinden zweier Punkte durch eine Gerade. Um nun die Addition und Multiplikation durch geometrische Konstruktionen darzustellen, kommt es darauf an, jede der zu verknüpfenden Zahlgrössen durch geometrische Grössen zu ersetzen.

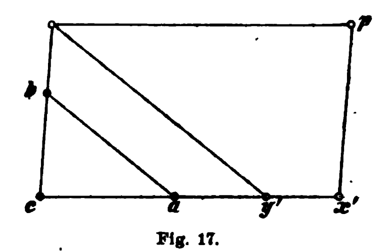


Fig. 17.

Ich nehme zwei Koordinatenaxen an, die sich in c durchschneiden, und auf jeder derselben ein bestimmtes Stück als Maass; es sei dies ca auf der x-Axe (Fig. 17) und cb auf der y-Axe; wobei es ganz gleichgültig ist, ob diese beiden Maasse gleich lang sind oder nicht. Durch das Maass ca seien die Abscissen, durch das Maass cb die Ordinaten gemessen, und die Quotienten dieser Messungen seien eben x und y. Der Endpunkt der Abscisse sei x'; von dem Endpunkte der Ordinate sei, um alle Grössen auf derselben Linie, der Abscissenaxe, zu haben, die Parallele zu ba gezogen, welche die Abscissenaxe in y' schneide. Dann ist

$$x = \frac{cx'}{ca}, \quad y = \frac{cy'}{ca}.$$

Auch ist klar, wie sowohl x' als y' aus dem die Kurve konstruirenden Punkte, den wir p nennen wollen, durch lineale Konstruktionen erfolgen (Fig. 17). Ferner nehmen wir an, dass auch jede Konstante in der Funktion $f(x, y)$ durch einen Punkt der Geraden ca in der Art dargestellt sei, dass die Entfernung dieses Punktes von dem Anfangspunkt c, gemessen durch das Maass ca, jener Konstanten gleich sei. Auf diese Weise sind dann alle in der Funktion f vorkommenden Grössen durch Punkte der Abscissenaxe dargestellt, und es kommt nur darauf an, auch die *Summe* und das *Produkt* zwei solcher Grössen auf gleiche Weise durch Punkte dieser Linie vermittels linearer Konstruktionen darzustellen.

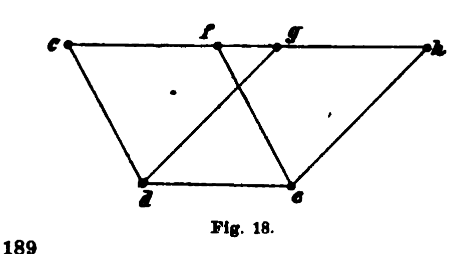


Fig. 18.

189

Es seien (Fig. 18) zuerst f und g zwei solche Punkte und h der gesuchte, also im ersten Falle

$$\frac{cf}{ca} + \frac{cg}{ca} = \frac{ch}{ca}$$

oder

$$cf + cg = ch.$$

Die einfachste lineale Konstruktion der Punktes h ist die, dass man einen Punkt d ausserhalb der Geraden cf zu Hülfe nimmt, von f die Parallele zu cd, von d die zu cf zieht und von dem Durchschnitt e dieser beiden Linien die Parallele zu dg zieht, welche die Gerade cf in dem gesuchten Punkte h schneidet.

Für die Multiplikation hat man

$$\frac{cf}{ca} \cdot \frac{cg}{ca} = \frac{ch}{ca}$$

oder

$$cf \,.\, cg = ch \,.\, ca.$$

Aus der Proportion $ca : cf = cg : ch$ ergiebt sich dann die lineale Konstruktion von h unmittelbar. Hieraus folgt also, dass $f(x, y)$ aus dem die Kurve konstruirenden Punkte p und konstanten Punkten und Geraden sich lineal konstruiren lässt. Soll nun $f(x, y)$ gleich Null sein, so muss der zu $f(x, y)$ gehörige Punkt in c fallen, also die Gerade, deren Durchschnitt mit ca den zu $f(x, y)$ gehörigen Punkt liefert, muss durch c gehen: das heisst, es findet die in dem Hauptsatze ausgesprochene Bedingung statt, dass ein Punkt und eine Gerade, welche aus linealen Konstruktionen hervorgehen, zusammenliegen sollen; also ist die gegebene Kurve durch die in dem Hauptsatz angegebene Konstruktion erzeugbar. Q. d. e.

Um den Hauptsatz für die Anwendung bequemer zu machen, will ich den Begriff der *offenen Figur* und der Verkettung von geraden Linien einführen. Die offene Figur (s. *Crelles* Journal Bd. 36 {hier S. 78}) besteht aus einer Reihe von Punkten und geraden Linien in der Art, dass auf jeden Punkt eine durch ihn gehende Gerade und auf jede Gerade ein in ihr liegender Punkt folgt, bis endlich die Reihe entweder mit einem Punkte oder mit einer Geraden schliesst; wie sie denn auch entweder mit einem Punkte oder mit einer Geraden beginnt. Punkt und Gerade nenne ich zusammen *Elemente;* das Element, mit welchem jene Reihe beginnt oder schliesst, nenne ich *Anfangs-* oder *Endelement*, beide zusammen *Grenzelemente;* alle Punkte oder Geraden jener Reihe, die † *nicht* Grenzelemente sind, nenne ich *Ecken* oder 190 *Seiten* der offenen Figur. Wenn man nun (Fig. 19) ein Element x zum Anfangselement mehrerer offenen Figuren macht, dann unter den so gewonnenen offenen Figuren zwei beliebige so zusammenschliesst, dass sie ein gemeinschaftliches Endelement erhalten, welches zugleich Anfangselement einer neuen offenen Figur wird, und beliebig fortfährt, die jedesmal noch übrigen offenen Figuren auf die angegebene Weise paarweise zusammenzuschliessen, so will ich die so hervorgehende Figur eine *Verkettung gerader Linien* nennen; das Element x soll das *Anfangselement* dieser Verkettung, die sämtlichen übrigen Grenzelemente der offenen Figuren sollen die *Uebergangselemente* der Verkettung heissen, während ich die Ecken und Seiten der offenen Figuren zugleich als Ecken und Seiten der Verkettung setze. Wenn insbesondere zuletzt nur Eine offene Figur übrig bleibt, deren Endelement mit dem Anfangselement x der Verkettung zusammenfällt, so nenne ich die Verkettung eine *geschlossene*, und zwar vom n-ten Grade, wenn von dem Anfangselement (x) n offene Figuren ausgehen (die letzte mit eingerechnet, welche x zum Elemente hat). Dann lautet der Satz wie folgt:

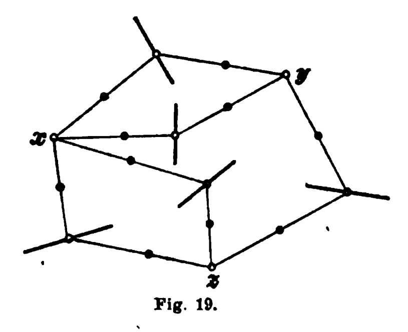


Fig. 19.

Wenn sich eine Verkettung n-ten Grades lineal, das heisst so bewegt, dass alle Seiten durch feste Punkte gehen und alle Ecken in festen Geraden bleiben, so beschreibt das Anfangselement der Verkettung ein Gebilde n-ten Grades.

Wendet man diesen Satz zum Beispiel auf die Kurven zweiter, dritter und vierter Ordnung an, so erhält man folgende abgeleiteten Sätze:

1) *Wenn in einer geschlossenen Figur alle Ecken und Seiten, mit Ausnahme einer Ecke, sich lineal bewegen (das heisst die Ecken in festen Geraden, die Seiten um feste Punkte), so beschreibt diese letzte Ecke einen Kegelschnitt.*

2) *Wenn drei offene Figuren, mit gemeinschaftlichen Grenzelementen, sich lineal bewegen (das heisst so, dass die Ecken in festen Geraden bleiben, die Seiten durch feste Punkte gehen), so beschreibt jedes der Grenzelemente ein Gebilde dritten Grades (siehe Crelles Journal Band 36 {hier S. 78f.}).*

3) *Wenn fünf offene Figuren sich lineal bewegen, von denen vier alle dasselbe Anfangselement (x) und paarweise dieselben Endelemente (y, z) haben, während die Grenzelemente der fünften mit diesen Endelementen (y, z) zusammenfallen, so beschreibt das Anfangselement (x) ein Gebilde vierten Grades (siehe Fig. 19).*

191 Ich füge hier noch zwei Bemerkungen hinzu, welche zur Erläuterung und richtigen Anwendung des Hauptsatzes dienen werden. Zuerst ist es klar, dass von den offenen Figuren einige zusammenfallen können, und zwar in der Art, dass sie auch gleiche Grenzelemente haben. Dies Zusammenfallen wird sich dann in der Verkettung selbst nur dadurch zu erkennen geben, dass ein folgendes Uebergangselement mehr als drei Grenzelemente in sich vereinigt. Der Grad der Verkettung, und also auch des erzeugten Gebildes, wird sich auch in diesem Falle leicht angeben lassen. Es werde zum Beispiel in Fig. 19 der Weg gesucht, den y beschreibt, also y als Anfangspunkt der Verkettung gesetzt. Alsdann gehen von dem Uebergangselement x, ausser den beiden offenen Figuren, die von y direct nach x gehen, noch zwei offene Figuren aus: mithin müssen jene ersteren beiden doppelt gerechnet werden, und es ist die Verkettung vom *fünften* Grade; y beschreibt also eine Kurve fünften Grades, und dasselbe gilt von z. Es würde sich leicht nachweisen lassen, dass in solchen Fällen jedesmal Kurven mit Doppelpunkten erzeugt werden (vergl. darüber die Abhandlung in dem 31. Bande des *Crelle*schen Journals, Seite 128 {hier S. 69}). Doch möge dieser Nachweis dem Leser überlassen bleiben.

Die zweite Bemerkung bezieht sich auf die Uebergangsfälle, in welchen der Grad des Gebildes scheinbar niedriger wird. Dies kann auf zweifache Art geschehen, indem entweder die ganze Funktion n-ten Grades $f(x, y)$, welche, gleich Null gesetzt, die Kurve bestimmt, in Faktoren sich zerfällen lässt, von denen zwei oder mehrere einander gleich sind, oder wenn Koefficienten Null werden und dadurch die Glieder höherer Grade wegfallen; ja es könnten alle Koefficienten Null und dadurch die Kurve ganz unbestimmt werden. In allen diesen

Fällen wird man jedoch durch Variation der Konstanten sogleich die Kurve n-ter Ordnung wieder in Evidenz bringen können; und insofern wir also jene besondern Fälle nur als Uebergangsfälle betrachten, in denen die allgemeinen Konstanten gewisse besondere Werthe annehmen, werden wir auch diese Uebergangsgebilde als Gebilde n-ten Grades setzen *müssen*. Nur unter dieser Voraussetzung hat der aufgestellte Satz seine vollkommen allgemeine Bedeutung, wie denn auch alle allgemeinen Sätze über algebraische Kurven nur unter dieser Voraussetzung gelten. Schliesst man das unbestimmte Gebilde n-ten Grades aus und nimmt an, dass die sämtlichen Koefficienten der Glieder der m höchsten Grade verschwinden, so bleibt die Kurve vom $(n-m)$-ten Grade; und um † sie als Kurve n-ten Grades aufzufassen, hat man m 192 gerade Linien, welche ins Unendliche fallen, mit der Kurve $(n-m)$-ter Ordnung zusammenzufassen. Obgleich das soeben Gesagte hinlänglich bekannt ist, so glaubte ich es doch hier noch einmal in Erinnerung bringen zu müssen, da die Art, wie wir aus einer Gleichung n-ten Grades die lineale Erzeugung der betreffenden Kurve ableiteten, stets, wenn die Gleichung mehr als ein variables Glied enthält, auf ein Gebilde von höherem als dem n-ten Grade hinführt, welches sich aber in ein Gebilde n-ten Grades und in eine Reihe von geraden Linien, die ins Unendliche fallen, zerfällen lässt. Ich denke, auf diese besonderen Verhältnisse in einer späteren Abhandlung zurückzukommen.

Stettin, im Juli 1851.

V.

[193] Die höhere Projektivität und Perspektivität in der Ebene; dargestellt durch geometrische Analyse.

Von

Prof. Dr. **H. Grassmann**,

Oberlehrer an der Friedrich-Wilhelm-Schule zu Stettin.

Crelles Journal Bd. 42, Heft III, S. 193—203 (1851).

§ 1.

Das Rechnen mit planimetrischen Produkten.

Die fruchtbaren Beziehungen der Perspektivität und Projektivität, wie sie von *Steiner* zuerst mit so viel Glück bearbeitet sind, und die entsprechenden Beziehungen für Kurven höherer Grade ergeben sich aus der geometrischen Analyse, wie ich sie besonders im 31. Bd. des *Crelle*schen Journals {hier S. 49ff.} entwickelt habe, so unmittelbar und leicht, dass man nur nöthig hat, die fortschreitende Bildung eines geometrischen Produktes mit einem variablen Punkte oder Strahl mit Aufmerksamkeit zu verfolgen, um jene Beziehungen in ihrer ganzen Einfachheit und Anschaulichkeit vor Augen zu haben. Der Uebersicht wegen werde ich den Algorithmus, wie ich ihn in der angeführten Abhandlung dargestellt habe und ihn hier anwenden will, ins Gedächtniss zurückrufen. Ich verstehe nämlich (abgesehen von den in meiner Ausdehnungslehre zugleich mit dargestellten metrischen Werthen der räumlichen Grössen) unter ab die Verbindungslinie der beiden Punkte a und b, unter AB den Durchschnittspunkt der beiden Geraden A und B und setze ab oder AB Null, wenn a und b oder A und B zusammenfallen. Endlich soll die Gleichung $Ab = 0$ ausdrücken, dass der Punkt b in der Geraden A liegt. Ueberall werde ich die Punkte mit kleinen, die {geraden} Linien mit grossen Buchstaben bezeichnen und festsetzen, dass, wenn in einem solchen Ausdrucke keine Klammern

stehen, die Verknüpfung von der Linken zur Rechten fortschreiten soll. Also wird zum Beispiel unter abC der Durchschnitt der beiden Geraden ab und C zu verstehen sein. Ich werde solche Ausdrücke *planimetrische Produkte* nennen*). Zugleich erinnere ich an das in der erwähnten Abhandlung mitgetheilte Resultat, dass, wenn in der Gleichung $Ab = 0$ A und b planimetrische Produkte von Punkten und Linien sind und in diesen beiden Produkten der veränderliche Punkt x zusammen n-mal als Faktor vorkommt, daraus zwischen den Koordinaten von x † eine Gleichung n-ten Grades entspringt, also x eine Kurve n-ter 194 Ordnung beschreibt. Diesen Satz, der eine Erweiterung des bekannten *Pascal*'schen Satzes ist, habe ich in der vorhergehenden Abhandlung in der Art ergänzt, dass auch umgekehrt jede algebraische Kurve sich in der soeben angegebenen Weise, das heisst hier durch eine Gleichung darstellen lässt, deren eine Seite Null und deren andere ein planimetrisches Produkt ist, welches den veränderlichen, die Kurve beschreibenden Punkt x als Faktor enthält.

Noch will ich der Bequemlichkeit wegen folgende Bezeichnungen mir erlauben, die auch schon sonst in analoger Weise üblich sind. Nämlich, wenn zwei Punkte a und b oder zwei Gerade A und B zusammenfallen, so will ich dies durch

$$a \equiv b, \quad A \equiv B$$

ausdrücken; welche Formeln also identisch sind mit den Gleichungen

$$ab = 0, \quad AB = 0.$$

Ferner soll durch $Ab \,.\, c$, wenn der Punkt b nicht in der Geraden A liegt, gleichfalls der Punkt c dargestellt werden, so dass also

$$Ab \,.\, c \equiv c, \quad \text{wenn } Ab \text{ ungleich Null ist.}$$

Um den Algorithmus flüssiger zu machen, werde ich die einfachsten Umgestaltungsformeln ableiten. Unmittelbar leuchtet ein, dass

$$(1) \qquad ab \equiv ba, \quad AB \equiv BA$$

ist. Ferner, wenn in dem Produkt abC, welches den Durchschnitt der beiden Geraden ab und C darstellt, der Punkt b in der Geraden C liegt, so wird $abC \equiv b$ sein, wenn nicht etwa auch a in C liegt; in diesem letzteren Falle ist aber offenbar $abC = 0$. Beides lässt sich zusammenfassen in die Gleichung

$$(2) \qquad abC \equiv aC \,.\, b,$$

*) Nach der in meiner „Ausdehnungslehre" (§ 127, 128 {Ges. Werke I, 1, S. 210—212}) gegebenen Nomenklatur würde ich sie „auf die Ebene bezügliche Produkte" nennen müssen, womit der hier gewählte Ausdruck gleichbedeutend ist.

folglich eine Gleichung zweiten Grades, das heisst der Durchschnitt zweier projektivischer Strahlenbüschel ist ein Kegelschnitt. Sind die beiden Strahlenbüschel perspektivisch, so zerfällt der Kegelschnitt in zwei gerade Linien, deren eine der perspektivische Durchschnitt beider Strahlenbüschel, die andere die Verbindungslinie der Mittelpunkte ist.

Alles dies sind bekannte Resultate, deren Ableitung aus dem angegebenen Algorithmus ich hier nur ausgeführt habe, um den Weg zur höheren Perspektivität zu bahnen. Diese ergiebt sich bei der Verfolgung des eingeschlagenen Weges von selbst, wenn man den variablen Punkt x wiederholt in das Produkt einführt.

§ 3.

Projektivität und Perspektivität von Büscheln erster und zweiter Ordnung.

Man betrachte das Produkt

$$xaBcDxB_1. \tag{7}$$

Es wird dadurch, wenn das Produkt nicht Null ist, ein bestimmter Punkt in B_1 dargestellt, welcher dem Punkte x entspricht. Fragen wir zuerst, welchen Punkten x ein- und derselbe Punkt g in B_1 entspricht, so haben wir, da dann der Strahl $xaBcDx$ durch g gehen muss, die Gleichung

$$xaBcDxg = 0, \tag{8}$$

197 also die Gleichung eines Kegelschnitts. Allen Punkten dieses Kegelschnitts entspricht in B_1 derselbe Punkt g; wir können daher sagen, diesem Kegelschnitte selbst entspreche der Punkt g. Wird g als der Durchschnitt von B_1 und einer Geraden G gesetzt, so erhält man die Gleichung in der Form

$$xaBcDxB_1G = 0. \tag{9}$$

In dieser Form zeigt die Gleichung unmittelbar, dass alle Kegelschnitte, welche den verschiedenen Punkten g entsprechen, diejenigen Punkte gemein haben, welche das Produkt $xaBcDxB_1$ Null machen. Welche Punkte sind dies? Um bei der Beantwortung dieser und ähnlicher Fragen nicht durch Nebenfragen gestört zu werden, wollen wir zuerst einen Fall behandeln, den wir dann bei der ganzen folgenden Betrachtung ausschliessen werden, nämlich den, dass zwei auf einander folgende konstante Faktoren zusammenfallen (der Punkt in die Linie). Fällt zum Beispiel c in D, so lassen sich nach Formel (2) diese beiden Faktoren vertauschen und man erhält $xaBcD \equiv xaBD\,.\,c$.

Nun ist die Gleichung $xaBD = 0$, da sie ausdrückt, dass der Punkt xaB in der Geraden D liegt, die Gleichung einer geraden Linie, und damit zerfällt dann der Kegelschnitt (8) in zwei gerade Linien, von denen die eine, nämlich die durch die Gleichung $xaBD = 0$ vorgestellte, allen jenen Kegelschnitten gemein ist, während die andere, die durch die Gleichung $cxg = 0$ dargestellt wird, um den Punkt c rotirt. Sieht man daher von jener unveränderlichen Linie ab, so haben wir wieder den früheren Fall eines Strahlenbüschels (um c) und einer damit perspektivischen Geraden B_1. Dasselbe Zerfallen in niedere Gebilde wird offenbar überall eintreten, wo ein konstanter Punkt in eine konstante Gerade fällt, die ihm als Faktor folgt oder vorangeht. Ich werde daher diesen Fall ein- für allemal von der Betrachtung ausschliessen.

Kehrt man nun zu der Frage zurück, welche Punkte x das Produkt $xaBcDxB_1$ Null machen, so geschieht dies *erstens* durch den Punkt $x \equiv a$. *Zweitens*, wenn x nicht in a fällt, kann auch xaB nicht Null sein; denn dann müsste die Gerade xa in B fallen, also auch der Punkt a in B, was wir ausgeschlossen haben. Aus demselben Grunde kann also auch $xaBc$ und $xaBcD$ nicht Null werden. Der nächste mögliche Fall ist demnach, dass der Punkt $xaBcD$ mit x zusammenfällt. Dann muss x sowohl in der Geraden D als {auch} in der Geraden $xaBc$ liegen. Letzteres giebt die Gleichung $xaBcx = 0$, das heisst die Gleichung eines Kegelschnitts, der in die Geraden B und ac zerfällt. Die Durchschnitte dieser beiden Geraden mit der Geraden D geben also zwei Punkte, und zwar die beiden einzigen, für welche der Punkt $xaBcD$ mit x zusammenfällt. *Drittens*, † wenn auch 198 $xaBcDx$ nicht verschwindet, stellt es einen durch x gehenden Strahl vor. Soll also dann $xaBcDxB_1$ Null sein, so muss dieser Strahl mit B_1 zusammen-, also sowohl der Punkt x als {auch} der Punkt $xaBcD$ in B_1 fallen. Letzteres giebt $xaBcDB_1 = 0$ oder durch Umkehrung $B_1DcBax = 0$; das heisst x liegt in der Geraden B_1DcBa, aber auch in B_1, also im Durchschnitt beider, das heisst es ist

$$x \equiv B_1DcBaB_1.$$

Also machen folgende vier Punkte, aber auch keine andern, statt x gesetzt, das Produkt $xaBcDxB_1$ gleich Null, nämlich

$$a, \quad BD, \quad acD, \quad B_1DcBaB_1,$$

die wir nach der Reihe mit

$$a, \quad b, \quad d, \quad e$$

bezeichnen wollen (Fig. 20). Die Kegelschnitte (8) oder (9) schlingen sich also alle um diese vier festen Punkte a, b, d, e. Man erhält demnach eine Schaar von Kegelschnitten, welche alle die vier festen Punkte a, b, d, e gemein haben und deren jedem in B_1 ein Punkt, nämlich derjenige Punkt entspricht, in welchem dieser Kegelschnitt die Gerade B_1 ausser dem Punkte e zum zweitenmal schneidet. Wir können jene Schaar einen *Kurvenbüschel zweiter Ordnung* nennen, a, b, d, e die *Mittelpunkte* dieses Büschels. Von der Geraden B_1, welche durch einen dieser Mittelpunkte (e) geht und deren Punkte den durch diese gehenden Kegelschnitten jenes Büschels entsprechen, lässt sich sagen, dass sie mit jenem Kurvenbüschel *perspektivisch* sei.

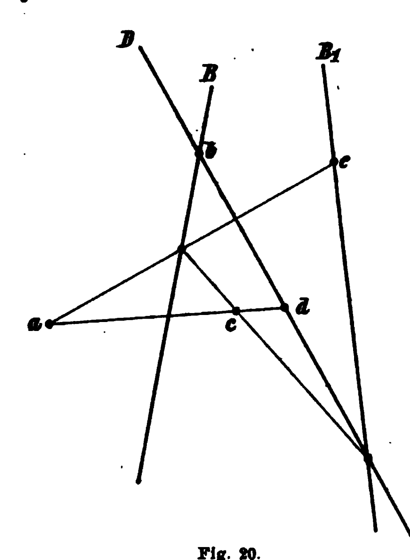


Fig. 20.

Betrachten wir jetzt weiter das Produkt

$$xaBcDxB_1c_1D_1e_1F_1\ldots,$$

so zeigt sich der Strahlenbüschel um c_1 mit der Geraden B_1 perspektivisch, und man kann in diesem Falle, nach dem Princip der *Steiner*'schen Benennung, auch diesen Strahlenbüschel mit dem Kurvenbüschel perspektivisch nennen. Nach demselben Princip werden wir die Gerade D_1, den Strahlenbüschel e_1, die Gerade F_1 u. s. w. mit jenem Kurvenbüschel *projektivisch* nennen können. Betrachten wir den Durchschnitt jenes Kurvenbüschels mit einem der damit projektivischen Strahlenbüschel, etwa mit $xaBcDxB_1c_1D_1e_1$, das heisst also die Gesamtheit der Durchschnittspunkte der Strahlen dieses Büschels mit den entsprechenden Kegelschnitten jenes Kurvenbüschels, und ist x dieser variable Durchschnitt, so heisst das: der Strahl $xaB\ldots e_1$ soll durch x gehen, und wir erhalten die Gleichung

$$xaBcDxB_1c_1D_1e_1x = 0,$$

199 also eine Gleichung dritten Grades: das heisst *der Durchschnitt eines Büschels erster und {eines} zweiter Ordnung ist eine Kurve dritter Ordnung.*

§ 4.

Projektivität und Perspektivität von Büscheln erster und dritter Ordnung.

Ehe ich zur *allgemeinen* Betrachtung übergehe, will ich den eingeschlagenen Weg noch einen Schritt weiter verfolgen und betrachte zu dem Ende das Produkt (siehe Fig. 21)

$$xaBcDxB_1c_1D_1xB_2.$$

Jedem Punkte x, der dieses Produkt nicht Null macht, entspricht in B_2 ein bestimmter Punkt. Es werde in B_2 der Punkt $g \equiv B_2G$ be-

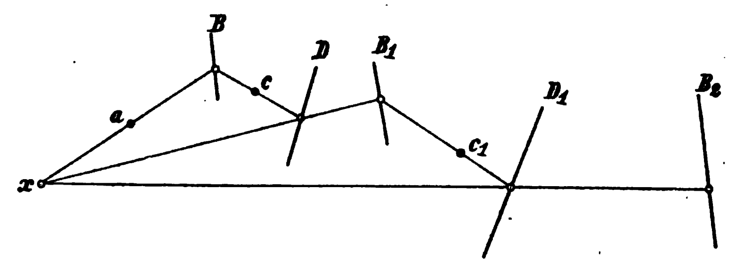


Fig. 21.

trachtet, und man suche die Punkte x, welchen derselbe entspricht das heisst für welchen der Strahl $xa\ldots D_1x$ durch g geht, so hat man

$$(9\,\mathrm{a})\quad \begin{cases} xaBcDxB_1c_1D_1xg = 0 \quad \text{oder} \\ xaBcDxB_1c_1D_1xB_2G = 0; \end{cases}$$

mithin ist der Ort von x eine Kurve dritter Ordnung. Allen Punkten dieser Kurve entspricht in B_2 derselbe Punkt g, also jener Kurve dieser Punkt. Die Frage, welche Punkte alle diese Kurven dritter Ordnung gemein haben, ist identisch mit der Frage, welche Punkte, statt x gesetzt, das Produkt $xaBcDxB_1c_1D_1xB_2$ Null machen. Dies sind aber erstens die vier Punkte, welche $xaBcDxB_1$ Null machen. Ist zweitens dieser Theil des Produkts nicht Null, so ist auch das Produkt bis D_1 hin ungleich Null und stellt einen bestimmten Punkt in D_1 vor. Soll dieser mit x multiplicirt Null geben, das heisst mit x zusammenfallen, so muss x in D_1 liegen, und zugleich in dem Strahle $xaBcDxB_1c_1$. Letzteres giebt die Gleichung

$$(10)\qquad xaBcDxB_1c_1x = 0.$$

Da hier $xaBcDx$, B_1 und c_1x Linien vorstellen, so können wir die Ordnung nach den Bemerkungen zu Formel (4) verändern und dafür

$$xaBcDx(c_1x)B_1 = 0$$

schreiben, und da hier x in c_1x liegt, so ist auch nach Formel (2)

$$xaBcD(c_1x) . xB_1 = 0;$$

das heisst es zerfällt die Kurve (10) in den Kegelschnitt

(11) $$xaBcDc_1x = 0$$

und in die Gerade B_1. So wird das Produkt $xa \dots D_1x$ durch den Durchschnitt B_1D_1 und durch die beiden Durchschnitte des Kegelschnitts (11) und der Geraden D_1 auf Null gebracht. Zu diesem Resultate gelangt man übrigens auch leicht durch die blosse Betrachtung der Figur. Ist endlich dies Produkt $xa \dots D_1x$ ungleich Null, so stellt es einen durch x gehenden Strahl vor; soll dann $xa \dots D_1xB_2$ Null 200 werden, so muss dieser Strahl mit B_2 † zusammen-, also sowohl x in B_2 fallen als auch der Punkt $xa \dots D_1$. Letzteres giebt die Gleichung

$$xaBcDxB_1c_1D_1B_2 = 0,$$

also einen Kegelschnitt, dessen Durchschnitte mit B_2 die letzten beiden Punkte sind, welche $xa \dots D_1xB_2$ Null machen. Setzen wir hier den Punkt $B_2D_1c_1B_1 \equiv e_1$, so wird die Gleichung

$$xaBcDxe_1 = 0.$$

Fasst man diese Resultate zusammen, so machen folgende neun Punkte, aber auch keine andern, statt x gesetzt, das Produkt $xaBcDxB_1c_1D_1xB_2$ Null:

$$a,\ BD,\ acD,\ B_1DcBaB_1,\ B_1D_1,\ \begin{cases} xaBcDc_1x = 0 \\ D_1x = 0 \end{cases} \begin{cases} xaBcDe_1 = 0 \\ B_2x = 0; \end{cases}$$

Punkte, welche wir nach der Reihe durch

$$a,\ b,\ d,\ e,\ f,\quad g \text{ und } h,\quad i \text{ und } k$$

bezeichnen wollen. Die Kurven dritter Ordnung (9a) haben also diese neun festen Punkte $a \dots k$ gemein. Man erhält demnach eine Schaar von Kurven dritter Ordnung, welche sich um jene neun festen Punkte schlingen und deren jeder in B_2 ein Punkt, nämlich derjenige Punkt entspricht, in welchem die Kurve die Gerade ausser den Punkten i und k zum drittenmale schneidet. Wir werden daher jene Kurvenschaar einen *Kurvenbüschel dritter Ordnung*, die neun Punkte $a \dots k$ die Mittelpunkte dieses Büschels nennen und den Büschel mit der durch zwei der Mittelpunkte i und k gehenden Geraden perspektivisch setzen können. Von hier aus gelangt man, genau wie vorher, zur Projektivität eines Gebildes dritter und erster Ordnung und zu dem Durchschnitt eines Büschels dritter und erster Ordnung, welcher eine Kurve vierter Ordnung liefert.

§ 5.

Allgemeine Projektivität und Perspektivität.

Um nun das eingeschlagene Verfahren auf *beliebige* planimetrische Produkte anzuwenden, die das variable Element x enthalten, nehme ich an, es sei X irgend ein Produkt, welches eine veränderliche, von x abhängige Gerade darstellt, und A sei eine feste Gerade. Dann drückt XA, wenn es nicht etwa Null ist, den Durchschnitt der Geraden X und A aus. Jedem Punkte x, der nicht XA Null macht, entspricht eine bestimmte Gerade X und ein bestimmter Punkt in A. Welchen Punkten x entspricht derselbe Punkt in A, zum Beispiel welchen der Punkt AG, den wir g nennen wollen? Denjenigen Punkten offenbar, für welche X durch g geht, das heisst, für welche

$$(12)\quad \begin{cases} Xg = 0 \text{ oder} \\ XBG = 0 \end{cases}$$

ist. Enthält X den Faktor x n-mal, so ist die gefundene Gleichung 201 vom n-ten Grade und stellt also eine Kurve n-ter Ordnung vor. Allen Punkten dieser Kurve entspricht ein- und derselbe Punkt g in A oder, anders ausgedrückt: jener Kurve entspricht dieser Punkt. Setzt man g variabel, so erhält man eine Kurvenschaar, und jeder Kurve dieser Schaar entspricht ein Punkt in A. Es bleibt nun noch die Frage zu lösen: welche Punkte haben alle jene Kurven gemeinschaftlich, oder, anders ausgedrückt: für welche Punkte x ist $XA = 0$? Um diese Frage zu beantworten, gehen wir auf die Entstehung der Linie X zurück. Dieselbe kann nur als Verbindungslinie zweier Punkte entstanden sein. Es seien diese Punkte p und q, also $X \equiv pq$ und

$$(12a)\quad pqA = 0.$$

Ist nun pq ungleich Null, so drückt diese Gleichung aus, dass die Gerade pq mit A zusammenfällt, das heisst, dass sowohl p als {auch} q in A liegt, und man erhält die Gleichungen

$$(13)\quad pA = 0 \text{ und } qA = 0.$$

Ist p in Bezug auf x von α-tem Grade, q von β-tem, so sind die durch diese beiden Gleichungen dargestellten Kurven beziehlich von denselben Graden und liefern $\alpha\beta$ Punkte, welche pqA Null machen, ohne pq Null zu machen.

Setzen wir hier statt A eine variable Linie R, welche in Bezug auf x vom Grade γ ist, so werden die beiden obigen {Gleichungen (13)}

zu Gleichungen von den Graden $\alpha+\gamma$, $\beta+\gamma$, und geben also $(\alpha+\gamma)(\beta+\gamma)$ Punkte, welche pqR Null machen, ohne pq Null zu machen. Dasselbe würde auch noch gelten, wenn p und q Linien wären und R ein Punkt. Hierdurch hat man dann zugleich ein Mittel, um zu untersuchen, welche Punkte pq Null machen, indem man nur wieder p in seine zwei Linienfaktoren zu zerlegen braucht, und so fort. So können also die sämtlichen Punkte, welche XA gleich Null machen, gefunden werden.

Fragt man nach der *Anzahl* der Punkte, so ergiebt sich leicht der interessante Satz, dass die Anzahl der Punkte, die ein Produkt pq Null machen, in welchem p in Bezug auf x vom Grade α, q vom Grade β ist, und in welchem nur Punkte mit Punkten und Linien mit Linien multiplicirt sind, gleich $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$ sei. Es gilt dies zunächst für das Produkt von x in einen konstanten Punkt a, indem xa Null wird {nur} für $x\equiv a$. Gilt der Satz aber für irgend ein Produkt pq, so gilt er auch noch, wenn zu pq ein Faktor R hinzutritt. Denn es seien p, q, R beziehlich von den Graden α, β, γ, so ist nach der Annahme die Anzahl der Punkte, welche pq Null machen, gleich $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$; die Anzahl der Punkte, welche pqR Null 202 machen, † ohne pq Null zu machen, ist, wie wir oben sahen, gleich $(\alpha+\gamma)(\beta+\gamma)=\alpha\beta+(\alpha+\beta)\gamma+\gamma^2$; also ist die Anzahl der Punkte, welche überhaupt pqR Null machen, die Summe beider Zahlen, mithin gleich $(\alpha+\beta)^2+(\alpha+\beta)\gamma+\gamma^2$; das heisst der Satz gilt auch dann noch, wenn irgend ein Faktor hinzutritt. Da nun das Produkt, wie es auch immer beschaffen sei, nur damit beginnen kann, dass x mit einem konstanten Faktor multiplicirt wird, und für diesen Fall der zu erweisende Satz gilt, derselbe aber auch bestehen bleibt, wenn irgend ein neuer Faktor hinzutritt, so gilt er auch *allgemein.*

Gehen wir jetzt auf das Produkt XA zurück, wo X vom n-ten Grade ist, so wird es nach dem angeführten Satze durch n^2 Punkte Null gemacht. Die Kurvenschaar (12) schlingt sich also um n^2 feste Punkte und liefert einen *Kurvenbüschel n-ter Ordnung*, welcher jene n^2 Punkte zu *Mittelpunkten* hat. Jeder Kurve dieses Büschels entspricht in A ein bestimmter Punkt; und umgekehrt. Wir nennen wiederum jenen Büschel n-ter Ordnung mit dieser Geraden *projektivisch.* Hat man zwei Kurvenbüschel, welche derselben Geraden projektivisch sind, so nennen wir diese Büschel unter einander projektivisch. Es sei der eine Kurvenbüschel durch das Produkt XA, der andere durch das Produkt YA vorgestellt, wo X und Y wiederum Produkte sind, von denen das erstere x n-mal als Faktor enthalte, das letztere m-mal

Dann entspricht der Geraden X in A der Punkt XA, der Geraden Y der Punkt YA (Fig. 22). Sollen dann X und Y einander entsprechen, so müssen sie demselben Punkte in A entsprechen, das heisst, sich in demselben Punkt von A schneiden. Es sei dieser Punkt g, so entspricht der Kurve $Xg = 0$ die Kurve $Yg = 0$, von denen jene von n-ter, diese von m-ter Ordnung ist, und von welchen, wenn g in A variabel wird, die erstere durch die n^2 Punkte, welche XA Null machen, die letztere durch die m^2 Punkte geht, welche YA Null machen. Suchen wir den Durchschnitt der beiden projektivischen Kurvenbüschel, das heisst die Gesamtheit der Punkte, in welchen sich je zwei entsprechende Kurven dieser beiden Büschel schneiden, so sei x einer dieser Durchschnittspunkte; dann hat man sogleich, da XA zugleich in Y liegt, die Gleichung

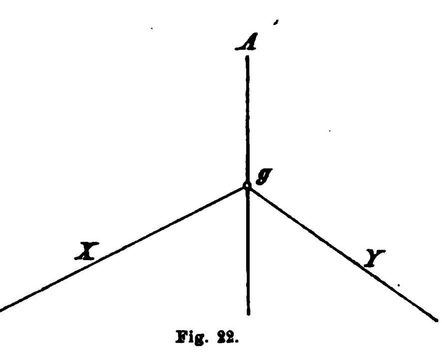


Fig. 22.

$$XAY = 0,$$

welche von $(m + n)$-tem Grade ist, und welche sogleich den allgemeinen Satz liefert:

Zwei projektivische Kurvenbüschel, von denen der eine von m-ter, der andere von n-ter Ordnung ist, erzeugen als Durchschnitt eine Kurve $(m + n)$-ter Ordnung.

Um zur *Perspektivität* zwischen einem Kurvenbüschel und einer 203 Geraden A zu gelangen, ist nöthig, dass jede Kurve des Büschels durch den entsprechenden Punkt der Geraden A gehe. Das wird am einfachsten erreicht, wenn man in den früheren Formeln (12) und (13) $q \equiv x$, also $X \equiv px$ setzt, sodass pxA zu dem die Perspektivität darstellenden Produkte wird. In der That gehen dann die Formeln (12) in

$$pxg = 0 \quad \text{oder} \quad pxAG = 0$$

über, welchen offenbar durch $x \equiv g$ genügt wird, das heisst, es geht die durch jene Gleichung dargestellte Kurve durch den ihr in A entsprechenden Punkt g. Die Gleichungen (13) werden dann

$$pA = 0 \quad \text{und} \quad xA = 0.$$

Die durch sie bestimmten Punkte x sind also die Durchschnittspunkte der durch die erstere Gleichung dargestellten Kurve mit der Geraden A. Nimmt man wie oben an, dass X vom n-ten Grade ist, so ist p, da

$X \equiv px$ ist, vom $(n-1)$-ten Grade; also ist die Anzahl jener Durchschnittspunkte $n-1$; das heisst, von den n^2 Mittelpunkten des Kurvenbüschels liegen $n-1$ in der Geraden A. Daraus ergiebt sich folgender Satz:

Ein Kurvenbüschel n-ter Ordnung kann dann, und nur dann, mit einer Geraden A perspektivisch sein, wenn $n-1$ seiner n^2 Mittelpunkte in der Geraden A liegen; und zwar entspricht dann jeder Kurve des Büschels derjenige Punkt der Geraden, in welchem die Kurve die Gerade zum n-ten Male schneidet.

Es bedarf kaum der Erwähnung, dass die vorstehenden Beziehungen auch gelten, wenn man Punkt und Linie vertauscht, wodurch die Kurven n-ter Ordnung durch n^2 feste Punkte in Kurven n-ter Klasse mit n^2 festen Tangenten übergehen. Ich behalte mir vor, die Idee der höheren Projektivität in einem folgenden Aufsatze noch von einem andern Gesichtspunkte aus zu behandeln und dort diejenigen Beziehungen nachzuholen, welche sich durch die hier eingeschlagene Methode weniger leicht zur Anschauung bringen lassen.

Stettin, im Juli 1851.

VI.

Die höhere Projektivität in der Ebene; dargestellt[204] durch Funktionsverknüpfungen.

Von

Prof. Dr. **H. Grassmann,**

Oberlehrer an der Friedrich-Wilhelm-Schule zu Stettin.

Crelle's Journal Bd. 42, Heft III, S. 204—212 (1851).

Die höhere Projektivität, welche ich in der vorhergehenden Abhandlung (S. 193) { hier S. 86 }, in Verbindung mit der höheren Perspektivität, aus den Principien der planimetrischen Multiplikation abgeleitet habe, lässt noch eine andere Behandlung zu, durch welche gewisse Beziehungen projektivischer Gebilde sich mit besonderer Leichtigkeit ergeben. Die Methode, welche ich hier anwenden werde, ist dieselbe, welche von Plücker mit so vielem Erfolge bei der Behandlung geometrischer Gegenstände angewandt ist, nämlich die Methode der Verknüpfung von Funktionen, deren jede, gleich Null gesetzt, eine gewisse Kurve darstellt. Der Zusammenhang dieser fruchtbaren Methode mit der geometrischen Analyse (der Rechnung mit Punkten, Linien u. s. w.) lässt sich nicht deutlich machen, ohne die Additionsgesetze und die Gesetze der Beziehung zwischen der Multiplikation und Addition für räumliche Grössen darzustellen, was hier zu weit führen würde. Ich verlasse daher hier ganz den Weg der geometrischen Analyse und leite auch den Begriff der höheren Projektivität unabhängig von der früheren Darstellung ab, um dann am Schlusse die Identität beider Begriffsbestimmungen nachzuweisen.

Es seien A und B Funktionen zweier Variabeln x und y, und zwar beide vom n-ten Grade: so werden, in Bezug auf irgend ein Koordinatensystem, zu welchem x und y die Koordinaten eines veränderlichen Punktes sind, die Gleichungen $A = 0$ und $B = 0$ zwei

Kurven n-ter Ordnung darstellen. Umgekehrt: sind statt jener Funktionen die Kurven selbst gegeben, so sind dadurch die Funktionen, mit Ausnahme {je} eines noch willkürlich zu wählenden Faktors, bestimmt. Ferner ist bekannt, dass die Gleichung

$$(1) \qquad \alpha A + \beta B = 0,$$

wo α und β konstant sind, eine Kurve von gleichem Grade darstellt, welche durch diejenigen n^2 Punkte geht, in denen sich $A = 0$ und $B = 0$ schneiden, und welche (wenn nicht α oder β Null ist) ausser 205 diesen Punkten keinen Punkt mit $A = 0$ † oder $B = 0$ gemein hat. Ebenso ist bekannt und ergiebt sich, wie Jenes, unmittelbar aus der Gleichung (1), dass, wenn a die Anzahl der Punkte ist, durch welche drei Kurven $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ einzeln genommen bestimmt werden, und wenn diese drei Kurven dieselben $a - 1$ Punkte gemein haben, dann auch jeder Punkt, welcher zweien derselben gemein ist, zugleich in der dritten liegt. Wir wollen die ganze Schaar der durch (1) dargestellten Kurven einen *Kurvenbüschel n-ter Ordnung* nennen. Sind die Funktionen A und B gegeben, so ist zu jedem Verhältniss von α und β die zugehörige Kurve (1) bestimmt; und umgekehrt: durch jede Kurve, welche durch die n^2 Durchschnittspunkte geht, oder durch einen Punkt dieser Kurve, der nicht zu jenen n^2 Punkten gehört, ist es das Verhältniss von α zu β. Sind nicht A und B selbst, sondern nur die durch sie dargestellten Kurven gegeben, und ist ausserdem zu einem bestimmten Verhältniss von α zu β ein Punkt der Kurve (1) gegeben der aber weder in A noch in B liegt, so ist dadurch zugleich das Verhältniss der entsprechenden Koefficienten in A und B und zu jedem Verhältniss von α zu β die Kurve bestimmt. Man kann also ausser den durch A und B dargestellten Kurven noch eine, durch ihre n^2 Durchschnittspunkte gehende Kurve von derselben Ordnung willkürlich annehmen und die willkürlichen Faktoren der Funktionen A und B so bestimmen, dass die Kurve etwa durch die Gleichung

$$(2) \qquad A + B = 0$$

dargestellt wird. Dann ist mittels dieser drei Kurven zu jedem Verhältniss von α und β die zugehörige Kurve bestimmt; und umgekehrt. Alle diese Beziehungen gelten natürlich auch, wenn x und y Linienkoordinaten und also $A, B, C \ldots$ Kurven n-ter Klasse sind; nur dass man dann statt der Punkte Linien zu setzen hat; und umgekehrt. Wir wollen dann die Schaar der durch (1) dargestellten Kurven eine *Kurvenreihe n-ter Klasse* nennen. Die Kurvenreihe erster Klasse ist dann eine punktirte Gerade. Nimmt man nun ausser den Kurven, deren Gleichungen $A = 0$, $B = 0$, $A + B = 0$ sind, zwei Kurven

m-ter Ordnung (oder m-ter Klasse) an, deren Gleichungen $A_1 = 0$ und $B_1 = 0$ sind, und eine dritte Kurve m-ter Ordnung (oder m-ter Klasse), die durch die m^2 Durchschnittspunkte der ersteren geht (oder von den m^2 gemeinschaftlichen Tangenten der ersteren berührt wird), bestimmt die willkürlichen Faktoren der Funktionen A_1 und B_1 so, dass die Gleichung der dritten Kurve

$$A_1 + B_1 = 0$$

ist, und setzt endlich je zwei Kurven, die durch die Gleichungen

(3) $$\alpha A + \beta B = 0 \quad \text{und} \quad \alpha A_1 + \beta B_1 = 0$$ 206

(mit demselben Verhältniss von α zu β) bestimmt sind, einander entsprechend, so nennen wir *jenen* Kurvenbüschel n-ter Ordnung (oder jene Kurvenreihe n-ter Klasse) und *diesen* m-ter Ordnung (oder diese m-ter Klasse) zu einander *projektivisch*. Es ergiebt sich hieraus sogleich folgender Satz:

Die projektivische Beziehung zweier Gebilde (Kurvenbüschel oder Kurvenreihen) wird durch drei Paare entsprechender Kurven bestimmt; das heisst, man kann drei solche Paare willkürlich setzen; aber dann ist zu jeder vierten Kurve des einen Gebildes die entsprechende des projektivischen Gebildes bestimmt.

Ferner:

Wenn zwei Gebilde einem dritten projektivisch sind, so sind sie es auch untereinander.

Den *Durchschnitt* zweier projektivischer Kurvenbüschel, das heisst, die Gesamtheit der Durchschnittspunkte ihrer entsprechenden Kurven, erhält man sogleich, wenn man in den beiden Gleichungen (3) dasselbe x und y annimmt und α und β eliminirt. Dies giebt die Gleichung

(4) $$A_1 B - A B_1 = 0$$

als Gleichung des Durchschnitts. Da diese Gleichung vom $(m + n)$-ten Grade ist, so erhalten wir den Satz:

Der Durchschnitt eines Kurvenbüschels m-ter und eines n-ter Ordnung ist eine Kurve $(m + n)$-ter Ordnung.

Um auch umgekehrt die projektivische Erzeugung einer *beliebigen* Kurve n-ter Ordnung, das heisst, ihre Erzeugung mittels des gegenseitigen Durchschneidens projektivischer Büschel darzustellen, bedarf es noch einiger Hilfssätze, deren Beweis ich der Uebersichtlichkeit wegen

hier folgen lassen werde. Es gründen sich diese Sätze auf den bekannten Satz, dass eine Kurve n-ter Ordnung durch $\frac{1}{2}n(n+3)$ Punkte bestimmt wird, und auf die Formel

$$\frac{1}{2}m(m+3)+\frac{1}{2}n(n+3)+mn=\frac{1}{2}(m+n)(m+n+3).$$

Wir wollen die Kurven m-ter Ordnung mit $A, A_1, \ldots$, die n-ter mit $B, B_1, \ldots$ und die $(m+n)$-ter mit C bezeichnen und die Anzahl der Punkte, durch welche diese Kurven beziehlich bestimmt werden, mit a, b, c; dann wird die obige Formel zu

$$a+b+mn=c.$$

Stellt man sich nun, dies vorausgesetzt, durch die Kurve C zwei Kurven A und B gelegt vor, deren mn gegenseitige Durchschnitte 207 in C liegen, so schneidet † die erstere die C noch in m^2, die letztere noch in n^2 Punkten. Durch $a-1$ jener m^2 und durch $b-1$ dieser n^2 Punkte lege man beziehlich die Kurven (m-ter und n-ter Ordnung) A_1 und B_1, sodass sie sich auf einem Punkte der Kurve C begegnen. Fasst man dann A und B_1 zu einer Kurve $(m+n)$-ter Ordnung zusammen, und ebenso A_1 und B, so haben die drei Kurven $(m+n)$-ter Ordnung C, AB_1 und A_1B folgende Punkte gemein:

1) Die mn Punkte in A, B, C,
2) die $a-1$ Punkte in A, A_1, C,
3) die $b-1$ Punkte in B, B_1, C,
4) den einen Punkt in A_1, B_1, C.

Also haben sie im Ganzen $mn+a+b-1=c-1$ Punkte gemein, und folglich liegen auch die Durchschnitte von je zweien der drei Kurven zugleich auf der dritten: also liegen auf C auch die m^2 Durchschnitte von A und A_1, die n^2 Durchschnitte von B und B_1 und die mn Durchschnitte von A_1 und B_1. Hierdurch ist folgender Satz bewiesen:

Wenn man durch mn Punkte einer Kurve $(m+n)$-ter Ordnung C eine Kurve m-ter Ordnung A und eine Kurve n-ter Ordnung B legt (vorausgesetzt, dass dies möglich sei), so schneidet jene die Kurve C ausserdem noch in denjenigen m^2 Punkten, durch welche sich eine bewegliche Kurve m-ter Ordnung A_1 legen lässt, und diese in denjenigen n^2 Punkten, durch welche sich eine bewegliche Kurve n-ter Ordnung B_1 legen lässt; und wenn von den gegenseitigen Durchschnittspunkten dieser beiden beweglichen Kurven A_1 und B_1 einer auf der Hauptkurve C liegt, so

liegen auch ihre sämtlichen übrigen $mn - 1$ Durchschnittspunkte auf dieser Kurve.

Für $m = 1$ lässt sich dieser Satz in folgender Form aussprechen:

Wenn man durch eine Kurve $(n + 1)$-ter Ordnung C eine Gerade, und durch n ihrer Durchschnitte mit C eine Kurve n-ter Ordnung legt, so schneidet dieselbe die Hauptkurve C in den n^2 Punkten, durch welche sich eine bewegliche Kurve n-ter Ordnung legen lässt. Die bewegliche Kurve schneidet die Hauptkurve ausserdem in n Punkten, welche in einer beweglichen, um einen festen Punkt der Hauptkurve rotirenden Geraden liegen.

Ganz auf entsprechende Weise lässt sich der Satz für $m = 2$ ausdrücken. Ist hingegen m grösser als 2, so lässt sich nicht mehr allgemein durch mn Punkte der Kurve $\{C\}$ eine Kurve n-ter Ordnung legen, weshalb man dann auf die ursprüngliche Fassung zurückgehen muss.

Hieraus ergiebt sich nun unmittelbar die projektivische Erzeugbarkeit aller algebraischer Kurven; namentlich mittels eines Kurvenbüschels und eines Strahlenbüschels. In der That: ist eine Kurve $(n + 1)$-ter Ordnung C gegeben, welche projektivisch erzeugt werden soll, so lege man durch sie eine beliebige Gerade A hindurch. Durch n ihrer Durchschnittspunkte mit C lege man eine Kurve n-ter Ordnung B hindurch; durch die n^2 Punkte, in welchen diese die Kurve C ausserdem noch schneidet, lege man zwei Kurven n-ter Ordnung B_1 und B_2, welche nach dem soeben bewiesenen Satze die Hauptkurve noch in je n Punkten schneiden, die in zwei geraden Linien liegen. Diese geraden Linien, welche wir A_1 und A_2 nennen wollen, treffen nach demselben Satze die Gerade A in demjenigen Punkte, in welchem sie die Kurve C noch zum $(n + 1)$-ten Male schneidet. Setzt man nun die Kurven B, B_1, B_2 beziehlich mit den Geraden A, A_1, A_2 als einander entsprechende Elemente zweier projektivischer Büschel, so ist dadurch die projektivische Beziehung dieser Büschel bestimmt, und ihr Durchschnitt ist eine Kurve $(n + 1)$-ter Ordnung, welche mit C die n^2 Mittelpunkte des Kurvenbüschels n-ten Grades, den Mittelpunkt des Strahlenbüschels und die $3n$ Durchschnitte der entsprechenden Elemente, also im Ganzen $(n + 1)^2 + n$ Punkte gemein hat, folglich mit C zusammenfällt. Hierdurch ist dann die projektivische Erzeugung von C dargestellt. 208

Durch diese projektivische Erzeugbarkeit der höheren Kurven aus niederen hat man also ein Mittel gewonnen, um von den geraden Linien aus auf rein geometrische Weise die sämtlichen algebraischen

Kurven zu erzeugen; und es wäre möglich, auf dieser Erzeugungsweise eine rein geometrische Theorie dieser Kurven aufzubauen, wie denn auch in jener Erzeugungsweise eine rein geometrische Definition aller algebraischen Kurven von den verschiedenen Ordnungen unmittelbar enthalten ist.

Um die höhere Projektivität noch unmittelbarer auf geometrische Konstruktion zu gründen, gehe ich auf die höhere *Perspektivität* zurück, werde jedoch hier nur die Perspektivität zwischen Gebilden n-ten und ersten Grades ins Auge fassen. Ich nenne einen Kurvenbüschel n-ter Ordnung mit einer Geraden A *perspektivisch*, wenn von den n^2 Mittelpunkten des erstern $n-1$ in A liegen und jeder Kurve jenes Büschels ihr n-ter Durchschnittspunkt mit A entspricht; das Entsprechende setze ich für die reciproken Gebilde. Es ist dann zuerst nachzuweisen, dass die *Perspektivität* nur eine besondere Art der *Projektivität* ist, das 209heisst, dass je zwei perspektivische Gebilde auch †projektivisch sind. Es sei zu dem Ende ein Kurvenbüschel n-ter Ordnung gegeben, von dessen n^2 Mittelpunkten $n-1$ in der Geraden A liegen. Es sei A zur Abscissenaxe eines Koordinatensystems genommen, und die Abscissen jener $n-1$ Punkte seien $a_1, a_2, \cdots a_{n-1}$. Es seien ferner zwei Kurven des Büschels angenommen, und die Abscissen der Punkte, worin jene Kurven die Gerade A zum n-ten Male schneiden, seien beziehlich b und b_1. Dann sind, wenn man das Produkt

$$(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{n-1})$$

durch C bezeichnet und unter D und D_1 ganze Funktionen $\{(n-1)$-ten Grades$\}$ von x und y versteht, die Gleichungen der beiden Kurven von der Form

$$B = C(x-b)+yD = 0,$$
$$B_1 = C(x-b_1)+yD_1 = 0.$$

Hierauf geht die Gleichung $\alpha B + \alpha_1 B_1 = 0$ in

$$C\left(x-\frac{\alpha b+\alpha_1 b_1}{\alpha+\alpha_1}\right)+y\,\frac{\alpha D+\alpha_1 D_1}{\alpha+\alpha_1}=0$$

über. Es geht also die durch diese Gleichung dargestellte Kurve durch einen Punkt von A, dessen Abscisse $\frac{\alpha b+\alpha_1 b_1}{\alpha+\alpha_1}$ ist. Es ist aber nunmehr nach dem Begriffe der Projektivität zu zeigen, dass, wenn man die drei Punkte, deren Abscissen b, b_1 und $\frac{\alpha b+\alpha_1 b_1}{\alpha+\alpha_1}$ sind, als Kurven erster Klasse ansieht, zwischen ihren Gleichungen die entsprechende

Beziehung stattfinde. Um nichts im Beweise zu übergehen, wollen wir auch dies noch nachweisen. Die Gleichung $x'x + y'y + 1 = 0$ ist, wenn x und y Punktkoordinaten und x' und y' konstant sind, die Gleichung einer geraden Linie. Man nennt dann x' und y' bekanntlich die Koordinaten (Linienkoordinaten) dieser Linie. Sind jetzt x und y konstant, so ist jene Gleichung die durch Linienkoordinaten ausgedrückte Gleichung des Punkts, dessen (Punkt-)Koordinaten x und y sind. Also ist die Gleichung des Punkts, dessen Abscisse b oder b_1 ist,

$$x'b + 1 = 0,$$
$$x'b_1 + 1 = 0;$$

mithin giebt das α-fache der ersten, zu dem β-fachen der zweiten addirt, die Gleichung

$$x' \cdot \frac{\alpha b + \alpha_1 b_1}{\alpha + \alpha_1} + 1 = 0$$

als die Gleichung des Punkts, dessen Abscisse $\frac{\alpha b + \alpha_1 b_1}{\alpha + \alpha_1}$ ist, das heisst, des Durchschnittspunkts der Kurve $\alpha B + \alpha_1 B_1 = 0$ mit der Geraden A. Also sind † die Kurven jenes Büschels denjenigen Punkten der Geraden A 210 projektivisch entsprechend, in welchen die Geraden von den Kurven zum n-ten Male geschnitten werden, oder, da das nämliche auch reciprok gilt:

Zwei perspektivische Gebilde sind zugleich einander projektivisch.

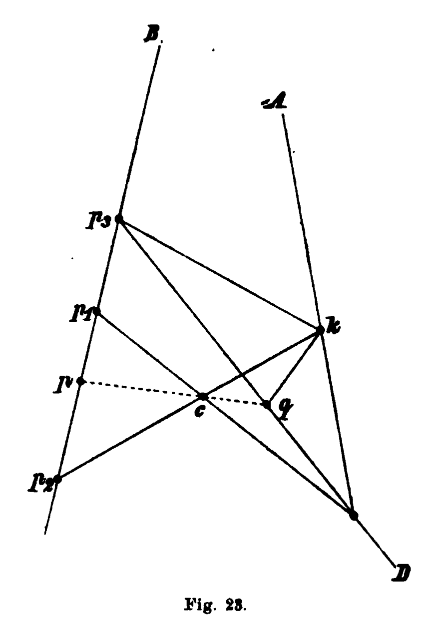


Fig. 23.

Will man nun eine beliebige Kurve $(n + 1)$-ter Ordnung Ω perspektivisch erzeugen, so lege man (Fig. 23) {zwei Gerade} A und B durch sie hin. Durch n Durchschnittspunkte von A und Ω und durch $n - 1$ Durchschnittspunkte von B und Ω lege man eine Kurve n-ter Ordnung Γ_1 hin. Dies ist allemal möglich, da $\frac{1}{2}n(n + 3) - n - (n - 1) = \frac{1}{2}n(n - 1) + 1$ immer positiv ist. Dann sind die n^2 Punkte, in welchen die Kurve Γ_1 die gegebene Kurve Ω, ausser in den n Punkten in A, noch schneidet, solche Punkte, die sich als Mittelpunkte eines Kurvenbüschels n-ter

Ordnung setzen lassen; und zwar liegen $n-1$ derselben in einer Geraden, nämlich in B. Die Gerade B möge die Kurve Γ_1 zum n-ten Male in p_1 schneiden und die Kurve Ω zum n-ten und $(n+1)$-ten Male in p_2 und p_3. Ferner sei der Punkt, in welchem die Gerade A die Kurve Ω zum $(n+1)$-ten Male schneidet, k. Sind nun Γ_2, Γ_3 die Kurven jenes Büschels, welche durch p_2 und p_3 gehen, so schneiden diese nach dem oben bewiesenen Satze die Geraden p_2k und p_3k beziehlich in je n Punkten, welche zugleich in der Kurve Ω liegen. Setzt man also die drei Kurven Γ_1, Γ_2, Γ_3 beziehlich den drei Geraden A, p_2k, p_3k projektivisch entsprechend, so hat der Durchschnitt jenes Kurvenbüschels und dieses Strahlenbüschels um k die n^2 Mittelpunkte des erstern, den einen Mittelpunkt des letztern und die $3n$ Punkte in A, p_2k, p_3k mit der Kurve Ω gemein, also im Ganzen $(n+1)^2+n$ Punkte; mithin fällt dieser Durchschnitt, da er zugleich eine Kurve $(n+1)$-ter Ordnung ist, mit Ω zusammen, und folglich ist Ω als Durchschnitt erzeugt.

Will man auch die Strahlen des Strahlenbüschels durch Konstruktion erzeugen, so hat man nur durch einen der Punkte p_2 oder p_3, zum Beispiel durch p_3, eine beliebige Gerade D zu legen, den Durchschnittspunkt von D und A mit p_1 und k mit p_2 zu verbinden, durch den Durchschnittspunkt dieser beiden Verbindungslinien, den ich c nennen will, nach demjenigen Punkte p in B, zu welchem man den entsprechenden Strahl sucht, eine Gerade zu ziehen und durch den Durchschnittspunkt q dieser Geraden und der Geraden D den Strahl kq zu ziehen; dann ist dieser der gesuchte Strahl. Denn wenn p in p_1, p_2 oder p_3 rückt, so rückt kq in die Lage von A, p_2k, p_3k, während kq dem p projektivisch entsprechend ist.

Ich will hier noch bemerken, dass, wenn x den variablen Punkt darstellt, der die Kurve Ω beschreibt, und man die von mir in den 211 früheren Aufsätzen angewandte Bezeichnung festhält, den Punkt p aber, in welchem die Kurve Γ des Kurvenbüschels die Gerade B schneidet, als Funktion des Punktes x setzt, in der Art dass, wenn x in der Kurve Γ liegt, p den n-ten Durchschnitt von Γ mit B darstellt, dann die Gleichung der Kurve Ω folgende ist:

$$pcDkx = 0.$$

Denn diese Gleichung drückt aus, dass, wenn der Punkt, in welchem pc die Gerade D schneidet, mit k verbunden wird, diese Gerade durch x, das heisst einen Punkt von Γ geht; also stellt dann x den Durchschnitt dieser Geraden mit Γ, also den Durchschnitt des Kurvenbüschels und des Strahlenbüschels, folglich die Kurve Ω dar. Ich

werde auf dies interessante Resultat in einem späteren Aufsatze zurückkommen.

Es bleibt mir noch übrig, die Uebereinstimmung des hier gegebenen Begriffs der Projektivität mit dem früher gegebenen darzustellen. Der Begriff der höheren Projektivität wurde dort abhängig gemacht von einem planimetrischen Produkte zweier gerader Linien oder zweier Punkte, von denen der eine Faktor von dem variablen Punkte x abhängig, der andere konstant war. Ich will hier nur den Fall betrachten, wo das Produkt aus zwei Punkten besteht, woraus der andere Fall durch Reciprocität von selbst hervorgeht. Dann sei der von x abhängige Punkt p, der konstante a, und A, B, C ... seien gerade Linien, die durch den Punkt a gehen. Dann entsprechen nach der dortigen Definition den Kurven

$$pA = 0,\ pB = 0,\ pC = 0, \ldots$$

die Geraden A, B, C ... Nun seien in Bezug auf irgend ein Koordinatensystem x_1, x_2 die Koordinaten des variablen Punkts x und p_1 und p_2 die von p, und die Gleichungen der Geraden A und B seien

$$A' = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 = 0$$

und

$$B' = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 = 0.$$

Dann ist die Gleichung jeder andern Geraden C, die durch den Durchschnitt von A und B geht,

$$\alpha A' + \beta B' = 0,$$

das heisst

$$(\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1)x_1 + (\alpha\alpha_2 + \beta\beta_2)x_2 + \alpha\alpha_3 + \beta\beta_3 = 0.$$

Nun drücken die Gleichungen

$$pA = 0,\ pB = 0,\ pC = 0$$

aus, dass der Punkt p in der Geraden A oder B oder C liege, dass heisst, dass p_1 und p_2, statt †x_1 und x_2 gesetzt, den Gleichungen 212 dieser Geraden genügen.

Man hat also

$$\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 = 0,$$
$$\beta_1 p_1 + \beta_2 p_2 + \beta_3 = 0,$$
$$(\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1)p_1 + (\alpha\alpha_2 + \beta\beta_2)p_2 + \alpha\alpha_3 + \beta\beta_3 = 0.$$

Die letztere Gleichung können wir auch so schreiben:

$$\alpha(\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3) + \beta(\beta_1 p_1 + \beta_2 p_2 + \beta_3) = 0.$$

Sie ist die Gleichung der Kurve, welche nach jener Definition der durch die Gleichung

$$\alpha A' + \beta B' = 0$$

dargestellten Geraden entspricht. Durch diese beiden Gleichungen war aber der Begriff der Projektivität, wie wir ihn in diesem Aufsatze gegeben haben, bestimmt; also ist die Uebereinstimmung beider Begriffe nachgewiesen.

Stettin, im Juli 1850.

VII.

Erzeugung der Kurven vierter Ordnung durch Bewegung gerader Linien.

Von

Prof. Dr. **H. Grassmann,**

Oberlehrer an der Friedrich-Wilhelm-Schule zu Stettin.

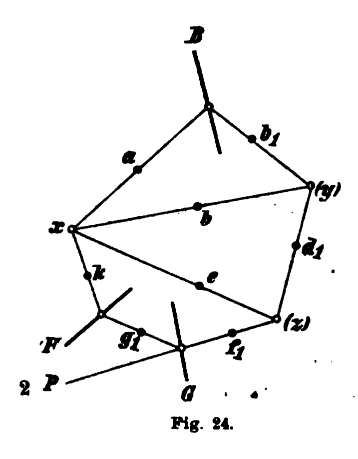
Crelle's Journal Bd. 44, Heft I, S. 1—25 (1852).

Ueber die Erzeugung der Kurven vierter Ordnung durch gerade Linien habe ich in *Crelle's* Journal (Band 42, S. 190 {hier S. 84}) folgenden Satz aufgestellt:

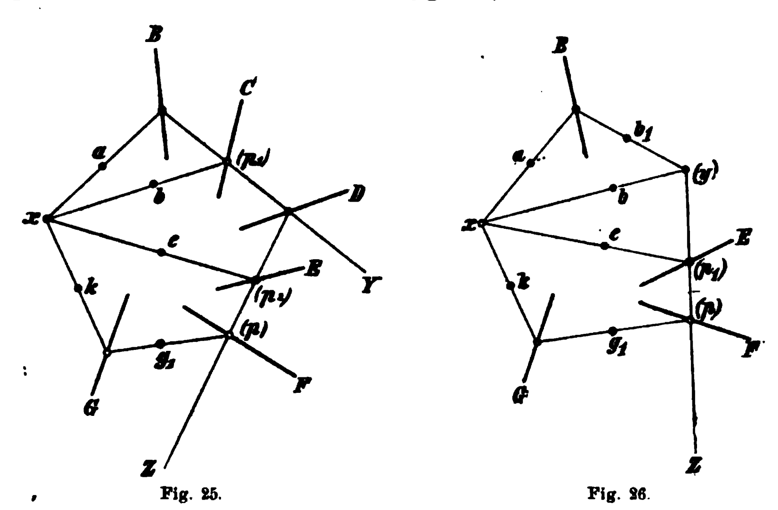
Wenn der Punkt x Anfangspunkt von vier offenen Figuren ist, von denen zwei und zwei ein gemeinschaftliches Endelement haben, während die beiden gemeinschaftlichen Elemente zugleich Grenzelemente einer fünften offenen Figur sind, so beschreibt x, wenn die sämtlichen Ecken der offenen Figuren in festen Geraden und die sämtlichen Seiten derselben um feste Punkte sich bewegen, eine Kurve vierter Ordnung.

Ich erinnere hier daran, dass ich dasjenige Element (Punkt oder Linie), mit welchem eine offene Figur beginnt oder schliesst, ein Grenzelement derselben nenne. Zur Erläuterung möge Fig. 30 {S. 112} dienen, in welcher der Punkt y Endelement zweier von x ausgehenden offenen Figuren und die Linie Z Endelement der beiden andern ist, während die von y zu Z übergehende offene Figur eine Seite und eine Ecke enthält. Es kann auch insbesondere der Fall eintreten, dass eine oder die andere offene Figur nur aus *einem* Punkt und *einer* Linie besteht, also gar keine Seiten und Ecken hat, sondern von dem Anfangselement sogleich in das Endelement übertritt. Dieser Fall tritt zum Beispiel in Fig. 29 {S. 112} ein, wo von den vier von x ausgehenden offenen Figuren die beiden mittleren nur aus dem Punkte x und einer Geraden Y oder Z bestehen.

Zu den verschiedenen Specialsätzen, in welche der angeführte Satz zerfällt, gelangt man leicht, wenn man bedenkt, dass die beiden Uebergangselemente (so nenne ich die beiden Grenzelemente der vermittelnden offenen Figur, welche in dem Satze als die fünfte offene Figur bezeichnet ist) entweder Punkte sein können, wie y und z in Fig. 24, oder Gerade, wie Y und Z in Fig. 25, oder das eine ein Punkt, das andere eine Gerade, wie y und Z in Fig. 26, und dass, wenn ein Uebergangselement eine Gerade ist, von den beiden offenen Figuren, die von x aus nach diesem Uebergangselement hingehen, die eine bloss aus dem Punkte x und diesem Uebergangselemente bestehen † kann, wie zum Beispiel in Fig. 27, wo das Uebergangselement Z von x ausgeht. Hierdurch zerfällt der allgemeine Satz in sechs Specialsätze, welche ich hier kurz zusammenstellen will.


Fig. 24.

1) Wenn man in einem Polygon (Fig. 24) von einer Ecke x zwei Diagonalen zieht und sich das Polygon (dessen Seiten und Winkel


Fig. 25. Fig. 26.

hier überall als variabel angenommen werden) so bewegt, dass alle Ecken, ausser den drei von den Diagonalen getroffenen, in geraden Linien fortschreiten, und alle Seiten, wie auch die {beiden von x ausgehenden} Diagonalen, um feste Punkte sich drehen, so beschreibt x eine Kurve vierter Ordnung.

2) Dasselbe geschieht, wenn man (Fig. 25) statt der beiden Diagonalen von x zwei Gerade nach zwei Seiten des Polygons zieht und das Polygon sich so bewegen lässt, dass diese Geraden und alle Seiten, ausser jenen zweien, um feste Punkte sich drehen und sowohl die Endpunkte jener beiden Geraden als auch alle Ecken des Polygons, ausser x, in geraden Linien fortschreiten.

3) Ferner geschieht auch noch dasselbe, wenn man (Fig. 26) nur statt *einer* Diagonale eine Gerade nach einer Seite des Polygons zieht.

4) Wenn zwei Polygone (Fig. 27) eine gemeinschaftliche Ecke x haben, während die Polygonwinkel an dieser Ecke einen gemeinschaftlichen Schenkel haben, und man in einem dieser Polygone von x eine

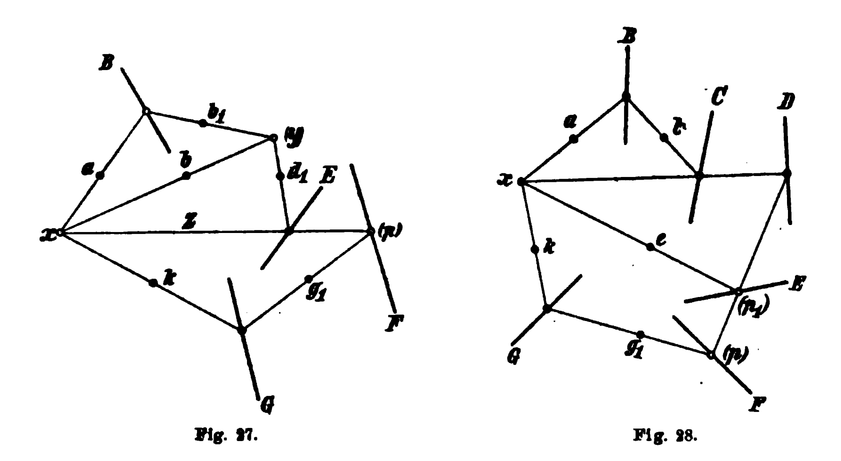


Fig. 27. Fig. 28.

Diagonale zieht, so beschreibt x, wenn sich alle Ecken, ausser den von der Diagonale getroffenen, in geraden Linien bewegen und alle Seiten beider Polygone, ausser den ineinander liegenden, um feste Punkte drehen, eine Kurve vierter Ordnung.

5) Das Gleiche geschieht auch (Fig. 28), wenn man von x statt der Diagonale, die um einen festen Punkt rotirt, eine Gerade zieht, deren Durchschnittspunkt mit einer Seite des Polygons sich in einer festen Geraden bewegt.

6) Wenn drei Polygone (Fig. 29) eine gemeinschaftliche Ecke x haben und ihre an dieser Ecke befindlichen Polygonwinkel stetig an einander liegen und sich dann die Polygone so bewegen, dass alle Ecken, ausser x, in festen Geraden fortschreiten und alle Seiten, ausser denjenigen, in welchen jene stetigen Winkel aneinander grenzen, um feste Punkte sich drehen, so beschreibt x eine Kurve vierter Ordnung.

7) Alle vorstehenden Sätze gelten auch noch, wenn man (Fig. 30) statt der von x gezogenen Geraden gebrochene Linien setzt, deren

Seiten um feste Punkte und deren Ecken in festen Geraden sich bewegen.

3 Da der allgemeine, an die Spitze gestellte Satz seinerseits wieder nur ein besonderer Fall eines allgemeinen Satzes ist, den ich in meiner Ausdehnungslehre (S. 224 u. f. {Ges. Werke I, 1 S. 246 u. f.}) und im

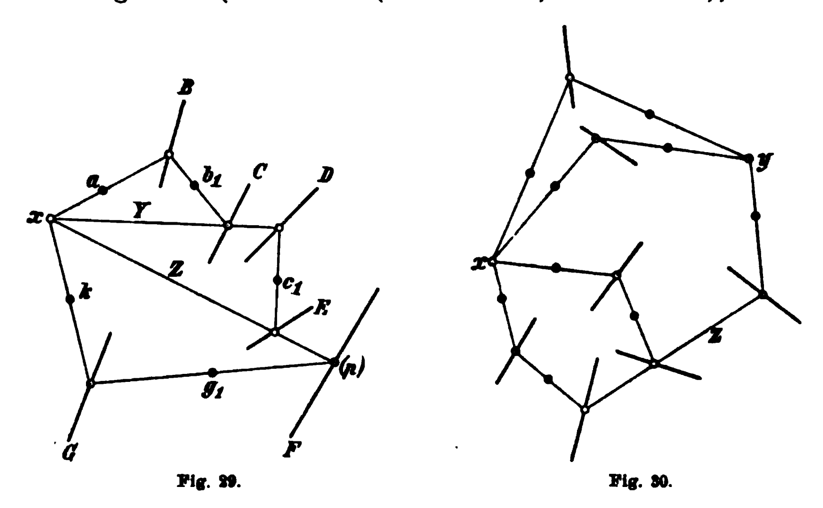


Fig. 29. Fig. 30.

31. Bande des *Crelle*'schen Journals {hier S. 49 u. f.} ausführlich bewiesen habe, so darf ich mich hier des Beweises entheben, zumal derselbe nicht die mindesten Schwierigkeiten hat.

Ungleich schwieriger ist der Nachweis, dass sich, umgekehrt, jede beliebige Kurve vierter Ordnung auf jede der sechs Arten, welche in den vorhergehenden Specialsätzen dargestellt sind, erzeugen lässt. Ich werde hier die einfachsten Erzeugungsarten, durch welche jede beliebige Kurve vierter Ordnung hervorgebracht werden kann, in einem Satze zusammenstellen und dann die Beweise ihrer Allgemeinheit liefern:

Jede Kurve vierter Ordnung lässt sich erzeugen als Ort:

1) Einer Ecke (x) eines Sechsecks (Fig. 24), in welchem von dieser Ecke (x) zwei Diagonalen nach zwei einander benachbarten Ecken gezogen sind und in welchem diese Diagonalen und alle Seiten durch feste Punkte gehen, während alle von den Diagonalen nicht getroffenen Ecken in festen Geraden liegen.

2) Einer Ecke (x) eines Fünfecks (Fig. 25), in welchem von dieser Ecke (x) nach zwei Punkten (p_1 und p_2), die in zwei aneinanderstehenden Seiten liegen, zwei Gerade gezogen sind und in welchem alle übrigen Seiten sowie diese beiden Geraden (xp_1 und xp_2) durch feste Punkte gehen, während die Punkte (p_1 und p_2) und alle Ecken, ausser x, in festen Geraden liegen.

3) Der Spitze (x) eines Fünfecks (Fig. 26), in welchem von der

Spitze nach einem Punkte (p) der Grundseite und nach einer daran liegenden Ecke zwei Gerade gezogen sind, und in welchem diese Geraden und alle Seiten, ausser der Grundseite, durch feste Punkte gehen, während jener Punkt (p) und alle von der Diagonale nicht getroffenen Ecken in festen Geraden liegen.

4) Der gemeinschaftlichen Ecke (x) eines Vierecks und eines stetig daran liegenden Dreiecks (Fig. 27), wenn die von dieser Ecke gezogene Diagonale des Vierecks und alle Seiten beider Figuren, mit Ausnahme der aufeinander fallenden, durch feste Punkte gehen und alle von der Diagonale nicht getroffenen Ecken in festen Geraden liegen.

5) Der gemeinschaftlichen Ecke (x) eines Dreiecks und eines stetig daran liegenden Vierecks (Fig. 28), in welchem von dieser Ecke x nach einem Punkte (p) der an die gemeinschaftliche Seite sich anschliessenden Seite eine Gerade gezogen wird, während diese Gerade und alle Seiten, ausser der gemeinschaftlichen, durch feste Punkte gehen und jener Punkt (p) sowie alle Ecken, ausser x, in festen Geraden liegen.

6) Der gemeinschaftlichen Spitze x dreier stetig an einander liegender Dreiecke (Fig. 29), deren übrige Ecken in festen Geraden liegen und deren Grundseiten und äusserste Schenkel durch feste Punkte gehen.

Ehe ich zu den Beweisen dieser Sätze übergehe, will ich der Uebersicht wegen diejenigen Formeln voranstellen, auf welche ich dabei zurückgehen werde. Ueberall werde ich unter den kleinen Buchstaben Punkte, unter den grossen gerade Linien verstehen. Wie in den frühern Aufsätzen soll:

$$ab \tag{1}$$

die durch a und b gehende Gerade,

$$AB \tag{2}$$

den Durchschnitt von A und B bezeichnen. Ferner soll

$$ab = 0 \quad \text{oder} \quad a \equiv b \tag{3}$$

ausdrücken, dass a und b zusammenfallen,

$$AB = 0 \quad \text{oder} \quad A \equiv B, \tag{4}$$

dass A und B zusammenfallen,

$$Ab = 0 \quad \text{oder} \quad bA = 0, \tag{5}$$

dass b in A fällt.

Nun habe ich gezeigt, dass die Gleichung

$$A_x b_x = 0, \tag{6}$$

wenn A_x und b_x Produkte in dem Sinne der Formeln (1) und (2) sind, welche den Punkt x zusammen μ-mal als Faktor enthalten, die Gleichung

einer von x beschriebenen Kurve μ-ter Ordnung ist. Diesen Satz habe ich den erweiterten Pascal'schen genannt. Der *Pascal'sche* Satz über das *mystische Sechseck* lässt sich, wenn $xabcde$ dieses Sechseck ist, durch die Formel

$$(7) \qquad (xa\,.\,cd)(ab\,.\,de)(bc\,.\,ex) = 0$$

ausdrücken, da dieselbe nur aussagt, dass die drei Durchschnittspunkte der gegenüberliegenden Seiten jenes Sechsecks in gerader Linie liegen. Setzt man hier $cd \equiv B$, $ab\,.\,de \equiv c_1$, $bc \equiv D$, so erhält man folgenden Satz:

Die Gleichung

$$(8) \qquad xaBc_1Dex = 0$$

ist die Gleichung eines Kegelschnitts, der durch die fünf Punkte a, e, BD, ac_1D, ec_1B geht.

5 Noch füge ich folgende einfache Umgestaltungsformeln hinzu:

Die Gleichung

(9) $\left\{\begin{array}{l} axBcx = 0 \\ \text{drückt aus, dass entweder} \\ acx = 0 \quad \text{oder} \quad Bx = 0 \end{array}\right.$

ist. Denn die Gleichung drückt aus, dass der Punkt axB mit c und x in gerader Linie liegt. Dies ist aber erstens der Fall, wenn x in B liegt, indem $axB \equiv x$ wird. Liegt hingegen x nicht in B, so ist axB von x verschieden, und die Gleichung sagt dann aus, dass c in der durch die Punkte axB und x gelegten Geraden, das heisst, in der Geraden ax liegen muss. Es muss also nothwendig entweder Bx oder acx Null sein.

Ferner die Gleichung

(10) $\left\{\begin{array}{l} abC = 0 \\ \text{ist, wenn } ab \text{ nicht Null ist, gleichbedeutend mit dem Gleichungspaare} \\ aC = 0 \quad \text{und} \quad bC = 0. \end{array}\right.$

Denn $abC = 0$ drückt dann aus, dass die Gerade ab mit C zusammenfällt, das heisst, dass a und b in C fallen. Ebenso ist die Gleichung

(11) $\left\{\begin{array}{l} ABc = 0, \\ \text{wenn } AB \text{ nicht Null ist, gleichbedeutend mit dem Gleichungspaare} \\ Ac = 0 \quad \text{und} \quad Bc = 0. \end{array}\right.$

Endlich ergiebt sich leicht der Satz:

Wenn ein fortschreitendes planimetrisches *Produkt (das heisst ein Produkt im Sinne der Formeln (1) bis (5)), welches mit zwei Punkt- oder Linien-Faktoren beginnt und schliesst, während sonst überall Punkt und Linie wechseln, Null ist, so bleibt es auch Null, wenn man, von einem beliebigen Faktor an, die ganze Faktorenreihe umkehrt und in Klammern schliesst, zum Beispiel wenn*

$$(12)\qquad \begin{cases} \qquad\qquad abCdEfg = 0 \\ \textit{ist, so ist auch} \\ \qquad\qquad a(gfEdCb) = 0. \end{cases}$$

Denn die erste Gleichung drückt aus, dass die drei Punkte $abCdE$, f, g in gerader Linie liegen. Dasselbe drückt die Gleichung $abCdE(gf) = 0$ aus. Vermöge dieser Gleichung gehen wieder die drei Geraden $abCd$, E, gf durch einen und denselben Punkt, und das Nämliche drückt die Gleichung $abCd(gfE) = 0$ aus, u. s. w.

Obgleich sich noch manche Formel aufstellen liesse, die für den gegenwärtigen Zweck von Nutzen sein würde, wird man doch mit den vorstehenden Formeln ausreichen.

Indem ich nun zum Beweise des oben aufgestellten sechsfachen Satzes übergehe, bemerke ich noch, dass ich mich nicht damit begnügen werde, bloss im Allgemeinen die Erzeugbarkeit der Kurven vierter Ordnung auf die dort angegebenen sechs Arten nachzuweisen, sondern dass ich überall bis zur geometrischen Konstruktion derjenigen Punkte und geraden Linien fortschreiten werde, in welchen sich die Geraden und Punkte der veränderlichen Figur bewegen müssen, damit der Punkt x eine gegebene Kurve vierter Ordnung erzeuge. 6

Ich zerlege zu dem Ende den Beweis in eine Reihe von Aufgaben, die ich in den folgenden Paragraphen lösen werde und mit deren Lösung der Beweis des obigen Satzes, nebst der geometrischen Konstruktion aller Konstanten, vollendet ist.

§ 1.

Die sechs in dem Satze beschriebenen Arten der Bewegung in Formeln darzustellen.

Aus den Formeln (1), (2) und (5) ergiebt sich sogleich, dass die in dem obigen Satze beschriebenen Bewegungen, wie sie in den Figuren 24 bis 29 bildlich ausgedrückt sind, beziehlich durch folgende sechs Gleichungen dargestellt werden:

(1) $$xaBb_1(xb)d_1(xe)f_1Gg_1Fkx = 0,$$
(2) $$xaB(xbC)D(xeE)Fg_1Gkx = 0,$$
(3) $$xaBb_1(xb)(xeE)Fg_1Gkx = 0,$$
(4) $$xaBb_1(xb)d_1ExFg_1Gkx = 0,$$
(5) $$xaBb_1CxD(xeE)Fg_1Gkx = 0,$$
(6) $$xaBb_1CxDc_1ExFg_1Gkx = 0.$$

§ 2.

Die sämtlichen Punkte zu finden, welche, statt x gesetzt, ein Produkt, in welchem nur die durch die Formeln (1) und (2) dargestellten Multiplikationsarten vorkommen, gleich Null machen.

Wenn ein Produkt nur die durch die Formeln (1) und (2) {S. 113} dargestellten Multiplikationsarten enthält, so wird es sich als Produkt entweder zweier gerader Linien oder zweier Punkte zeigen. Es wird nur nöthig sein, einen dieser Fälle, etwa den zweiten, zu betrachten, da der andere durch Reciprocität aus ihm hervorgeht. Man hat dann das Produkt zweier Punkte. Der eine derselben, den wir als ersten 7 Faktor setzen wollen, sei wieder aus zwei Faktoren †zusammengesetzt, so werden diese Faktoren Linien sein, und man erhält also die Form ABc. Man nehme an, dass A, B, c den Punkt x beziehlich α-mal, β-mal, γ-mal als Faktor enthalten. Es seien bereits die Punkte gefunden, welche, statt x gesetzt, AB gleich Null machen. Dann sind nur noch die Punkte zu suchen, welche ABc gleich Null machen, ohne AB gleich Null zu machen. Ist nun aber AB nicht Null, so ist nach Formel (11) die Gleichung

$$ABc = 0$$

gleichbedeutend mit dem Gleichungspaare

$$Ac = 0 \quad \text{und} \quad Bc = 0,$$

von welchen die erstere eine Kurve $(\alpha + \gamma)$-ter Ordnung, die letztere eine Kurve $(\beta + \gamma)$-ter Ordnung darstellt. Ihre Durchschnittspunkte sind die gesuchten Punkte. Also:

Wenn A, B, c Produktfunktionen des Punktes x sind (die ersteren beiden gerade Linien, die letzte ein Punkt), so findet man diejenigen Punkte x, für welche

(a) $$ABc = 0 \quad \textit{und} \quad AB \textit{ ungleich } 0$$

ist, als die Durchschnitte der beiden Kurven, deren Gleichungen

(b) $$Ac = 0 \quad \textit{und} \quad Bc = 0$$

sind, und von denen sich die erstere um alle Punkte schlingt, welche A gleich Null machen, die letztere um die, welche B gleich Null machen.

Auf diese Weise findet man also, indem man schrittweise die Zusammensetzung des Produkts verfolgt und bedenkt, dass zuerst xa nur für $x \equiv a$ Null ist, alle die Punkte, welche das Produkt gleich Null machen, und die Aufgabe ist gelöst. (Vergl. Crelle's Journal Band 42, S. 201 {hier S. 95}). Doch lässt die Methode in einigen Fällen eine Vereinfachung zu.

Nämlich erstens, wenn c und B konstant sind, so enthält die Gleichung $Bc = 0$ den Punkt x gar nicht. Wird also diese Gleichung nicht erfüllt, das heisst, liegt c nicht in B, so giebt es keinen Punkt, welcher, statt x gesetzt, ABc gleich Null macht, ohne AB gleich Null zu machen. Liegt hingegen c in B, so folgt, dass jeder Punkt x, welcher der Gleichung $Ac = 0$ genügt, das heisst, jeder Punkt der durch diese Gleichung dargestellten Kurve, auch ABc gleich Null macht. Wir wollen in diesem Falle der Kürze wegen sagen, es sei dies Produkt ABc durch jene Kurve *theilbar*. Also:

Erstlich. Wenn das Produkt zwei aufeinander folgende konstante Faktoren enthält, von denen der Punktfaktor in dem Linienfaktor liegt, so ist das Produkt durch eine Kurve theilbar. Folgen hingegen zwei konstante †Faktoren auf einander, die nicht diese Lage haben, so bedingt das Hinzutreten des zweiten dieser Faktoren keine neuen Punkte, die, statt x gesetzt, das Produkt gleich Null machen. 8

Ist *zweitens* c wieder ein Produkt $\equiv CD$ und sind B und D konstant, so hat man als diejenigen Punkte, für welche

(c) $$AB(CD) = 0 \quad \text{und} \quad AB \text{ ungleich } 0$$

ist, die Durchschnittspunkte der Kurven

(d) $$ACD = 0 \quad \text{und} \quad BCD = 0.$$

Fallen nun zuerst die konstanten Linien B und D zusammen, so wird die zweite der Gleichungen BCD schon allgemein befriedigt. Es ist also dann $AB(CD) = 0$ gleichbedeutend mit der Gleichung $ACD = 0$. Alle Punkte x der durch die letztere Gleichung dargestellten Kurve machen daher das Produkt $AB(CD)$ gleich Null; das heisst, dasselbe ist durch jene Kurve *theilbar*. Fällt aber B nicht mit D zusammen und ist auch CD ungleich Null, so drückt BD sowohl als CD einen *Punkt* aus, und zwar, vermöge der zweiten Gleichung in (d), *denselben* Punkt, das heisst, es ist $BD \equiv CD$. Man kann also in der ersten Gleichung in (d) BD statt CD setzen und erhält somit

$$ABD = 0 \quad \text{und} \quad CBD = 0$$

als diejenigen Gleichungen, welche die Gleichungen (d) ersetzen. Von ihnen stellt die erste eine Kurve α-ten, die letzte eine Kurve γ-ten Grades dar. Somit sind die Punkte x, welche das Produkt $AB(CD)$ gleich Null machen, ohne AB oder CD gleich Null zu machen, die Durchschnittspunkte dieser beiden Kurven vom α-ten und γ-ten Grade. Also:

Zweitens: Wenn das (mittels der Multiplikationsarten (1) und (2)) zusammengesetzte Produkt P aus zwei Faktoren besteht, deren jeder ein Produkt aus einem variabeln und einem konstanten Faktor ist, so ist P durch eine Kurve theilbar, so oft die beiden konstanten Faktoren zusammenfallen. Fallen sie nicht zusammen, so erhält man die neu hinzutretenden Punkte, welche P gleich Null machen, als Resultat der Elimination aus zwei Gleichungen, die sich ergeben, wenn man das Produkt der beiden konstanten Faktoren in einen jeden der beiden variablen Faktoren einzeln gleich Null setzt.

Endlich mögen noch zwei besondere Fälle betrachtet werden, welche in den Gleichungen des § 1 vorkommen, indem man nämlich die Punkte x sucht, welche $xaBb_1(xb)$, und diejenigen, welche $xaB(xbC)$ gleich Null machen. Ich nehme an, dass von den vorher erwähnten 9 Fällen, in denen diese Produkte † durch Kurven theilbar werden, keiner eintritt, schliesse also aus, dass a oder b_1 in B, b in C falle und dass b_1 mit b oder B mit C identisch werde. Ist dies ausgeschlossen, so folgt, dass der Faktor $xaBb_1$ bez. xb des ersten Produkts nur dann verschwindet, wenn x in a bez. in b fällt, und dass ausserdem das ganze Produkt Null wird, wenn $xaBb_1b$ und xbb_1 zugleich Null werden, das heisst, wenn x in der Geraden bb_1Ba und zugleich in der Geraden bb_1 liegt. Liegen nun a, b, b_1 in gerader Linie, so fallen diese beiden Geraden zusammen: also, wenn x in einer dieser Geraden liegt, so liegt es auch in der andern und macht also das Produkt $xaBb_1(xb)$ gleich Null; das heisst, dies Produkt ist dann durch die Kurve (gerade Linie) $xbb_1 = 0$ *theilbar*. Liegen aber a, b, b_1 nicht in gerader Linie, so liegt x im Durchschnitt der beiden Geraden bb_1Ba und bb_1. Dieser Durchschnitt ist bb_1B. Also:

Drittens: Das Produkt $xaBb_1(xb)$ wird durch eine gerade Linie theilbar, wenn a in B oder b_1 in B oder b_1 in b fällt oder a, b, b_1 in gerader Linie liegen. Findet keiner dieser vier Fälle statt, so wird das Produkt nur durch die drei Punkte $x \equiv a$, b, bb_1B gleich Null gemacht.

Das Produkt $xaB(xbC)$ wird unter den obigen Voraussetzungen nur gleich Null, wenn $x \equiv a$ oder $\equiv b$ oder zugleich $xa(BC)$ und $xb(BC)$ Null sind, das heisst, wenn x zugleich in der Geraden BCa und in der Geraden BCb liegt. Fallen diese beiden Geraden zusammen,

das heisst, liegen die drei Punkte a, b, BC in einer Geraden, so wird das Produkt durch diese Gerade *theilbar*. Liegen sie nicht in einer Geraden, so ist x der Durchschnitt der beiden Geraden BCa und BCb, das heisst, es ist $x \equiv BC$. Also:

Viertens: Das Produkt $xaB(xbC)$ wird durch eine gerade Linie theilbar, wenn a in B oder b in C liegt oder B mit C zusammenfällt, oder, wenn die drei Geraden ab, B und C durch einen und denselben Punkt gehen. Findet keiner dieser vier Fälle statt, so wird das Produkt nur durch die drei Punkte $x \equiv a$, b und BC gleich Null gemacht.

§ 3.

Diejenigen Punkte x zu finden, welche die Produkte in § 1 bis zum Faktor F oder f_1 hin gleich Null machen.

Es wird nur nöthig sein, diese Aufgabe an dem ersten jener Produkte ausführlich zu lösen, worauf man dann bei den fünf übrigen die Ausdrücke der †Punkte, welche sie gleich Null machen, unmittelbar 10 aus dem betreffenden Produkte selbst wird ablesen können, sodass eine Zusammenstellung dieser Ausdrücke genügen wird. Wir schliessen dabei ein für allemal die in § 2 erwähnten Fälle aus, in denen das Produkt durch eine Kurve *theilbar* wird, da diese Fälle nur die Betrachtung verwirren würden, ohne für die Allgemeinheit förderlich zu sein. Welche Punkte x machen also zuerst das Produkt $xaBb_1(xb)d_1(xe)f_1$ gleich Null?

Es sind dies nach § 2 zuerst die drei Punkte a, b, bb_1B, ferner der Punkt e und ausserdem die Punkte, für welche die Gleichungspaare

$$\begin{cases} xaBb_1d_1 = 0, \\ \quad xbd_1 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} xaBb_1(xb)d_1e = 0, \\ \quad xd_1e = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} xaBb_1(xb)d_1f_1 = 0, \\ \quad xef_1 = 0 \end{cases}$$

gelten. Nämlich das erste Paar dieser Gleichungen bestimmt nach dem ersten Satze in § 2 den Punkt, welcher das Produkt $xaBb_1(xb)d_1$ gleich Null macht, ohne $xaBb_1(xb)$ gleich Null zu machen; das letzte Paar bestimmt nach demselben Satz diejenigen zwei Punkte, welche das ganze Produkt, bis f_1 hin, gleich Null machen, ohne es bis zum Faktor (xe) hin gleich Null zu machen. Das zweite Paar der Gleichungen bestimmt nach dem zweiten Satz in § 2 diejenigen Punkte, welche das Produkt $xaBb_1(xb)d_1(xe)$ gleich Null machen, ohne $xaBb_1(xb)d_1$ oder xe gleich Null zu machen; xe endlich wird nur Null für $x \equiv e$.

Das erste Gleichungspaar können wir nach der Formel (12) auch wie folgt schreiben:

$$d_1 b_1 B a x = 0 \quad \text{und} \quad d_1 b x = 0.$$

Sie drücken aus, dass x in den beiden Geraden $d_1 b_1 B a$ und $d_1 b$, also in ihrem Durchschnitt liegt, das heisst, sie liefern den Punkt

$$x \equiv d_1 b_1 B a (d_1 b),$$

den wir d nennen wollen, während wir den Punkt $b b_1 B$ mit c bezeichnen.

In dem zweiten Gleichungspaare drückt die untere Gleichung dasselbe aus, nämlich dass x in $d_1 e$ liegt; die obere, dass die drei Geraden $x a B b_1$, $x b$, $d_1 e$ durch einen und denselben Punkt gehen. Da aber x in $d_1 e$ liegt, so schneiden sich die beiden letzteren Geraden in x, also muss die erste jener drei Geraden auch durch x gehen, das heisst, es ist

$$x a B b_1 x = 0.$$

Diese Gleichung drückt nach Formel (9) aus, dass x entweder in $a b_1$
11 oder †in B liegt. Da aber x zugleich in $d_1 e$ liegt, so giebt das zweite Gleichungspaar die Punkte

$$x \equiv d_1 e B \quad \text{und} \quad x \equiv d_1 e (a b_1).$$

Endlich das letzte Gleichungspaar drückt aus, dass x in dem Durchschnitt der Geraden $e f_1$ und des Kegelschnitts $x a B b_1 (x b) d_1 f = 0$ liegt. Dieser Kegelschnitt geht nun offenbar durch die vier Punkte, welche $x a B b_1 (x b) d_1$ gleich Null machen, das heisst, durch die Punkte a, b, c, d. Um noch einen fünften Punkt zu finden, schreibe man die Gleichung dieses Kegelschnitts, welche ausdrückt, dass die drei Geraden $x a B b_1$, $x b$, $d_1 f_1$ durch einen und denselben Punkt gehen, in der Form $x a B b_1 (d_1 f_1) b x = 0$. Dann folgt aus dem Satze zu Gleichung (8), dass der Kegelschnitt auch durch den Punkt $d_1 f_1 B$ geht, den wir mit r bezeichnen wollen. Demnach drückt das dritte Gleichungspaar aus, dass x in den Durchschnitten der Geraden $e f_1$ und des durch die Punkte a, b, c, d, r gelegten Kegelschnitts liegt. Sind h und i diese Durchschnittspunkte, so soll dies symbolisch durch

$$(h, i) \equiv e f_1 \cdot [a, b, c, d, r]$$

ausgedrückt werden.

Also sind die Punkte x, für welche

(1)
$$xaBb_1(xb)d_1(xe)f_1 = 0$$
wird, erstens die sieben Punkte
$$a, \quad b, \quad bb_1B, \quad d_1b_1Ba(bd_1), \quad e, \quad ed_1B, \quad ed_1(ab_1),$$
die ich nach der Reihe mit
$$a, \quad b, \quad c, \quad d, \quad e, \quad f, \quad g$$
bezeichnen will, und ausserdem die beiden Punkte
$$(h, i) \equiv ef_1 . [a, b, c, d, r], \quad \text{wo } r \equiv d_1f_1B.$$

Ebenso findet sich

(2)
$$xaB(xbC)D(xeE)F = 0$$
für die Punkte
$$a, \quad b, \quad BC, \quad BDa(DCb), \quad e,$$
die ich mit
$$a, \quad b, \quad c, \quad d, \quad e$$
bezeichne, und ausserdem für die vier Punkte
$$(f, g) \equiv DEe . [a, b, c, d, r], \quad \text{wo } r \equiv DEbB,$$
$$(h, i) \equiv FEe . [a, b, c, d, s], \quad \text{wo } s \equiv DFbB.$$

Ferner wird 12

(3)
$$xaBb_1(xb)(xeE)F = 0$$
für die Punkte
$$a, \quad b, \quad bb_1B, \quad ab_1E, \quad e, \quad BE, \quad beEb_1Ba(be)^{*}),$$
die nach der Reihe durch
$$a, \quad b, \quad c, \quad d, \quad e, \quad f, \quad g$$
bezeichnet werden sollen, und ausserdem für die zwei Punkte
$$(h, i) \equiv EFe . [a, b, c, r, s], \quad \text{wo } r \equiv BF, \quad s \equiv ab_1F.$$

---

*) Die vier Punkte $d \ldots g$ in (3) erfolgen so: Nach dem 1. Satze des § 2 wird $xaBb_1(xb)(xeE) = 0$, wenn $xaBb_1(xeE) = 0$ und $xb(xeE) = 0$ ist. Man kann dafür nach (12) $xaBb_1Eex = 0$ und $xbEex = 0$ schreiben. Das letztere giebt nach (9) x entweder in E oder in eb liegend. Dem ersteren wird nach (8) unter andern durch die Punkte BE, ab_1E und e genügt. Also sind BE und ab_1E die Durchschnitte von E mit dem Kegelschnitt $xaBb_1Eex = 0$. Ebenso ist e einer der Durchschnitte von eb mit diesem Kegelschnitt. Um den andern zu finden, nehme man x in eb an, so ist $ex \equiv eb$, also, dies in die Gleichung des Kegelschnitts gesetzt, ergiebt sich $xaBb_1Eeb = 0$ oder nach (12),

Sodann wird

(4)
$$xaBb_1(xb)d_1ExF = 0$$
für die Punkte
$$a,\ b,\ bb_1B,\ d_1b_1Ba(bd_1),\ bd_1E,\ ab_1E,\ BE,$$
die ich nach der Reihe mit
$$a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g\text{*)}$$
bezeichne, und ausserdem für die Punkte
$$(h,\ i) \equiv F\,.\,[a,\ b,\ c,\ d,\ r],\quad \text{wo } r \equiv EFd_1B.$$

Ferner ist

(5)
$$xaBb_1CxD(xeE)F = 0$$
für die Punkte
$$a,\ BC,\ ab_1C,\ DCb_1BaD,\ e,\ DE,\ efCb_1Ba(ef),$$
die der Reihe nach
$$a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g$$
bezeichnen sollen, und ausserdem für die zwei Punkte
$$(h,\ i) \equiv FEe\,.\,[a,\ b,\ c,\ d,\ r],\quad \text{wo } r \equiv DF.$$

13 Endlich ist

(6)
$$xaBb_1CxDc_1ExF = 0$$
für die Punkte
$$a,\ BC,\ ab_1C,\ DCb_1BaD,\ DE,$$
die ich mit
$$a,\ b,\ c,\ d,\ e$$
bezeichne, und ausserdem für die vier Punkte
$$(f,\ g) \equiv E\,.\,[a,\ b,\ c,\ c_1,\ r],\quad \text{wo } r \equiv b_1c_1B,$$
$$(h,\ i) \equiv F\,.\,[a,\ b,\ c,\ d,\ s],\quad \text{wo } s \equiv FEc_1D.$$

In jedem dieser sechs Fälle giebt es also neun Punkte, welche, statt x gesetzt, das betreffende Produkt gleich Null machen.

$beEb_1Bax = 0$, das heisst, x liegt in der Geraden $beEb_1Ba$, aber auch in be, also ist $x \equiv beEb_1Ba(be)$.

*) Die Punkte $e,\ f,\ g$ erfolgen so: Nach dem 1. Satze des § 2 ist $xaBb_1(xb)d_1Ex = 0$, wenn $xaBb_1(xb)d_1x = 0$ und $Ex = 0$ ist. Die erstere Gleichung kann auch $xb(xaBb_1)d_1x = 0$ geschrieben werden. Sie drückt nach (9) aus, dass entweder x in bd_1 liegt, oder dass $xaBb_1x = 0$ ist, das heisst, x in B oder in ab_1 liegt; also erhält man $x \equiv$ den Durchschnitten dieser drei Geraden mit der Geraden E, folglich $\equiv bd_1E,\ BE,\ ab_1E$.

§ 4.

Die besonderen Beziehungen in der Lage der neun in § 3 gefundenen Punkte für jeden der sechs Fälle zu finden.

Die in § 3 gefundenen neun Punkte haben in jedem der sechs Fälle die Beschaffenheit, dass sich um sie eine bewegliche Kurve dritter Ordnung schlingen lässt. In der That haben jene Produkte entweder die Form QF (im zweiten bis sechsten Falle) oder die Form qf_1 (im ersten Falle), wo Q oder q den Faktor x dreimal enthält. Fügt man nun zu QF eine konstante Gerade G als Faktor hinzu, die nicht mit F zusammenfällt, so drückt die Gleichung

$$QFG = 0$$

nach der Formel (6) {S. 113} aus, dass x einer Kurve dritter Ordnung angehört. Diese Kurve enthält offenbar die neun Punkte, welche das Produkt QF gleich Null machen. Alle übrigen Punkte jener Kurve geben, in Q statt x eingeführt, eine Gerade, welche die Gerade F in dem Punkte FG schneidet. Lässt man nun die Gerade G in eine beliebige andere Gerade G' übergehen, welche F in einem von FG verschiedenen Punkte trifft, so drückt die Gleichung $QFG' = 0$ eine Kurve dritter Ordnung aus, welche sich um dieselben neun Punkte schlingt. Alle übrigen Punkte dieser Kurve geben, statt x in Q eingeführt, eine Gerade, welche die Gerade F in dem Punkte FG' schneidet, also in einem andern Punkte, als wenn man in Q die Punkte der ersten Kurve einführt. Beide Kurven haben also ausser jenen neun Punkten keine Punkte gemein, und man erhält also eine bewegliche Kurve dritter Ordnung, die sich um jene festen neun Punkte schlingt. Dasselbe ergiebt sich in dem andern Falle, wenn man qf_1 mit einem †Punkte g_1 kombinirt und dann entsprechend verfährt. Also haben in allen sechs Fällen die gefundenen neun Punkte die angegebene Beschaffenheit. 14

Ferner liegen in jedem der einzelnen sechs Fälle mindestens drei von den neun Punkten in *gerader Linie*. So zum Beispiel liegen in dem ersten Falle, wie sich unmittelbar aus den Formeln (1) in § 3 ergiebt, e, f, g in der Geraden ed_1 und e, h, i in der Geraden ef_1. Es wird genügen, dies für die einzelnen Fälle übersichtlich zusammenstellen.

In gerader Linie liegen:

In (1) die Punkte e, f, g und ebenso e, h, i.
In (2) „ „ e, f, g „ „ e, h, i.
In (3) „ „ e, b, g „ „ e, h, i.
In (4) „ „ e, f, g „ „ e, d, b.
In (5) „ „ e, f, g „ „ e, h, i.
In (6) „ „ e, f, g.

Es ist bekannt, dass, wenn von neun Punkten, um welche sich eine bewegliche Kurve dritter Ordnung schlingen lässt, drei in gerader Linie liegen, die sechs übrigen in einem Kegelschnitt liegen müssen. Also giebt es in den ersten fünf Fällen jedesmal *zwei* Kegelschnitte, in welchen sechs der neun Punkte liegen müssen, in dem letzten giebt es *einen* solchen. Diese Beziehung muss also durch die obigen Formeln gleichfalls ausgedrückt sein. Doch ist es nöthig, zu bemerken, dass dieselbe durch die oben dargestellten Beziehungen schon mitbedingt ist.

§ 5.

Wenn beliebige neun Punkte gegeben sind, welche die in § 4 bezeichnete Lage haben, die Produkte der in § 3 dargestellten Formen zu finden, welche für diese neun Punkte verschwinden.

Es seien $a, b, \dots i$ die neun gegebenen Punkte, welche der Bedingung unterworfen sind, dass sich um sie eine bewegliche Kurve dritter Ordnung schlingen lässt. Hierzu tritt im ersten Falle die Bedingung hinzu, dass e sowohl mit f und g als auch mit h und i in gerader Linie liege. Dann kommt es im *ersten* Falle nur darauf an, B, b_1, d_1, f_1 so zu wählen, dass den Gleichungen (1) in § 3 genügt wird. Ja, da durch acht jener neun Punkte bekanntlich schon immer der neunte bestimmt ist, so kommt es nur darauf an, die Gleichungen für acht Punkte zu erfüllen, indem dann die Gleichung, durch welche der neunte Punkt bestimmt ist, schon immer von selbst erfüllt werden
15 muss. Man wähle zu dem Punkte, der unberücksichtigt bleiben soll, den Punkt g. Dann sagt die Gleichung, durch welche der Punkt c in (1), § 3, bestimmt ist, nämlich $c \equiv bb_1B$, aus, dass c sowohl in bb_1 als in B liegt, oder, anders ausgedrückt, dass bcb_1 und cB Null sind. Die Gleichung $d \equiv d_1b_1Ba(bd_1)$ sagt aus, dass d in der Geraden d_1b_1Ba und in bd_1 liegt, das heisst, dass $d_1b_1Bad = bd_1d = 0$ sei, oder, anders geschrieben (nach (12) in der Einleitung), dass $daBd_1b_1$ und bdd_1 Null sind. Die Gleichung $f \equiv ed_1B$ drückt aus, dass efd_1 und fB Null sind. Diese Ausdrücke, welche hiernach Null sind, in angemessener Ordnung zusammengestellt, sind:

$$bdd_1, \quad cB, \quad bcb_1,$$
$$efd_1, \quad fB, \quad daBd_1b_1.$$

Aus dem Verschwinden der senkrecht unter einander stehenden Ausdrücke folgt sogleich

$$d_1 \equiv bd(ef), \quad B \equiv cf, \quad b_1 \equiv daBd_1(bc).$$

Ferner drückt die Gleichung $(h, i) \equiv ef_1 . [a, b, c, d, r]$ aus, dass h und i in der Geraden ef_1 und in dem durch die Punkte a, b, c, d, r gelegten Kegelschnitte liegen, oder, anders ausgedrückt, dass der Punkt f_1 in der durch die drei Punkte e, h, i gehenden Geraden und der Punkt r in dem durch die sechs Punkte a, b, c, d, h, i gehenden Kegelschnitte liegt. Dass nämlich diese sechs Punkte in einem Kegelschnitte liegen müssen, ist nach § 4 schon in der Bedingung eingeschlossen, dass die andern drei Punkte e, f, g in gerader Linie liegen. Endlich, die Gleichung $r \equiv d_1 f_1 B$ drückt aus, dass r in der Geraden $d_1 f_1$ und in der Geraden B liegt. Da r sowohl in B als in dem Kegelschnitt $[a, b, c, d, h]$ liegt, so wird es in einem der Durchschnitte beider liegen müssen. Der eine dieser Durchschnitte ist c, da $B \equiv cf$ ist, also ist r der andere, das heisst, es ist

$$(c, r) \equiv B . [a, b, c, d, h].$$

Dann geben also die beiden noch übrigen Bestimmungen, dass f_1 in $d_1 r$ und in eh liegt:

$$f_1 \equiv d_1 r(eh).$$

Es sind daher jetzt B, b_1, d_1, f_1 so bestimmt, dass alle Gleichungen in (1), § 3, vorläufig mit Ausschluss der Gleichung $g \equiv ed_1(ab_1)$, erfüllt werden. Setzt man demnach diese gefundenen Werthe in das Produkt $xaBb_1(xb)d_1(xe)f_1$, so wird dasselbe für die acht Punkte $x \equiv a \ldots f, h, i$ gleich Null gemacht, also auch durch den neunten Punkt g; und die Aufgabe ist für den ersten Fall gelöset. Es reicht daher die Anzahl der Gleichungen in (1), § 3, gerade zur †Bestimmung 16 der sieben konstanten Faktoren des Produkts hin. Man erwäge, dass jede Bestimmung eines Punkts (oder einer geraden Linie) durch zwei Zahlengleichungen in (1), § 3, durch welche die neun Punkte bestimmt wurden, achtzehn Zahlengleichungen einschliessen. Da jedoch durch acht Punkte schon der neunte bestimmt war, so braucht man nur sechzehn dieser Gleichungen zu berücksichtigen. Unter diesen Gleichungen sind aber zwei, nämlich die, welche ausdrücken, dass e, f, g und ebenso e, h, i in gerader Linie liegen, in den Bedingungen der Aufgabe eingeschlossen; es bleiben daher noch vierzehn Zahlengleichungen zu berücksichtigen. Dasselbe gilt in allen übrigen Fällen, mit Ausnahme der sechsten, wo nur die Punkte e, f, g in gerader Linie liegen sollen, also fünfzehn Gleichungen übrig bleiben. Jene vierzehn Zahlengleichungen reichen nun in unserem Falle zur Bestimmung der sieben konstanten Faktoren des Produkts gerade hin. Dasselbe gilt für den dritten und vierten Fall, da sich hier auch nur sieben konstante Faktoren in dem Produkte zeigen. Hingegen in dem

zweiten und fünften Falle erscheinen acht konstante Faktoren, und es bleiben also hier noch zwei Bestimmungen willkürlich. Im sechsten Falle endlich kommen gleichfalls acht konstante Faktoren vor, aber fünfzehn Zahlengleichungen; also bleibt hier nur eine Bestimmung willkürlich. Diese Bemerkung möge zum Leitfaden bei der Lösung der folgenden Aufgaben dienen.

Im *zweiten* Falle bleiben zwei Bestimmungen willkürlich. Aus den Gleichungen für c und d in (2), § 3, erhält man dann folgende vier Ausdrücke gleich Null: cB, cC, $daBD$, $dbDC$. Ferner sagt die Gleichung $(f, g) \equiv DEe \,.\, [a, b, c, d, r]$ aus, dass DE in der durch e, f, g gehenden Geraden liegt, und dass r in dem durch die sechs Punkte a, b, c, d, f, g gehenden Kegelschnitt liegt. Die zugehörige Gleichung $r \equiv DEbB$ drückt aus, dass r in B liegt und DE in br. Nimmt man nun die Gerade B, für welche nur die Bestimmung da war, dass sie durch c gehen soll, willkürlich durch c an, so ist der Punkt r als zweiter Durchschnittspunkt der Geraden B und des durch a, b, c, d, f, g gehenden Kegelschnittes bestimmt, das heisst, es ist

$$(c, r) \equiv B \,.\, [a, b, c, d, f].$$

Dann ist DE bestimmt, nämlich $\equiv rb(ef)$. Da nun D durch diesen Punkt und den Punkt daB geht, so ist auch D bestimmt und dadurch wieder C, nämlich

$$D \equiv rb(ef)(daB), \qquad C \equiv dbDc.$$

Nimmt man noch die Gerade E willkürlich durch den Punkt $rb(ef)$ an, so sind durch diese Annahme die bisher betrachteten Gleichungen 17 (2) aus § 3 †erfüllt. Ferner die Gleichung $(h, i) \equiv FEe \,.\, [a, b, c, d, s]$ sagt aus, dass FE in der durch e, h, i gehenden Geraden und s in dem durch die sechs Punkte a, b, c, d, h, i gehenden Kegelschnitt liegt. Endlich sagt die Gleichung $s \equiv DFbB$ aus, dass s in B und in DFb liegt; das letztere lässt sich so ausdrücken: dass F in bsD liegt. Mithin erhalten wir

$$(c, s) \equiv B \,.\, [a, b, c, d, h], \qquad F \equiv ehE(bsD);$$

wodurch nun alle Gleichungen in (2), § 3, erfüllt sind und die Aufgabe für den zweiten Fall gelöset ist.

Im *dritten* Falle liegt (nach § 4) der Punkt e sowohl mit b und g in gerader Linie als auch mit h und i. Daraus folgt (nach § 4) dass die vier Punkte a, c, d, f sowohl mit b und g in einem und demselben Kegelschnitt liegen als auch mit h und i, wenn, wie vorausgesetzt wurde, $a \ldots i$ neun solche Punkte sind, um die sich eine bewegliche Kurve dritter Ordnung schlingen lässt.

Ich werde nun von den Gleichungen in (3), § 3, die Gleichung für g ganz unberücksichtigt lassen und aus der Gleichung für f nur die Bestimmung aufnehmen, dass f in B liegen soll. Dann geben die Gleichungen für c und d:

$$0 = bcb_1 = cB = adb_1 = dE,$$

woraus man, da auch f in B liegt,

$$B \equiv cf, \quad b_1 \equiv bc(ad), \quad dE = 0$$

erhält. Die Gleichung $(h, i) \equiv EFe.[a, b, c, r, s]$ drückt aus, dass EF in der durch e, h und i gehenden Geraden, und dass die Punkte r und s in dem durch die fünf Punkte a, b, c, h, i gelegten Kegelschnitt liegen. Die hiezugehörigen Gleichungen $r \equiv BF$, $s \equiv ab_1 F$ sagen aus, dass r in B, s in ab_1 liegt und F durch die Punkte r und s geht. Man erhält also:

$$(c, r) \equiv B.[a, b, c, h, i], \quad (a, s) \equiv ab_1.[a, b, c, h, i], \quad F \equiv rs.$$

Endlich bestimmt sich E dadurch, dass es durch den Punkt d geht und EF in eh liegt, das heisst E in ehF; also ist

$$E \equiv ehFd.$$

Hierdurch sind alle Konstanten des Produkts $xaBb_1(xb)(xeE)F$ bestimmt; und zwar so, dass dies Produkt für die Punkte a, b, c, d, e, h, i gleich Null wird. Bezeichnet man die beiden übrigen Punkte, für die jenes Produkt Null wird, für den Augenblick mit f' und g', so muss nach den Formeln (3), § 3, einer derselben, zum Beispiel f', in $B \equiv cf$ liegen, der andere, g', in eb; und dann muss f' nach § 4 mit a, c, d, h, i und mit a, c, d, b, g' in einem Kegelschnitte liegen. Es wird also f' dadurch bestimmt, und zwar auf gleiche Weise †wie f, 18 nämlich:

$$(c, f) \equiv (c, f') \equiv B.[a, c, d, h, i],$$

und ebenso:

$$(b, g) \equiv (b, g') \equiv eb.[a, c, d, b, f].$$

Also wird jenes Produkt für die neun gegebenen Punkte gleich Null, und die Aufgabe ist auch für den dritten Fall gelöset.

Die Lösung der Aufgabe für die *übrigen* Fälle hat nun keine Schwierigkeiten, und es wird genügen, die Formeln *zusammenzustellen*. Der Uebersicht wegen füge ich auch die Formeln für die ersten drei Fälle hinzu.

$$(1)\begin{cases} d_1 \equiv bd(ef), \quad B \equiv cf, \; b_1 \equiv daBd_1(bc), \quad (c, r) \equiv B.[a, b, c, d, h], \\ \qquad f_1 \equiv d_1 r(eh). \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} cB = 0^{*}), \quad (c,\, r) \equiv B\,.\,[a,\, b,\, c,\, d,\, f], \quad (c,\, s) \equiv B.[a,\, b,\, c,\, d,\, h], \\ D \equiv rb(ef)(daB), \quad C \equiv dbDc, \quad rb(ef)E = 0^{*}), \quad F \equiv ehE(bsD). \end{cases}$$

$$(3)\begin{cases} B \equiv cf,\ b_1 \equiv bc(ad),\ (c,r) \equiv B.[a, b, c, h, i],\ (a,s) \equiv ad\,.\,[a, b, c, h, i], \\ F \equiv rs,\ E \equiv ehFd. \end{cases}$$

$$(4)\begin{cases} B \equiv cg,\ b_1 \equiv bc(af),\ E \equiv gf,\ d_1 \equiv adBb_1(bd),\ (c,r) \equiv B\,.\,[a, b, c, d, h], \\ F \equiv rd_1Eh. \end{cases}$$

$$(5)\begin{cases} bB = 0^{*}),\ C \equiv bc,\ D \equiv df,\ b_1 \equiv daB(DC)(ac),\ (d,r) \equiv D\,.\,[a, b, c, d, h], \\ fE = 0^{*}),\ F \equiv ehEr. \end{cases}$$

$$(6)\begin{cases} bB = 0^{*}),\ C \equiv bc,\ D \equiv de,\ E \equiv ef,\ b_1 \equiv daB(DC)(ac), \\ (b,r) \equiv B\,.\,[a, b, c, f, g], (r, c_1) \equiv rb_1\,.\,[a, b, c, f, g], (d,s) \equiv D\,.\,[a, b, c, d, h], \\ F \equiv sc_1Eh. \end{cases}$$

Es ist noch zu bemerken, dass in den drei letzten Fällen die Formeln so gebildet sind, dass in (4) der Punkt e, in (5) der Punkt g, in (6) der Punkt i als derjenige gewählt ist, welcher unberücksichtigt bleibt. Die Art, wie derselbe aus den übrigen acht Punkten bestimmt ist, ergiebt sich leicht aus den in § 4 für die einzelnen Fälle gestellten Bedingungen. Nämlich im vierten Falle liegt e sowohl mit g und f als mit b und d in gerader Linie; mithin ist dann $e \equiv gf(bd)$. Im fünften Falle liegt (nach § 4) g in der Geraden ef und in dem durch a, b, c, d, f gelegten Kegelschnitt, also ist dann

$$(f,\, g) = ef\,.\,[a,\, b,\, c,\, d,\, f].$$

Im letzten Falle endlich liegt i (nach § 3) in dem durch a, b, c, d, h 19 gelegten Kegelschnitt, und (nach § 3) zugleich in der Geraden F, die durch h geht, also ist

$$(h,\, i) \equiv F\,.\,[a,\, b,\, c,\, d,\, h].$$

Es ist leicht, nach den sechs Formelgruppen die Konstruktionen auf dem Papiere auszuführen, indem alle die Formeln nur Symbole für geometrische Konstruktionen sind. Auch leuchtet unmittelbar ein, dass sie sich alle bloss mittels des Lineals machen lassen. Denn wo dort auf die Durchschnitte einer Geraden und eines Kegelschnitts zurückgegangen wird, ist der eine dieser Durchschnitte schon immer bekannt. Es werde zum Beispiel der Punkt x in

$$(a,\, x) \equiv af\,.\,[a,\, b,\, c,\, d,\, e]$$

*) Diese Gleichungen sollen ausdrücken, dass die Gerade, die den letzten Faktor bildet, *willkürlich* durch den Punkt, mit dem sie multiplicirt ist, gelegt werden kann.

gesucht, so hat man, wenn man das mystische Sechseck $axbcde$ beschreibt, nach dem Pascal'schen Satze sogleich

$$0 = bc(ea)[cd\,.\,ax](de)bx.$$

Hier kann man statt ax die Linie af setzen, da nach der Annahme x in af liegen soll. Dann drückt die gefundene Gleichung aus, dass x auch in der Geraden $bc(ea)[cd\,.\,af](de)b$ liegt, also hat man

$$x \equiv bc(ea)[cd\,.\,af](de)b(af).$$

Die wirkliche Ausführung der Konstruktionen nach der obigen Formelntafel ist von wesentlichem Nutzen; doch habe ich nicht die zugehörigen Figuren beigefügt, weil es wesentlich ist, die allmähliche Fortschreitung der Konstruktion zu verfolgen, welche in einer gezeichnet vorliegenden Figur doch immer verschwindet.

Vermöge der erlangten Resultate lässt sich nun die Erzeugung der Kurven vierter Ordnung auf die einfache Aufgabe zurückführen: die Projektivität zwischen zwei Strahlenbüscheln, oder zwischen einem Strahlenbüschel und einer Geraden, durch ein planimetrisches Produkt darzustellen.

§ 6.

Die Projektivität zweier Strahlenbüschel durch ein planimetrisches Produkt darzustellen.

Es seien drei Strahlen P_1, P_2, P_3 (Fig. 31), die durch einen Punkt f_1 gehen, und drei ihnen entsprechende Strahlen L_1, L_2, L_3, die durch einen Punkt k gehen, gegeben. Bekanntlich wird durch drei Paare entsprechender Strahlen die Projektivität zweier Strahlenbüschel bestimmt. Es seien l_1, l_2, l_3 die Durchschnittspunkte jener drei entsprechenden Strahlenpaare. Liegen nun l_1, l_2, l_3 in einer Geraden G, so ist $L_\mathfrak{a} \equiv P_\mathfrak{a} Gk$, für die Indices $\mathfrak{a} = 1, 2, 3$, und die beiden Strahlenbüschel sind perspektivisch. Liegen aber l_1, l_2, l_3 nicht † in gerader Linie, so setze man $l_1 l_2 \equiv G$, $l_1 l_3 \equiv H$ und $L_2 P_3 \equiv g_1$. Dann ist offenbar

$$L_\mathfrak{a} \equiv P_\mathfrak{a} G g_1 H k,$$

Fig. 31.

für $\mathfrak{a} = 1, 2, 3$, wie es der blosse Anblick von Fig. 31 zeigt, und es

ist unmittelbar klar, dass, wenn man noch beliebig viele Strahlen L_a durch f_1 zieht und das zugehörige P_a durch die obige Gleichung bestimmt, L_a und P_a entsprechende Strahlen zweier projektivischer Strahlenbüschel werden. Also ist die Aufgabe gelöset.

§ 7.

Die Projektivität eines Strahlenbüschels und einer Geraden durch ein planimetrisches Produkt darzustellen.

Auch diese Projektivität wird bekanntlich durch drei Paare entsprechender Elemente bestimmt. Es seien p_1, p_2, p_3 drei Punkte einer Geraden F und L_1, L_2, L_3 drei Strahlen durch einen Punkt k. Man verbinde p_1, p_2, p_3 mit einem beliebigen Punkte a, so erhält man drei Strahlen, die wir P_1, P_2, P_3 nennen wollen. Dann lassen sich nach § 6 zwei Linien B und D und ein Punkt c von der Art finden, dass für die Indices $a = 1, 2, 3$ jedesmal $L_a \dots P_a BcDk$ ist, also

$$L_a \equiv p_a aBcDk.$$

Nimmt man überhaupt einen beliebigen Punkt p in der Geraden F an und setzt $L \equiv paBcDk$, so sind p und L entsprechende Elemente der punktirten Geraden F und des Strahlenbüschels k, während p_1 und L_1, p_2 und L_2, p_3 und L_3 entsprechende Elemente derselben projektivischen Gebilde sind. Nun lassen sich in der Geraden F stets zwei Punkte finden, welche in den ihnen entsprechenden Geraden liegen. Man hat nämlich für einen solchen Punkt p nur die Gleichung $paBcDkp = 0$ zu erfüllen. Diese giebt, als Ort des Punktes p, einen Kegelschnitt; mithin sind die Punkte, in welchen dieser Kegelschnitt die Gerade F schneidet, die gesuchten Punkte. Es können diese Punkte imaginär sein, aber da die Konstruktionen mittels imaginärer Punkte stets nach einem allgemeinen Verfahren ohne Schwierigkeit auf Konstruktionen mittels reeller Punkte sich zurückführen lassen, so braucht man auf diesen Fall keine besondere Rücksicht zu nehmen. Es seien nun jene beiden Punkte p_4 und p_5. Dann sind $L_4 \equiv kp_4$ und $L_5 \equiv kp_5$ (Fig. 32). Nun ziehe man durch p_5 eine beliebige Gerade G und setze

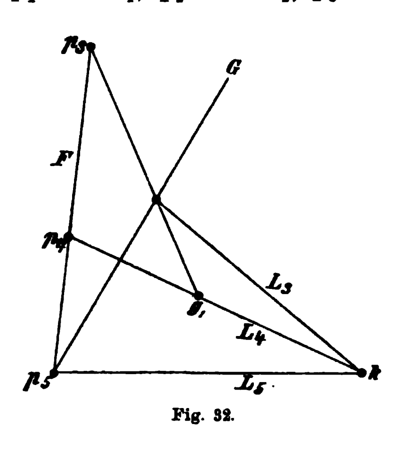


Fig. 32.

$GL_3p_3L_4 \equiv g_1$, so zeigt der blosse Anblick der Figur, dass $L_\alpha \equiv p_\alpha g_1 Gk$ für $\alpha = 3, 4, 5$; also gilt diese Gleichung auch für jedes Elementenpaar, welches mit diesen drei †Paaren projektivisch ist, mithin auch 21 für die Elementenpaare L_1 und p_1, L_2 und p_2, das heisst, es ist

$$L_\alpha \equiv p_\alpha g_1 Gk,$$

auch für die Indices $\alpha = 1, 2, 3$, und die Aufgabe ist gelöset.

§ 8.

Erzeugung der Kurven vierter Ordnung durch die in § 1 dargestellten Bewegungen.

Ich erinnere hier an einen Satz, den ich in einer früheren Abhandlung (Crelle's Journal Band 42, S. 207 {hier S. 103}) für Kurven n-ter Ordnung bewiesen habe, und welcher für Kurven vierter Ordnung folgendermassen lautet:

Wenn man durch drei Durchschnittspunkte einer Kurve vierter Ordnung und einer Geraden eine Kurve dritter Ordnung legt, so schneidet sie die erstere ausserdem noch in neun solchen Punkten, durch welche sich eine bewegliche Kurve dritter Ordnung legen lässt. Diese schneidet die Kurve vierter Ordnuug ausserdem in drei Punkten, welche in einer beweglichen, um einen festen Punkt dieser Kurve rotirenden Geraden liegen.

Die Bedingungen, welche wir in § 4 für die neun Punkte $a \ldots i$ aufstellten, waren: erstens, dass sich um sie eine bewegliche Kurve dritter Ordnung schlingen lasse, und zweitens, dass im sechsten Falle drei Punkte in gerader Linie liegen, in den übrigen Fällen ein Punkt (e) mit zwei Punktepaaren in geraden Linien liege. Der Symmetrie wegen kann man annehmen, dass auch im sechsten Falle e, h und i in gerader Linie liegen, also e sowohl mit f und g als {auch} mit h und i in gerader Linie liege.

Nun lassen sich in jeder gegebenen Kurve vierter Ordnung Ω nach dem angegebenen Satze stets neun solche Punkte finden, welche diesen Bedingungen genügen. Nämlich, man nehme in der Kurve Ω einen beliebigen Punkt e an, ziehe von ihm zwei Gerade und wähle auf jeder unter den drei Punkten, in welchen sie die Kurve ausser e noch schneidet, zwei Punkte aus; durch diese zwei Punktepaare, durch den Punkt e und durch drei der Durchschnittspunkte einer dritten Geraden L_1 mit der Kurve lege man eine beliebige Kurve dritter Ordnung hindurch, so schneidet dieselbe die Kurve Ω noch in vier Punkten, welche mit e und den zwei Punktepaaren, die in den von e

gezogenen Geraden liegen, zusammen neun Punkte bilden, die allen in § 4 aufgestellten Bedingungen genügen.

Es lässt sich also vermöge der Konstruktionen in § 5 stets ein Produkt finden, welches verschwindet, wenn der darin vorkommende 22 Faktor x mit irgend einem jener neun Punkte zusammenfällt, †und welches eine beliebige der dort angeführten sechs Formen hat. Dies Produkt stellt in dem ersten der sechs Fälle eine variable Gerade vor, die durch den festen Punkt f_1 geht und die wir in der zugehörigen Fig. 24 mit P bezeichnet haben; in den übrigen fünf Fällen stellt jenes Produkt einen variablen Punkt vor, der in der festen Geraden F liegt und den wir in den zugehörigen Fig. 25 bis 29 mit p bezeichneten.

In allen Fällen ist dies Produkt in Beziehung auf x vom dritten Grade. Der Ort derjenigen Punkte x, welche, in das Produkt eingeführt, demselben einen konstanten Werth geben, ist eine Kurve dritter Ordnung, welche sich um jene neun Punkte schlingt. In der That: soll das Produkt p mit einem konstanten Punkte p_1 (in F) zusammenfallen und ist P_1 eine beliebige durch p_1 gezogene konstante Gerade, so hat man die Gleichung

$$pP_1 = 0,$$

welche eine Kurve dritter Ordnung als Ort von x darstellt, und welche ausdrückt, dass p in dem Durchschnittspunkt p_1 von P_1 und F fällt.

Stellt man sich drei solcher Punkte p_1, p_2, p_3 in F vor, so erhält man drei Kurven dritter Ordnung, welche sich um jene neun Punkte $a \ldots i$ schlingen und deren übrige Punkte, statt x in p eingeführt, p beziehlich $\equiv p_1$, p_2, p_3 machen. Nach dem zu Anfange dieses Paragraphen angeführten Satze schneidet jede dieser drei Kurven die gegebene Kurve Ω noch ausserdem in drei Punkten, die in gerader Linie liegen. Es werde diese Gerade, in Hinsicht auf die drei Kurven, beziehlich mit L_1, L_2, L_3 bezeichnet. Diese drei Geraden schneiden sich, nach demselben Satze, in einem festen Punkte der gegebenen Kurve. Es sei k der feste Punkt. Dann hat man drei Punkte p_1, p_2, p_3 in der Geraden F und drei ihnen entsprechende Geraden L_1, L_2, L_3 durch den Punkt k und kann also nach § 7 eine Gerade G und einen Punkt g_1 von der Art finden, dass $L_\mathfrak{a} \equiv p_\mathfrak{a} g_1 G k$ ist, für die Indices $\mathfrak{a} = 1, 2, 3$. Nun ist die Gleichung

$$p_\mathfrak{a} g_1 G k x = 0,$$

nach Formel (6), die Gleichung einer von x beschriebenen Kurve vierter Ordnung. Dieselbe hat mit Ω gemein: erstens die neun Punkte $a \ldots i$, welche, statt x gesetzt, das Produkt p gleich Null machen, ferner den Punkt k und endlich die neun Punkte, in welchen die drei Geraden $L_\mathfrak{a}$

die Kurve Ω ausser e noch schneiden; denn für diese Punkte verwandelt sich nach dem Obigen p in p_α, also wird dann $L_\alpha \equiv p_\alpha g_1 Gk$, und da x in L_α liegt, so wird

$$p_\alpha g_1 Gkx = 0;$$

das heisst, es sind diese neun Punkte auch Punkte der durch die letzte Gleichung dargestellten Kurve. Also hat diese Kurve mit Ω schon neunzehn Punkte gemein, und schon $4^2 + 1 = 17$ genügen allgemein zur Bestimmung einer Kurve vierter Ordnung. Also ist die durch die obige Gleichung dargestellte Kurve mit der gegebenen Kurve Ω identisch. 23

Wir haben somit die Erzeugbarkeit aller Kurven vierter Ordnung durch die in den Formeln (2) bis (6) des § 1 dargestellten Bewegungen nachgewiesen. In der ersten jener Formeln ist das Produkt, bis zum Faktor f_1 hin, eine variable, durch den Punkt f_1 gehende Gerade, die wir mit P bezeichneten. Soll P mit einer konstanten Geraden P_1 zusammenfallen und ist p_1 ein beliebiger, von f_1 verschiedener, konstanter Punkt dieser Geraden, so hat man die Gleichung

$$Pp_1 = 0,$$

welche eine Kurve dritter Ordnung als Ort von x darstellt, und welche ausdrückt, dass die Gerade P durch den Punkt p_1 geht, das heisst, da P auch durch f_1 geht, mit der Geraden $p_1 f_1 \equiv P_1$ zusammenfällt. Stellt man sich drei solche Geraden P_1, P_2, P_3 vor, welche durch f_1 gehen, so erhält man drei Kurven dritter Ordnung, welche sich um diejenigen neun Punkte $a \ldots i$ schlingen, die P gleich Null machen, während die übrigen Punkte jener Kurven, statt x in P eingeführt, diesem beziehlich die drei Werthe P_1, P_2, P_3 geben. Diese drei Kurven schneiden wieder die Kurve Ω in je drei Punkten, welche beziehlich in drei Geraden L_1, L_2, L_3 liegen, während diese drei Geraden sich in einem und demselben Punkte k der Kurve Ω begegnen.

Nun lassen sich nach § 6 stets zwei Gerade G und H und ein Punkt g_1 von der Art finden, dass $P_\alpha G g_1 Gk \equiv L_\alpha$ wird, für $\alpha = 1, 2, 3$. Sind G, g_1, H auf diese Weise bestimmt, so ist die Gleichung

$$PGg_1 Hkx = 0$$

die einer von x beschriebenen Kurve vierter Ordnung, welche mit der Kurve Ω erstens die neun Punkte $a \ldots i$ gemein hat, welche statt x gesetzt, das Produkt P verschwinden machen; ferner hat man den Punkt k und endlich die neun Punkte, in welchen die drei Geraden L_α die Kurve Ω, ausser dem Punkte e, noch schneiden. Das giebt neun-

VIII.

1 Allgemeiner Satz über die lineale Erzeugung aller algebraischen Oberflächen.

Von

Prof. **H. Grassmann,**
Oberlehrer am Gymnasio zu Stettin.

Crelle's Journal Bd. 49, Heft I, S. 1—9 (1855).

Nachdem ich in einer Reihe von Aufsätzen die lineale Erzeugbarkeit der algebraischen *Kurven* in der Ebene nachgewiesen habe, will ich das Gleiche nun auch für die algebraischen *Oberflächen* thun.

Unter *linealer Konstruktion* im Raume verstehe ich die *Verbindung dreier Punkte durch eine Ebene* und jede hierauf zurückführbare Konstruktion; und zwar gleichviel, ob die drei Punkte alle drei in endlicher Entfernung liegen oder beliebige davon in unendlicher Entfernung sich befinden. Hierin ist schon eingeschlossen die Verbindung zweier Punkte a und b durch eine Gerade. Denn legt man durch a und b eine beliebige Ebene und nimmt ausserhalb derselben einen beliebigen Punkt c an, so ist der Durchschnitt jener Ebene und der Ebene abc die gesuchte Gerade. Der Bequemlichkeit wegen werde ich Punkte, gerade Linien und Ebenen mit dem gemeinschaftlichen Namen *Elemente* bezeichnen. Der zu erweisende Satz über die Erzeugung der algebraischen Oberflächen lässt sich dann in folgender Form aussprechen:

Wenn die Lage eines Punktes x (oder einer Ebene) im Raume dadurch beschränkt ist, dass zwei gerade Linien, welche durch lineale Konstruktionen aus x und einer Reihe fester Elemente hervorgehen, in derselben Ebene liegen sollen, so ist der Ort von x eine algebraische Oberfläche, und zwar ist sie ein Gebilde n-ten Grades, wenn bei jenen

Konstruktionen x im Ganzen n-mal angewendet ist. Umgekehrt lässt sich jede algebraische Oberfläche auf die angegebene Weise erzeugen.

Nämlich zur Konstruktion von x selbst ist x eben *einmal* angewandt, zur Konstruktion der festen Elemente *kein*mal. Wenn ferner x zur Konstruktion zweier Elemente beziehlich $\mathfrak{a}$-mal und $\mathfrak{b}$-mal angewandt ist, so ist es zur Konstruktion der Verbindungs-Linie oder -Ebene oder des Durchschnitts beider $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})$-mal angewandt. Um den Begriff des Gebildes n-ten Grades scharf zu fassen, will ich diejenige Koordinatenbestimmung zu Grunde legen, welche durch die Symmetrie ihrer Formeln und durch die Allgemeingültigkeit † ihrer Resultate vor jeder andern den Vorzug hat. Nämlich wenn x_0, x_1, x_2, x_3 vier veränderliche Grössen sind, die jedoch nicht alle gleichzeitig Null sein dürfen, und $x_1 : x_0$, $x_2 : x_0$, $x_3 : x_0$ die rechtwinkligen oder schiefwinkligen Koordinaten eines Punktes x sind, so werde ich x_0, x_1, x_2, x_3 die vier Koordinaten des Punktes x nennen. Durch ihre Verhältnisse ist die Lage des Punktes x bestimmt. Unter einem Punktgebilde n-ten Grades verstehe ich nun die Gesamtheit der Punkte, deren vier Koordinaten einer in Bezug auf sie homogenen Gleichung n-ten Grades genügen. Hieraus geht dann der Begriff des Ebenengebildes n-ten Grades durch Reciprocität hervor; und danach wird das Verständniss des obigen Satzes keine Schwierigkeit haben. Noch füge ich hinzu, dass man statt der Bedingung zweier in derselben Ebene liegender Geraden auch die Bedingung, dass vier Punkte in derselben Ebene liegen (oder vier Ebenen durch denselben Punkt gehen) sollen, hätte setzen können, indem mit der einen dieser Bedingungen auch jedesmal die andere erfüllt ist. 2

Den Beweis des obigen Satzes, welcher in meiner Ausdehnungslehre (§ 145 {Ges. Werke I, 1, S. 245, 246}) aus den Prinzipien der geometrischen Analyse sich unmittelbar ergab, will ich hier auf die gewöhnliche Analyse gründen.

Die Gleichung der Ebene ist bekanntlich:

$$\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0. \tag{1}$$

Dieselbe drückt aus, dass der Punkt, dessen vier Koordinaten x_0, x_1, x_2, x_3 sind, in einer festen Ebene liegt. Ich will α_0, α_1, α_2, α_3 die Koordinaten dieser Ebene nennen. Dann drückt also die Gleichung (1) aus, dass der Punkt x, dessen Koordinaten x_0, x_1, x_2, x_3 sind, in einer Ebene liegt, deren Koordinaten α_0, α_1, α_2, α_3 sind. Sollen daher vier Punkte a, b, c, ∂, deren Koordinaten die Indices 0, 1, 2, 3 markiren mögen, in einer und derselben Ebene liegen, so erhält man, wenn α_0, α_1, α_2, α_3 die Koordinaten dieser Ebene sind, die vier Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\alpha_0 a_0 + \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 &= 0,\\
\alpha_0 b_0 + \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3 &= 0,\\
\alpha_0 c_0 + \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \alpha_3 c_3 &= 0,\\
\alpha_0 \partial_0 + \alpha_1 \partial_1 + \alpha_2 \partial_2 + \alpha_3 \partial_3 &= 0.
\end{aligned}$$

Diese Gleichungen können zusammen nur bestehen, wenn ihre *Determinante* Null ist; das heisst, setzt man

3

$$(2)\quad \begin{cases} \Delta = \operatorname{Det}\begin{Bmatrix} a_0, & a_1, & a_2, & a_3, \\ b_0, & b_1, & b_2, & b_3, \\ c_0, & c_1, & c_2, & c_3, \\ \partial_0, & \partial_1, & \partial_2, & \partial_3, \end{Bmatrix} = \Sigma \pm a_0 b_1 c_2 \partial_3, \\ \text{so ist} \\ \Delta = 0 \end{cases}$$

die Bedingungsgleichung dafür, dass die vier Punkte a, b, c, ∂ in einer Ebene liegen.

Vermöge der Reciprocität zwischen Punkt und Ebene drückt dieselbe Gleichung auch die Bedingung aus, dass vier Ebenen, deren Koordinaten $a_0, \dots a_3$, $b_0, \dots b_3$ u. s. w. sind, durch einen Punkt gehen. Da die Funktion Δ in Bezug auf die Koordinaten eines jeden der vier Punkte, z. B. in Bezug auf ∂_0, ∂_1, ∂_2, ∂_3, homogen und vom ersten Grade ist, so kann man statt $\Delta = 0$ auch

$$\Delta = \frac{d\Delta}{d\partial_0}\partial_0 + \frac{d\Delta}{d\partial_1}\partial_1 + \frac{d\Delta}{d\partial_2}\partial_2 + \frac{d\Delta}{d\partial_3}\partial_3 = 0$$

schreiben.

Setzt man hier den Punkt ∂ innerhalb der Ebene abc variabel, das heisst, setzt man seine Koordinaten ∂_0, ∂_1, ∂_2, ∂_3 variabel, jedoch so, dass sie der zuletzt aufgestellten Gleichung genügen, so folgt, dass die Koordinaten der Ebene abc, nach der oben aufgestellten Definition,

$$(3)\quad \begin{cases} & \dfrac{d\Delta}{d\partial_0}, \quad \dfrac{d\Delta}{d\partial_1}, \quad \dfrac{d\Delta}{d\partial_2}, \quad \dfrac{d\Delta}{d\partial_3}, \\ \text{das heisst:} & \\ & \Sigma \pm a_1 b_2 c_3, \quad \Sigma \pm a_0 b_3 c_2, \quad \Sigma \pm a_0 b_1 c_3, \quad \Sigma \pm a_0 b_2 c_1 \end{cases}$$

sind. Dieselben Ausdrücke sind zugleich die Koordinaten des Durchschnittspunktes dreier Ebenen, deren Koordinaten $a_0 \dots a_3$, $b_0 \dots b_3$, $c_0 \dots c_3$ sind.

Es seien endlich die Koordinaten zweier Punkte a und b und einer Ebene γ gegeben, nämlich $a_0 \dots a_3$, $b_0 \dots b_3$, $\gamma_0 \dots \gamma_3$; und es seien die Koordinaten $x_0 \dots x_3$ des Durchschnittspunktes x der Geraden ab und der Ebene γ gesucht. Wenn x in der Geraden ab liegen soll, so lassen sich die Koordinaten von x in der Form

$$m a_0 + n b_0, \quad m a_1 + n b_1, \quad m a_2 + n b_2, \quad m a_3 + n b_3$$

darstellen, wo m und n beliebige Zahlgrössen sind. Und umgekehrt, wenn sich die Koordinaten von x in dieser Form darstellen lassen, so liegt x in ab. Es folgt dies unmittelbar daraus, dass die Parallelprojektionen von Theilen derselben Linie sich wie diese Theile verhalten. Die Bedingung, dass x in γ † liegt, wird durch die Gleichung 4

$$x_0\gamma_0 + x_1\gamma_1 + x_2\gamma_2 + x_3\gamma_3 = 0$$

ausgedrückt. Setzt man hierin statt $x_0 \ldots x_3$ ihre obigen Werthe, so ergiebt sich

$$m[a_0\gamma_0 + a_1\gamma_1 + a_2\gamma_2 + a_3\gamma_3] + n[b_0\gamma_0 + b_1\gamma_1 + b_2\gamma_2 + b_3\gamma_3] = 0;$$

und setzt man das hieraus entspringende Verhältniss von m zu n in die obigen Ausdrücke der Koordinaten, so erhält man:

$$(4) \quad \begin{cases} a_0q - b_0p, \quad a_1q - b_1p, \quad a_2q - b_2p, \quad a_3q - b_3p, \quad \text{wo} \\ p = a_0\gamma_0 + a_1\gamma_1 + a_2\gamma_2 + a_3\gamma_3, \quad q = b_0\gamma_0 + b_1\gamma_1 + b_2\gamma_2 + b_3\gamma_3. \end{cases}$$

Diese Ausdrücke stellen also die Koordinaten des Durchschnittspunktes x einer Ebene dar, deren Koordinaten $\gamma_0, \ldots \gamma_3$ sind, und einer Geraden, welche durch zwei Punkte geht, deren Koordinaten $a_0, \ldots a_3$ und $b_0, \ldots b_3$ sind. Vermöge der Reciprocität zwischen Punkt und Ebene stellen dieselben Ausdrücke auch die Koordinaten einer Ebene dar, welche durch einen Punkt mit den Koordinaten $\gamma_0, \ldots \gamma_3$ und durch die Durchschnittslinie zweier Ebenen mit den Koordinaten $a_0, \ldots a_3$ und $b_0, \ldots b_3$ gelegt ist.

Hiermit haben wir nun die sämtlichen Formeln beisammen, welche zum Beweise des Satzes hinreichen. Fragt man nämlich nach der Art, wie vermöge linealer Konstruktionen aus einer Reihe von Elementen neue Elemente hervorgehen können, so ist dies, wenn wir Alles auseinanderlegen, nur auf eine der folgenden sechs Arten möglich:

Erstlich: aus drei Punkten kann ihre Verbindungsebene hervorgehen, und *zweitens* reciprok aus drei Ebenen ihr Durchschnittspunkt. Ferner kann *drittens* aus zwei Punkten ihre Verbindungslinie und *viertens* reciprok aus zwei Ebenen ihre Durchschnittslinie; endlich *fünftens* aus einem Punkte und einer Geraden ihre Verbindungsebene und *sechstens* reciprok aus einer Ebene und einer Geraden ihr Durchschnittspunkt hervorgehen.

Die letzten vier Arten lassen sich noch weiter reduciren. In der That kann die durch die dritte Erzeugungsart hervorgehende Gerade bei den folgenden Konstruktionen entweder gar nicht wieder vorkommen, in welchem Falle das Verbinden jener Punkte ganz unterbleiben kann, oder sie tritt mit einem dritten Punkte in Verbindung, in welchem Falle man die Verbindungsebene dreier Punkte, also die

erste Erzeugungsart erhält; oder endlich, sie tritt mit einer Ebene in Verbindung. Hierauf aber lässt sich die sechste Erzeugungsart gleichfalls zurückführen; denn die Gerade, mit welcher hier die Ebene in Verbindung tritt, kann entweder als Durchschnitt zweier Ebenen entstanden sein, in welchem Falle man den Durchschnitt dreier Ebenen, 5 also † die zweite Erzeugungsart bekommt, oder sie kann als Verbindungslinie zweier Punkte entstanden sein, was auf denselben Fall zurückführt, wie die dritte Erzeugungsart. Wenn man die der dritten und sechsten reciproken Erzeugungsarten, nämlich die vierte und fünfte, eben so reducirt, so folgt, dass die folgenden vier Erzeugungsarten übrig bleiben:

Erstlich die Verbindung dreier Punkte; *zweitens* der Durchschnitt dreier Ebenen; *drittens* der Durchschnitt einer Ebene mit der Verbindungslinie zweier Punkte und *viertens* die Verbindung eines Punktes mit der Durchschnittslinie zweier Ebenen. Es führen also alle linealen Erzeugungen neuer Elemente auf die Formeln (3) und (4) zurück.

Sind nun in Bezug auf die Koordinaten x_0, x_1, x_2, x_3 eines Punktes x (oder einer Ebene) die Koordinaten von a, b, c homogen und beziehlich von den Graden $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, so zeigt die Formel (3), dass auch die Koordinaten des aus a, b, c durch Verbindung der Punkte (oder als Durchschnitt der Ebenen) hervorgehenden Elements homogen sind, und zwar vom Grade $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}$. Dasselbe ergiebt sich aus der Formel (4) für das aus a, b, γ hervorgehende Element. Also werden die Koordinaten eines lineal erzeugten Elements in Bezug auf die Koordinaten des veränderlichen Elements x stets homogen und zwar vom n-ten Grade sein, wenn bei der Erzeugung x im Ganzen n-mal angewandt ist. Endlich zeigt die Formel (2), welche ausdrückt, dass die vier Punkte a, b, c, ∂ in einer Ebene liegen, dass, wenn die Koordinaten von a, b, c, ∂ homogen und beziehlich von den Graden $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ {in x} sind, die hervorgehende Gleichung vom $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\mathfrak{d})$-ten Grade ist, also vom n-ten, wenn bei den linealen Konstruktionen der Punkte a, b, c, ∂ das variable Element x im Ganzen n-mal angewandt ist.

Es bleibt demnach nur noch der umgekehrte Satz zu beweisen, nämlich dass sich jede algebraische Oberfläche auf die bezeichnete Weise erzeugen lässt. Der Beweis ist genau dem für die Kurven analog (siehe Crelle's Journ. Bd. 42, S. 187 {hier S. 80}). Nämlich es wird sich die Gleichung jeder algebraischen Oberfläche in der Form

$$f(x, y, z) = 0$$

darstellen lassen, wo $f(x, y, z)$ eine ganze rationale Funktion der rechtwinkligen oder schiefwinkligen Koordinaten x, y, z des die Ober-

fläche erzeugenden Punktes (der sie umhüllenden Ebene) ist. Diese Funktion, da sie eine ganze rationale ist, geht aus x, y, z und den Konstanten durch Addition und † Multiplikation hervor. Also kommt 6 es nur darauf an, die Addition und Multiplikation zweier Zahlgrössen durch lineale Konstruktion darzustellen.

Zu dem Ende nehme man irgend eine aus dem Anfangspunkt o der Koordinaten gezogene gerade Linie und auf ihr irgend ein Maass $o\partial$ zu Hülfe und nehme an, es sei jede Konstante der Funktion durch einen Punkt dieser Geraden in der Art dargestellt, dass die Entfernung dieses Punktes vom Anfangspunkt o, gemessen durch das Maass $o\partial$, jener Konstanten gleich sei. Ebenso übertrage man die Koordinaten des konstruirenden Punktes p auf dieselbe Linie und dasselbe Maass $o\partial$ und zwar mittels linealer Konstruktion.

Man lege nämlich durch p eine Ebene, welche mit zweien der Koordinatenaxen parallel ist, und nenne den Punkt, in welchem diese Ebene die Gerade $o\partial$ schneidet, a und den Punkt, worin sie die dritte Axe, die wir als die x-Axe setzen, schneidet, a'. Dann ist oa' die zu der x-Axe gehörige Koordinate. Diese soll in die Funktion als Zahlgrösse eingehen. Sie muss also durch irgend ein Maass gemessen sein. Es sei die entsprechende Koordinate des Punktes ∂ dieses Maass; das heisst, wenn man durch ∂ die Ebene parallel mit den beiden andern Axen legt und den Punkt, in welchem diese Ebene die x-Axe schneidet, ∂' nennt, so soll $o\partial'$ das Maass sein, mit welchem alle der x-Axe zugehörigen Koordinaten gemessen sind, also $x = oa' : o\partial'$. Aber vermöge des Parallelismus der Ebenen ist $oa' : o\partial' = oa : o\partial$. Also erhält man, unter den gemachten Voraussetzungen, für irgend eine beliebige Koordinate (x) eines Punktes p den Punkt a in $o\partial$, durch welchen sie dargestellt wird, als den Durchschnittspunkt von $o\partial$ mit einer durch p gelegten den beiden andern Axen parallelen Ebene; so nämlich, dass $x = oa : o\partial$ ist. Auf diese Weise sind nun alle in der Funktion vorkommenden Zahlgrössen durch Punkte der Linie $o\partial$ dargestellt, und es kommt nur darauf an, auch die Summe und das Produkt zweier solcher Grössen auf gleiche Weise, und zwar mittels linealer Konstruktionen, darzustellen, das heisst, wenn f und g zwei solche Punkte sind und h der gesuchte {ist}, so soll im ersten Falle h so bestimmt werden, dass

$$\frac{of}{o\partial} + \frac{og}{o\partial} = \frac{oh}{o\partial},$$

das heisst

$$of + og = oh,$$

und im zweiten Falle so, dass

$$\frac{of}{o\partial} \cdot \frac{og}{o\partial} = \frac{oh}{o\partial},$$

das heisst

$$of \cdot og = oh \cdot o\partial$$

7 oder

$$o\partial : of = og : oh$$

sei. Aus der Elementargeometrie weiss man, wie in beiden Fällen der Punkt h durch parallele Linien oder Ebenen, also durch lineale Konstruktionen erfolgt. (S. Crelle's Journ. Bd. 42, S. 187 {hier S. 80}.) Also lässt sich allgemein $f(x, y, z)$ aus dem die Oberfläche erzeugenden Punkte durch lineale Konstruktionen als ein Punkt der Linie $o\partial$ darstellen. Es erfolgt dieser Punkt als Durchschnitt der Geraden $o\partial$ mit einer lineal konstruirten Ebene. Soll nun $f(x, y, z)$ Null sein, so muss jener Punkt in o fallen, das heisst, diese lineal konstruirte Ebene muss durch o gehen, das heisst, es findet die in dem Hauptsatze ausgesprochene Bedingung statt, dass ein Punkt in einer lineal konstruierten Ebene liegt. Also ist die Oberfläche, deren Gleichung $f(x, y, z) = 0$ war, durch die in dem Hauptsatze angegebene Konstruktion erzeugbar. Was zu beweisen war.

In Bezug auf den letzten Theil des Satzes ist noch eine erläuternde Bemerkung hinzuzufügen. Nämlich, aus der Art, wie oben aus den Punkten f und g der Punkt h durch lineale Konstruktion erfolgte, ergiebt sich, dass sowohl, wenn h die Summe, als auch, wenn es das Produkt der durch die Punkte f und g ausgedrückten Zahlen darstellt, jedesmal sowohl f als g bei diesen Konstruktionen *einmal* angewandt wird. Ist also zur Konstruktion von f und g der veränderliche Punkt p beziehlich f'- und g'-mal angewandt, so ist p zur Konstruktion von h im Ganzen $(f' + g')$-mal angewandt. Daraus ist klar, dass jedes Glied der Funktion, z. B. $x^l y^m z^n$, durch einen Punkt dargestellt wird, bei dessen linealer Konstruktion der veränderliche Punkt p so oft angewandt ist, als der Grad dieses Gliedes beträgt, also hier $(l + m + n)$-mal. Hat man nun eine ganze rationale Funktion n-ten Grades $f(x, y, z)$, und ist s der durch sie dargestellte Punkt, also $os : o\partial = f(x, y, z)$, und konstruirt man zuerst die Punkte, durch welche die einzelnen Glieder der Funktion dargestellt werden, und darauf den Punkt s, durch welchen ihre Summe dargestellt ist, so ist klar, dass nach der angegebenen Methode, bei der linealen Konstruktion von s, der Punkt p im Ganzen $(n + m)$-mal angewandt ist, wenn $n + m$ die Summe der Grade aller Glieder ist. Nach dieser Konstruktion müsste daher die durch die Gleichung $f(x, y, z) = 0$ dargestellte Oberfläche von $(n + m)$-ter Ordnung sein, da sie doch, nach der ursprünglichen Gleichung, nur von n-ter Ordnung ist.

Dieser Widerspruch löset sich indess sogleich, wenn man die obige Methode nur in ihrer ganzen Strenge anwendet. Nämlich, † um 8 die Koordinaten jenes Punktes s zu finden, welcher durch $(n+m)$-malige Anwendung des Punktes p lineal konstruirt wurde, hatten wir *vier* Koordinaten angewandt; wir fügen daher zu x, y, z noch die vierte Koordinate u hinzu und nehmen an, dass für $u=1$ die neuen Werthe der Koordinaten mit den alten identisch sind. Dann sind nach der obigen Beweisführung die Koordinaten von os, also auch $os:o\partial$, homogene Funktionen $(n+m)$-ten Grades von u, x, y, z; aber für $u=1$ ist $os:o\partial = f(x, y, z)$, also eine Funktion n-ten Grades, mithin muss $os:o\partial$ nothwendig die Form

$$\frac{os}{o\partial} = u^m F_n(u, x, y, z)$$

haben, wo F_n eine homogene Funktion n-ten Grades ist, die für $u=1$ in $f(x, y, z)$ übergeht. Die durch Konstruktion hervorgehende Oberfläche hat also die Gleichung

$$u^m F(u, x, y, z) = 0,$$

und die ursprüngliche Gleichung war $f(x, y, z) = 0$ oder

$$F(u, x, y, z) = 0.$$

Die erstere Oberfläche zerfällt in m Ebenen, welche durch die Gleichung $u=0$ dargestellt sind, das heisst in m unendlich entfernte Ebenen, und in die Oberfläche n-ter Ordnung, welche durch die letzte Gleichung dargestellt ist.

In vielen Fällen lässt sich die lineale Konstruktion, durch welche die Funktion $f(x, y, z)$ erfolgt, so reduciren, dass der Punkt p bei derselben im Ganzen nicht so oft angewandt wird, als die Summe aller Grade der einzelnen Glieder beträgt. Aber im *Allgemeinen* ist eine solche Reduktion nicht durchführbar. Ein Fall, wo die Reduktion am leichtesten ausführbar ist, ist der einer Funktion *ersten* Grades. In der That stellt $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ eine Ebene dar, welche durch die Punkte (a, o, o), (o, b, o), (o, o, c) geht. Diese Ebene ist lineal aus den Konstanten a, b, c konstruirbar. Sind nun x, y, z die Koordinaten eines Punktes p, und legt man durch p eine Ebene, welche mit der soeben konstruirten parallel ist, und welche die Linie $o\partial$ in q schneidet, so ist

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = \frac{oq}{o\partial},$$

das heisst, jene Funktion ersten Grades wird durch einen Punkt 9

dargestellt, bei dessen Konstruktion der veränderliche Punkt p nur einmal angewandt ist.

Einen Fall, wo die vollständige Reduction nicht ausführbar ist, bietet zum Beispiel die Gleichung

$$x^2 - y^2 - z^2 = 1$$

dar. Diese Gleichung stellt ein *zweischaliges Hyperboloid* vor, und ein solches gehört zu denjenigen Oberflächen zweiter Ordnung, auf welchen sich keine gerade Linien ziehen lassen. Nun werde ich später zeigen, dafs die linealen Konstruktionen, bei denen der veränderliche Punkt zweimal angewandt wird, stets nur solche Oberflächen zweiter Ordnung liefern, auf denen sich gerade Linien ziehen lassen. Also ist die obige Gleichung nicht durch eine solche Konstruktion darstellbar. Hingegen kann man sie in

$$(x + y)(x - y) - z^2 = 1$$

verwandeln, aus welcher Form sich sogleich ergiebt, dass sich die Fläche durch eine lineale Konstruktion darstellen lässt, bei welcher der veränderliche Punkt viermal angewandt wird; und die durch diese Konstruktion erzeugte Oberfläche vierter Ordnung zerfällt dann in die zu erzeugende Oberfläche zweiter Ordnung und in zwei unendlich entfernte Ebenen. Dasselbe gilt für alle Oberflächen zweiter Ordnung, auf denen sich keine geraden Linien ziehen lassen; denn alle diese Oberflächen lassen sich mit dem durch die obige Gleichung dargestellten zweischaligen Hyperboloid collinear setzen.

Diese beiden Beispiele mögen genügen, um die eigenthümliche Beziehung zwischen dem Satze und seiner Umkehrung zu veranschaulichen.

Stettin, im Juli 1852.

IX.

Grundsätze der stereometrischen Multiplikation. 10

Von

Prof. **H. Grassmann,**
Oberlehrer am Gymnasio zu Stettin.

Crelle's Journal Bd. 49, Heft I, S. 10—20 (1855).

Im 31ten und 42ten Bande des Crelle'schen Journals {hier S. 49 und S. 86} habe ich die Prinzipien der *planimetrischen* Multiplikation entwickelt, deren Eigenthümlichkeit darin bestand, dass jede einfache {lineale} planimetrische Konstruktion durch eine ebenso einfache Produktformel dargestellt wurde. Ich werde hier das Gleiche für den *Raum* versuchen.

§ 1.

Erklärungen und Bezeichnungen.

Im Raume kommen drei Gattungen von *Elementen* vor: *Punkte, gerade Linien* und *Ebenen,* welche ich beziehlich *Elemente erster, zweiter und dritter Stufe* nennen werde und von denen ich die ersten beiden Gattungen, wie bisher, mit lateinischen Buchstaben und zwar die Punkte mit kleinen, die geraden Linien mit grossen bezeichnen werde, während zur Bezeichnung der Ebenen die kleinen griechischen Buchstaben dienen sollen. Der Buchstab n indessen soll nie einen Punkt, sondern, wie gewöhnlich, eine Zahl bezeichnen. Zur Definition der stereometrischen Multiplikation genügt es, das Produkt von je zwei jener drei Gattungen von Elementen zu definiren. Dies giebt, da ich die Faktoren vertauschbar setze, sechs Definitionen. Doch sind überall zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem die beiden Elemente vereinigt liegen oder nicht. Ich sage nämlich, dass zwei Elemente vereinigt liegen, wenn sie mehr Punkte gemein haben, als vermöge ihrer Lage im Raume nothwendig ist, das heisst, ich sage, ein Punkt

liege mit einem Punkte, einer Geraden, einer Ebene vereinigt, eine Gerade mit einer Ebene, eine Ebene mit einer Ebene, wenn jedesmal das erstere Element in dem letzteren liegt; und eine Gerade liege mit einer Geraden vereinigt, wenn sie sich schneiden (gleichviel, ob im Endlichen oder Unendlichen).

Wenn nun zwei Elemente vereinigt liegen, so setze ich ihr stereometrisches Produkt Null; wobei ich voraussetze, dass Null, mit jeder Grösse multiplicirt, wieder Null giebt. Namentlich bedeutet

11 1) $ab = 0$ oder $a \equiv b$ [a kongruent b],
dass die Punkte a und b zusammenfallen;

2) $Ab = 0$ oder $bA = 0$,
dass der Punkt b in der Geraden A liegt;

3) $\alpha\beta = 0$ oder $\alpha \equiv \beta$ [α kongruent β],
dass die Ebenen α und β zusammenfallen;

4) $A\beta = 0$ oder $\beta A = 0$,
dass die Gerade A in der Ebene β liegt;

5) $AB = 0$,
dass sich die Geraden A und B schneiden;

6) $\alpha b = 0$ oder $b\alpha = 0$,
dass der Punkt b in der Ebene α liegt.

Wenn die Elemente nicht vereinigt liegen, so bedeutet

1) ab die durch a und b gelegte Gerade;

2) Ab oder bA die durch A und b gelegte Ebene;

3) $\alpha\beta$ die Durchschnittslinie beider Ebenen;

4) $A\beta$ oder βA den Durchschnittspunkt der Geraden A und der Ebene β;

5) AB
6) αb oder $b\alpha$ } ein Element nullter Stufe, das heisst

eine Grösse, welche die Eigenschaft hat, irgend einem Elemente als Faktor beigefügt, die Lage desselben unverändert zu lassen. Ich werde zwei aufeinander fallende Elemente (die Linien und Ebenen immer als unendlich angenommen) einander *kongruent* nennen und die Kongruenz durch $\equiv$ bezeichnen. Ebenso werde ich zwei Elemente nullter Stufe jederzeit einander kongruent nennen*). Wenn also nun z. B. n eine Grösse nullter Stufe und Γ ein beliebiges Element ist, so würde

$$n\Gamma \equiv \Gamma$$

sein.

*) Da die Zahlen gleichfalls Grössen nullter Stufe sind, so würden hiernach alle Zahlen kongruent sein, was mit dem Gaussischen Begriff der Kongruenz in Widerspruch zu stehen scheint. Allein nimmt man den Modul unendlich klein an, was der geometrischen Auffassung entspricht, so werden in der That alle Zahlgrössen kongruent.

Von den sechs Produkten stellen die zwei ersten das Verbindungselement (die Verbindungsgerade, Verbindungsebene) der beiden Faktoren dar, die beiden folgenden das Durchschnittselement (Durchschnittslinie, Durchschnittspunkt †), während die beiden letzten kein besonderes räumliches Element mehr darstellen. Von den sechs Definitionen sind 1) und 3), und ebenso 2) und 4), einander *reciprok*, das heisst, aus der einen geht die andere hervor, wenn man die Begriffe Punkt und Ebene, Verbinden und Durchschneiden vertauscht. 12

Es können nun die Produkte, da sie wieder Elemente sind, aufs neue mit andern Elementen oder Produkten multiplicirt und dadurch Produkte mit mehreren Faktoren gebildet werden. In diesem Falle lasse ich die Klammern weg, wenn die Multiplikation von der Linken zur Rechten fortschreiten soll; das heisst wenn A, B, Γ beliebige Elemente sind, so ist $AB\Gamma$ gleichbedeutend mit $(AB)\Gamma$ oder

$$AB\Gamma \equiv (AB)\Gamma.$$

§ 2.

Stufe der stereometrischen Produkte.

Man sieht bald aus den Definitionen, dass die Stufe des Produkts bei den beiden ersten Definitionen eben so gross ist als die Summe der Stufenzahlen beider Faktoren, bei den folgenden Definitionen aber um vier kleiner. In allen Fällen lassen also jene Stufe und diese Summe, durch vier dividirt, *denselben Rest*, das heisst, sie sind *kongruent* in Bezug auf den Modul 4. Daraus folgt nachstehender Satz:

Die Stufenzahl eines beliebigen stereometrischen Produkts ist der Summe der Stufenzahlen sämtlicher Faktoren kongruent in Bezug auf den Modul 4; oder: jene Stufenzahl ist gleich dem kleinsten positiven Reste (Null eingerechnet), den man erhält, wenn man die Stufenzahlen sämtlicher Faktoren addirt und diese Summe durch 4 dividirt.

§ 3.

Produkte mehrerer Punkte oder Ebenen.

Aus den Definitionen 1) und 2) folgt:

Dass das Produkt abc oder $a(bc)$ Null ist, wenn die drei Punkte a, b, c in gerader Linie liegen, und dass, wenn dies nicht der Fall, jenes Produkt der durch a, b, c gelegten Ebene kongruent ist;

und reciprok folgt aus den Definitionen 3) und 4):

Dass das Produkt $\alpha\beta\gamma$ oder $\alpha(\beta\gamma)$ Null ist, wenn die drei Ebenen α, β, γ eine und dieselbe gerade Linie gemein haben, und dass, wenn

dies nicht der Eall, jenes Produkt dem Durchschnittspunkte der drei Ebenen α, β, γ kongruent ist.

13 Ferner folgt aus den Definitionen 5) und 6):

Dass das Produkt $abc\partial$ oder $a(bc\partial)$ oder $ab(c\partial)$ Null ist, wenn die vier Punkte a, b, c, ∂ in einer Ebene liegen;

und ebenso, reciprok:

Dass das Produkt $\alpha\beta\gamma\delta$ oder $\alpha(\beta\gamma\delta)$ oder $\alpha\beta(\gamma\delta)$ Null ist, wenn die vier Ebenen α, β, γ, δ durch einen und denselben Punkt gehen;

und:

Dass, wenn dies nicht der Fall ist, alle diese Produkte Ausdrücke nullter Stufe darstellen.

§ 4.

Vertauschung und Vereinigung der Faktoren.

Die Definitionen (§ 1) lehren unmittelbar:

Dass man die beiden Faktoren eines stereometrischen Produkts {aus zwei Faktoren} vertauschen und einen Faktor nullter Stufe in einem stereometrischen Produkt beliebig stellen oder mit andern Faktoren vereinigen kann, ohne den geometrischen Sinn des Produkts zu ändern.

Ebenso ergiebt sich aus § 3 sogleich:

Dass man in Produkten von zwei bis vier Punkten oder Ebenen die Faktoren beliebig vertauschen und vereinigen (mit Klammern umschliessen) kann.

Es werde jetzt ein beliebiges Produkt von drei Faktoren betrachtet, in welchem das Produkt zweier dieser Faktoren mit dem dritten Faktor multiplicirt ist, und es werde die Vertauschbarkeit und Vereinbarkeit der Faktoren untersucht. Zuerst leuchtet aus dem soeben aufgestellten Satze hervor:

Dass man drei Faktoren, deren Stufenzahlen zusammen kleiner als fünf oder grösser als sieben sind, beliebig mit einander vertauschen und vereinigen darf.

Denn in diesem Falle lässt sich das Produkt stets als ein Produkt von drei oder vier Punkten oder Ebenen darstellen. Zum Beispiel das Produkt $aB\partial$, da die Gerade B ein Produkt zweier Punkte, etwa b und c ist, lässt sich in der Form $a(bc)\partial \equiv abc\partial$ darstellen.

Um auch in den übrigen Fällen (wo die Stufenzahlen zusammen 5, 6 oder 7 betragen und keine gleich 4 ist), darüber urtheilen zu können, gehen wir auf die Definitionen 1) bis 4) zurück. Nach der Definition 3) ist das Produkt der beiden Ebenen abc und ∂ab Null, wenn a, b, c, ∂ in *einer* Ebene liegen, das heisst, wenn $abc\partial$ Null ist.

Ist hingegen dies nicht der Fall, so ist das Produkt gleich der Durchschnittskante ab beider Ebenen. Beides wird nach † der sechsten Definition durch das Produkt $abc\partial . ab$ ausgedrückt, indem dasselbe Null oder mit ab kongruent ist, je nachdem $abc\partial$ Null ist oder nicht. Es ergiebt sich also die Kongruenz

$$(1) \qquad abc(\partial ab) \equiv abc\partial \, . \, ab,$$

welche die Definition 3) vollkommen darstellt. Auf gleiche Weise wird die vierte Definition durch die Formel

$$(2) \qquad abc(\partial a) \equiv abc\partial \, . \, a$$

dargestellt.

Es ist klar, dass die Ordnung der Punkte innerhalb eines jeden dieser einzelnen Produkte, da sie höchstens aus vier Punktfaktoren bestehen, gleichgültig ist, und dass daher die Formeln (1) und (2) nur aussagen, dass man in den beiden dort angenommenen Fällen die vier verschiedenen Faktoren a, b, c, ∂ zu *einem* Produkt vereinigen kann. Aus diesen beiden Formeln, und ihren reciproken, lässt sich nun die Vertauschbarkeit und Vereinbarkeit der Faktoren leicht beurtheilen. Man erhält nämlich aus der Formel (2) sogleich:

$$(3) \qquad abc\partial \, . \, a \equiv abc(\partial a) \equiv ab(c\partial a) \equiv a(bc\partial a),$$

und aus der Formel (1), für sich oder verbunden mit (2):

$$(4) \qquad abc\partial \, . \, ab \equiv abc(\partial ab) \equiv ab(c\partial ab) \equiv abc(\partial a)b \, .$$

Die vier kongruenten Ausdrücke in der Formel (3) liefern, paarweise einander kongruent gesetzt, sechs Formeln, und diese sechs Formeln geben unmittelbar das Gesetz

$$(5) \qquad A B \Gamma \equiv A(B\Gamma),$$

wenn die Stufenzahlen A, B, Γ beziehlich 3, 1, 1 oder 2, 2, 1 oder 1, 3, 1 oder 2, 1, 2 oder 1, 2, 2 oder 1, 1, 3 sind und dabei der letzte Faktor mit dem ersten einen Punkt (a) gemein hat. So zum Beispiel giebt die erste Kongruenz $abc\partial \, . \, a \equiv abc(\partial a)$ die Formel (5), wenn man $abc \equiv A$, $\partial \equiv B$, $a \equiv \Gamma$ setzt u. s. w. Diese sechs Fälle lassen sich unter den gemeinsamen Ausdruck bringen, dass jede der Stufenzahlen kleiner als 4 und ihre Summe gleich 5 ist. Wenn man unter den vier kongruenten Ausdrücken in (4) die ersten drei zusammenpaart und den zweiten mit dem vierten, so erhält man die Formel (5) für den Fall, dass die Stufenzahlen beziehlich 3, 1, 2 oder 2, 2, 2 oder 2, 1, 3 oder 3, 2, 1 sind und von den Elementen A und Γ das eine ganz in dem andern liegt. Durch Reciprocität (das

heisst, wenn man die dritte und erste Stufe vertauscht) erhält man hieraus die Formel (5) noch für die Stufenzahlen 1, 3, 2; 2, 3, 1 und 1, 2, 3. Diese sieben Fälle kann man unter den gemeinsamen Aus-
15 druck bringen, dass jede der Stufenzahlen kleiner als 4 und † ihre Summe gleich 6 ist. Endlich ergiebt sich durch Reciprocität aus dem Falle, wo die Summe der Stufenzahlen 5 ist, der, wo diese Summe 7 ist. Dabei verwandelt sich die Bedingung, dass der erste und letzte Faktor einen Punkt gemeinschaftlich haben, in die Bedingung, dass diese Faktoren in derselben Ebene liegen.

Wir können, wie sich sogleich durch Vergleichung der Formeln (3) ergiebt, diese Bedingung in beiden Fällen auch so ausdrücken, dass der erste und letzte Faktor entweder Gerade in derselben Ebene sind oder dass der eine jener Faktoren ganz in dem andern liegt.

Vertauscht man in (5) links A und B, rechts A und $B\Gamma$, was nach dem ersten Satze dieses Paragraphs gestattet ist, so erhält man die Formel

$$BA\Gamma \equiv B\Gamma A; \tag{6}$$

welche also in demselben Umfange gilt wie (5).

Diese Resultate lassen sich in den folgenden Satz zusammenfassen:

Die Ordnung, in welcher man ein Element (B) *mit zwei andern Elementen* (A *und* Γ) *vereinigt oder fortschreitend multiplicirt, ist in folgenden drei Fällen gleichgültig für den geometrischen Werth des gesamten Produkts, das heisst, es ist*

$$BA\Gamma \equiv B\Gamma A \quad \textit{und} \quad AB\Gamma \equiv A(B\Gamma):$$

1) wenn die Summe der drei Stufenzahlen kleiner als fünf oder grösser als sieben ist;

2) wenn von jenen beiden Faktoren (A *und* Γ) *der eine ganz in dem andern liegt;*

3) wenn jene beiden Faktoren (A *und* Γ) *Gerade in derselben Ebene sind und der andere Faktor* (B) *ein Punkt oder eine Ebene ist.*

Dieser Satz ist insofern erschöpfend, als es ausser den in demselben erwähnten Fällen keinen giebt, in welchem sich in einem nicht verschwindenden klammerlosen Produkte von drei Faktoren der zweite mit dem dritten vertauschen oder vereinigen liesse, ohne dass sich der geometrische Werth des Produkts änderte. Der leicht zu führende Beweis dieser Behauptung bleibt dem Leser überlassen.

Noch will ich den zweiten Theil dieses Fundamentalsatzes der stereometrischen Multiplikation in Formeln kleiden, in denen schon die Bedingung mit aufgenommen ist, nämlich in

$$AB\Gamma B \equiv AB(\Gamma B) \equiv A(\Gamma B)B.$$

Denn die Faktoren AB und B und ebenso (ΓB) und B haben die 16 Eigenschaft, dass der eine derselben ganz in dem andern liegt; also ist die Bedingung des Satzes erfüllt und die Vereinigung oder Vertauschung der Faktoren dem Satze gemäss gestattet.

Die erste dieser Kongruenzen lässt sich auf folgende Weise in Worte kleiden:

Wenn in einem klammerlosen Produkt zwischen zwei kongruenten Faktoren ein dritter Faktor steht, so kann man diesen mit dem folgenden durch Klammern zusammenschliessen.

§ 5.

Besondere Umgestaltungen von Produkten nullter Stufe.

Die Produkte nullter Stufe, da sie, wie ich im folgenden Paragraph zeigen werde, alle algebraischen Oberflächen darzustellen vermögen, haben vor den andern Produkten ein besonderes Interesse und lassen eine Reihe von Umgestaltungen zu, die den andern Produkten abgehen. Daher werde ich sie besonders ins Auge fassen.

Jedes Produkt, also auch das Produkt nullter Stufe, besteht zunächst aus zwei Faktoren. Löset man nun einen dieser Faktoren wieder in seine zwei Faktoren auf, so erhält man drei Faktoren, deren Stufenzahlen, da das gesamte Produkt von nullter Stufe sein soll, eine durch 4 theilbare Summe haben müssen. Da die einzelnen Stufenzahlen stets kleiner als 4 sind, so kann die Summe nur entweder Null sein, wenn alle drei einzeln genommen Null sind, oder 4 oder 8; in allen drei Fallen können nach dem vorigen Paragraph die drei Faktoren beliebig vertauscht und vereinigt werden. Also:

Wenn ein Produkt nullter Stufe aus drei Faktoren besteht, so können dieselben beliebig vertauscht und vereinigt werden.

Der Sinn dieses Satzes ist der, dass das Produkt, wenn es in dem einen Falle Null ist, auch jedesmal in dem andern Null sei. Hieraus folgt sogleich, dass man in einem beliebig zusammengesetzten Produkt nullter Stufe jeden beliebigen Faktor A auf die letzte Stelle bringen kann, ohne dass er noch von einer Klammer umschlossen wird. Zu dem Ende hat man nur auf folgende Weise zu verfahren. Unter den beiden Faktoren, aus denen das gesamte Produkt zunächst besteht, löse man denjenigen, welcher A enthält, in seine beiden Faktoren auf; dann hat man drei Faktoren, welche man nach dem vorher aufgestellten Satze beliebig ordnen und vereinigen kann. Man stelle † nun den- 17 jenigen derselben, welcher A enthält, in die letzte Stelle und fasse die beiden andern zu einem Produkte zusammen. Dies Verfahren, bei

welchem jedesmal eine Klammer, die den Faktor A noch umschliesst, verschwindet, lässt sich also so lange fortsetzen, bis A von keiner Klammer mehr umschlossen wird; und dann ist A zugleich an den Schluss gerückt. Wendet man das Verfahren auf den ersten Faktor (A_1) eines fortschreitenden Produkts nullter Stufe an, so erhält man die Formel

$$A_1 A_2 \ldots A_n \equiv A_n \ldots A_2 A_1 ,$$

und vertauscht man rechts A_1 mit dem gesamten vorhergehenden Faktor, so erhält man das Produkt

$$\equiv A_1 (A_n \ldots A_2),$$

das heisst:

Ein fortschreitendes Produkt nullter Stufe darf man umkehren oder es in zwei Theile sondern und den letzten umgekehrt in Klammern schliessen.

Es werde endlich ein beliebig zusammengesetztes Produkt nullter Stufe $\mathfrak{A}$ betrachtet, welches noch einen Faktor nullter Stufe $\mathfrak{B}$ enthält. Es sei das Produkt, welches übrig bleibt, wenn man in $\mathfrak{A}$ den Faktor $\mathfrak{B}$ weglässt, mit $\mathfrak{C}$ bezeichnet; dann muss $\mathfrak{C}$, wie leicht zu sehen, gleichfalls von nullter Stufe sein; und da man, nach dem vorhergehenden Paragraph, einen Faktor nullter Stufe beliebig stellen und mit andern Faktoren vereinigen oder von ihnen trennen kann, so kann man dann auch den Faktor $\mathfrak{B}$ isolirt an den Anfang stellen und erhält:

$$\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}\mathfrak{C} .$$

Wenn nun $\mathfrak{B}$ nicht Null ist, so folgt aus der Definition der Grössen nullter Stufe $\mathfrak{B}\mathfrak{C} \equiv \mathfrak{C}$. Daraus ergiebt sich, dass $\mathfrak{A}$ dann und nur dann Null ist, wenn entweder $\mathfrak{B}$ oder $\mathfrak{C}$ verschwindet. Also:

Wenn ein Produkt nullter Stufe noch einen Faktor nullter Stufe enthält, so kann man diesen als den einen Faktor des gesamten Produkts setzen und als den andern dasjenige Produkt, welches übrig bleibt, wenn man aus dem gesamten Produkt diesen Faktor weglässt. In diesem Falle ist das gesamte Produkt dann und nur dann Null, wenn der eine oder der andere dieser Faktoren Null ist.

§ 6.

18

Stereometrische Gleichungen algebraischer Oberflächen.

Der Satz, welchen ich in der vorhergehenden Abhandlung {hier S. 136} über die *lineale* Erzeugung der algebraischen Oberflächen aufgestellt habe, lautete:

Wenn die Lage eines Punktes x (oder einer Ebene) im Raume dadurch beschränkt ist, dass zwei Gerade, welche durch lineale Konstruktionen aus x und einer Reihe fester Elemente hervorgehen, in derselben Ebene liegen sollen, so ist der Ort von x eine algebraische Oberfläche; und zwar ist sie ein Gebilde n-ten Grades, wenn bei den Konstruktionen x im Ganzen n-mal angewandt wird. Umgekehrt lässt sich jede algebraische Oberfläche auf die angegebene Weise erzeugen.

Es kommt darauf an, diesen Satz durch *stereometrische* Formeln darzustellen, wobei ich den reciproken Fall, dass statt des Punktes x eine Ebene vorkommt, übergehe, da er sich durch Reciprocität stets von selbst ergiebt. Die zwei Geraden, welche nach dem Satze in derselben Ebene liegen sollen, seien P und Q, so ist die Gleichung der Oberfläche:

$$PQ = 0.$$

Jede der Geraden P und Q soll, nach dem Satze, aus x und einer Reihe fester Elemente durch lineale Konstruktion erfolgen. Die Erzeugung neuer Elemente durch lineale Konstruktion lässt sich auf die folgenden vier Fälle, in denen aus zwei Elementen ein drittes entsteht, zurückführen: 1) wenn aus zwei Punkten ihre Verbindungsgerade; 2) wenn aus einem Punkt und einer Geraden ihre Verbindungsebene; 3) wenn aus zwei Ebenen ihre Durchschnittslinie; 4) wenn aus einer Ebene und einer Geraden ihr Durchschnittspunkt entsteht.

Also: wenn aus zwei Elementen durch lineale Konstruktion ein drittes entsteht, so ist das letztere jedesmal das stereometrische Produkt der beiden ersteren; und zwar im Sinne der Definitionen 1) bis 4). Und umgekehrt: jedes stereometrische Produkt, welches durch die Definitionen 1) bis 4) bestimmt wird, das heisst: welches nicht von nullter Stufe ist, entsteht durch lineale Konstruktion aus seinen beiden Faktoren. Hieraus folgt, dass sich jedes Element, welches aus x und einer Reihe fester Elemente durch lineale Konstruktionen erfolgt, bei denen n-mal x angewandt wird, als ein stereometrisches Produkt darstellen lässt, in welchem n-mal als Faktor x vorkommt, und dass, umgekehrt, jedes stereometrische Produkt, welches n-mal als Faktor x enthält und ausserdem nur feste Elemente zu Faktoren hat und welches weder selbst von nullter Stufe ist noch einen Faktor nullter Stufe enthält, durch lineale Konstruktionen aus x und den festen Elementen sich erzeugen lässt; und zwar in der Art, dass x bei diesen Konstruktionen n-mal angewandt wird. 19

Betrachtet man nun ein beliebiges gleich Null gesetztes Produkt nullter Stufe, welches n-mal den veränderlichen Punkt x als Faktor enthält, aber keinen Faktor nullter Stufe mehr einschliesst, so kann

man es immer auf die Form bringen, dass es zunächst als Produkt zweier Geraden sich zeigt. Nämlich: enthält das Produkt irgend eine feste Gerade als Faktor, so kann man nach dem vorigen Paragraph diese Gerade in die letzte Stelle des Produkts bringen, ohne dass dieselbe noch von einer Klammer umschlossen wird. Der andere Faktor muss dann, da die Summe der Stufenzahlen durch vier theilbar ist, gleichfalls eine Gerade sein; und das Produkt hat die verlangte Form. Kommt aber in dem Produkt keine feste Gerade vor, so müssen die festen Elemente Punkte oder Ebenen sein; Punkt und Ebene kann man aber als Produkte einer festen Geraden in eine Ebene oder in einen Punkt darstellen, und dann wie vorher die feste Gerade in die letzte Stelle bringen. Die Gleichung wird also die Form

$$PQ = 0$$

erhalten, wo in P und Q der veränderliche Punkt x im Ganzen n-mal als Faktor vorkommt; P und Q ergeben sich also durch lineale Konstruktionen, bei welchen n-mal x angewandt wird; und da die Gleichung $PQ = 0$ die Bedingung ausdrückt, dass die Geraden P und Q in derselben Ebene liegen, so ist nach dem angeführten Satze der *Ort* des Punktes x eine Oberfläche n-ter Ordnung.

Hat man endlich eine Gleichung

$$\mathfrak{P} = 0,$$

in welcher $\mathfrak{P}$ ein Produkt nullter Stufe ist, welches n-mal x als Faktor enthält, aber noch Faktoren nullter Stufe in sich schliesst, so kann man $\mathfrak{P}$, nach dem vorigen Paragraph, stets auf die Form $\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}\ldots$ bringen, wo $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}\ldots$ Produkte nullter Stufe sind, die keinen Faktor nullter Stufe mehr enthalten. Es komme x in jenen Produkten $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}\ldots$ beziehlich $\mathfrak{b}$-mal, $\mathfrak{c}$-mal, $\mathfrak{d}$-mal u. s. w. vor, so hat man $\mathfrak{b} + \mathfrak{c} + \mathfrak{d} + \cdots = n$ und

$$\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}\ldots = 0.$$

Die Gleichung drückt aus, dass entweder $\mathfrak{B} = 0$ oder $\mathfrak{C} = 0$ oder $\mathfrak{D} = 0$ u. s. w. ist. Diese einzelnen Gleichungen stellen aber, nach dem soeben Erwiesenen, Oberflächen von $\mathfrak{b}$-ter, $\mathfrak{c}$-ter, $\mathfrak{d}$-ter u. s. w. Ordnung dar. Also ist der durch die Gleichung $\mathfrak{P} = 0$ bedingte *Ort* von x eine Oberfläche n-ter Ordnung, welche in jene Oberflächen $\mathfrak{b}$-ter, $\mathfrak{c}$-ter ... Ordnung zerfällt. Demnach haben wir folgenden Satz:

Die Gleichung $\mathfrak{P} = 0$, in welcher $\mathfrak{P}$ ein Produkt nullter Stufe ist, welches n-mal den veränderlichen Punkt x als Faktor enthält, giebt, als Ort von x, eine Oberfläche n-ter Ordnung; und umgekehrt lässt sich jede algebraische Oberfläche durch eine solche Gleichung darstellen.

Stettin, im Juli 1852.

X.

Ueber die verschiedenen Arten der linealen Erzeugung algebraischer Oberflächen.

Von

Prof. **H. Grassmann**,
Oberlehrer am Gymnasio zu Stettin.

Crelle's Journal Bd. 49, Heft I, S. 21—36 (1855).

Die drei Gattungen räumlicher Elemente, nämlich die *Punkte* oder die Elemente erster Stufe, die *geraden Linien* oder die Elemente zweiter Stufe, die *Ebenen* oder die Elemente dritter Stufe, gestatten sechs verschiedene Kombinationen zu zweien, welche sich, je nachdem die Summe der Stufenzahlen kleiner als vier oder grösser als vier oder gleich vier ist, in drei Gruppen sondern lassen. Für jede dieser sechs Kombinationen habe ich in der vorhergehenden Abhandlung {auf Seite 146} den Begriff des stereometrischen Produkts beider Elemente bestimmt.

Wenn die Summe der Stufenzahlen *kleiner* als vier war, so war das stereometrische Produkt die Verbindung beider Elemente (Verbindungslinie und Verbindungsebene), wenn grösser als vier, ihr Durchschnitt. Beide Bestimmungen ergaben sich {auf Seite 147} als zu einander reciprok. Wenn die Summe der Stufenzahlen *gleich* vier war, so setzten wir als das Produkt der Elemente eine Grösse, welche, einem Elemente als Faktor beigefügt, die Lage des Elements unverändert lässt. Wir nannten eine solche Grösse eine Grösse *nullter* Stufe. In diesem Sinne ergab sich, dass die Stufe eines beliebig zusammengesetzten Produkts stets der Summe der Stufenzahlen seiner sämtlichen Faktoren congruent ist in Bezug auf den Modul 4.

Alle sechs Arten der Produkte wurden gleich Null gesetzt, wenn die Elemente, welche die Faktoren des Produkts bildeten, vereinigt lagen. *Kongruent* hingegen nannten wir zwei Elemente, wenn sie (als

unendlich angenommen) sich gegenseitig deckten; zwei Grössen nullter Stufe aber nannten wir kongruent, wenn sie entweder beide Null oder beide ungleich Null waren. Wir untersuchten dann, in wie weit man die Form eines Produkts verändern könne, sodass das ursprüngliche und das neue Produkt einander congruent seien. Es ergaben sich dabei besonders folgende Formeln und Sätze, in welchen A, B, Γ, A_n, $\mathfrak{P}$ Elemente darstellen, deren Stufenzahlen beziehlich $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{a}_n$, 0 sein mögen:

22 (1) $$AB \equiv BA.$$

(2) $$AB\Gamma \equiv A\Gamma B \equiv A(B\Gamma) \text{ u. s. w.,}$$
$$\textit{wenn} \quad \mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c} < 5 \quad \textit{oder} \quad > 7 \quad \textit{ist.}$$

(3) $$AB\Gamma B \equiv AB(\Gamma B) \equiv A(\Gamma B)B.$$

(4) $$A_1 A_2 \cdots A_n \equiv A_n \cdots A_2 A_1 \equiv A_1(A_n \cdots A_2),$$
$$\textit{wenn} \quad \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \cdots + \mathfrak{a}_n \equiv 0 \pmod 4 \textit{ ist.}$$

(5) $\mathfrak{P} = 0$ *ist die Gleichung einer Oberfläche n-ter Ordnung, wenn* $\mathfrak{P}$ *ein Produkt nullter Stufe ist, in welchem der die Oberfläche konstruirende Punkt n-mal als Faktor vorkommt.*

(6) *Wenn ein Produkt nullter Stufe* $\mathfrak{P}$ *noch einen Faktor nullter Stufe* $\mathfrak{Q}$ *enthält und* $\mathfrak{R}$ *das Produkt bezeichnet, welches aus* $\mathfrak{P}$ *übrig bleibt, wenn man darin* $\mathfrak{Q}$ *weglässt, so ist*

$$\mathfrak{P} \equiv \mathfrak{Q}\mathfrak{R}$$

und die Gleichung

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{Q}\mathfrak{R} = 0 \textit{ zerfällt in } \mathfrak{Q} = 0 \textit{ und } \mathfrak{R} = 0.$$

Der Zweck des gegenwärtigen Aufsatzes ist, den allgemeinen Satz über die lineale Erzeugung der Oberflächen, wie er in (5) enthalten ist, möglichst anschaulich und für die Anwendung bequem zu gestalten und auseinander zu legen. Dabei ist vermöge (6) nur nöthig, den Fall zu berücksichtigen, wo $\mathfrak{P}$ *keinen* Faktor nullter Stufe mehr enthält, das heisst, wo bei der fortschreitenden Bildung des Produkts $\mathfrak{P}$ die Summe der Stufenzahlen nicht eher durch vier theilbar wird, als bis das ganze Produkt gebildet ist. Ich werde daher in den nächsten fünf Paragraphen den Fall, wo die Summe der Stufenzahlen durch vier theilbar ist, ein für alle Mal ausschliessen. Wie bisher sollen die kleinen lateinischen Buchstaben (mit einziger Ausnahme des n) *Punkte* bezeichnen, die grossen lateinischen Buchstaben *gerade Linien*, die kleinen griechischen Buchstaben *Ebenen*.

§ 1.

Produkt eines beweglichen Elements mit einem festen.

Das bewegliche Element sei x, ξ oder X, das feste Element a, α oder A. Indem ich die sechs Produkte, welche, unter Ausschluss der Stufensumme vier, aus einem der beweglichen und einem der festen Elemente sich bilden lassen, betrachte, will ich auf den Grad der Beweglichkeit des entstehenden Produkts und auf die entstehenden projektivischen Grundgebilde † aufmerksam machen. Ich nenne ein Element n-fach oder im n-ten Grade beweglich, wenn von den Zahlkoëfficienten, durch welche seine Lage bestimmt ist, n auf ganz unabhängige Weise veränderlich sind. Also ist zum Beispiel ein Punkt in einer Geraden einfach beweglich, ein Punkt in einer Ebene zweifach, ein Punkt im Raume dreifach. Ebenso verhält es sich mit einer Ebene, welche durch eine feste Gerade oder durch einen festen Punkt gehen oder frei im Raume beweglich sein soll. Ferner eine Gerade, wenn sie in einer festen Ebene liegen und zugleich durch einen festen Punkt derselben gehen soll, ist einfach beweglich; wenn sie in einer festen Ebene liegen oder durch einen festen Punkt gehen soll, ist sie zweifach beweglich; wenn sie eine andere Gerade schneiden soll, dreifach und, wenn sie sich frei im Raume bewegen darf, vierfach. Nimmt man nun an, x, ξ, X seien frei im Raume beweglich, so ist 23

1) xa zweifach beweglich und stellt einen Strahlenbüschel (im Raume) dar;

2) $\xi\alpha$ ist zweifach beweglich und stellt eine liniirte Ebene dar.

3) xA ist einfach beweglich und stellt einen Ebenenbüschel (erster Stufe) dar;

4) ξA ist einfach beweglich und stellt eine punktirte Gerade dar;

5) Xa ist zweifach beweglich und stellt einen Ebenenbüschel zweiter Stufe dar;

6) $X\alpha$ ist zweifach beweglich und stellt eine punktirte Ebene dar

Hierzu füge ich, der Uebersicht wegen, noch die folgenden beiden Produkte dreier Faktoren:

7) $xA\alpha$ } sind einfach beweglich und stellen ebene Strahlenbüschel
8) ξAa } dar, und zwar

7) als Durchschnitt eines Ebenenbüschels und einer Ebene,

8) als Verbindung einer punktirten Geraden mit einem Punkte.

Diese projektivischen Grundgebilde sind paarweise zu einander reciprok. Ich werde diejenigen derselben, deren Element einfach oder zweifach beweglich ist, beziehlich Gebilde erster oder zweiter Stufe nennen, wodurch die Benennung des fünften Gebildes gerechtfertigt scheint.

Um die Nothwendigkeit dieser Unterscheidung in projektivische Gebilde erster und zweiter Stufe nachzuweisen, führe ich gelegentlich folgenden leicht zu erweisenden Satz an: Bei zwei Gebilden derselben Art, welche zu einander projektivisch sein sollen, kann man, je nachdem sie von der ersten oder zweiten Stufe sind, drei oder vier beliebige Elemente des einen Gebildes mit eben so vielen des andern als entsprechend setzen; aber dann ist zu jedem Elemente des einen Gebildes das entsprechende des andern bestimmt; vorausgesetzt jedoch, 24 dass im zweiten Falle von den gewählten vier Elementen desselben Gebildes keine drei einem und demselben Gebilde erster Stufe angehören.

Es ist bei der Auffassung dieser projektivischen Gebilde wichtig, festzuhalten, dass die punktirte Ebene und die liniirte Ebene, und ebenso der Ebenenbüschel zweiter Stufe und der räumliche Strahlenbüschel, nur in Bezug auf die Gattung der Elemente sich unterscheiden; sodass nämlich zwei projektivische punktirte Ebenen zugleich projektivisch sind in Bezug auf die Verbindungslinien ihrer entsprechenden Punktenpaare und zwei projektivische Ebenenbüschel zugleich in Bezug auf die Durchschnittsstrahlen der entsprechenden Ebenenpaare; und umgekehrt. Wo es auf die Unterscheidung der ursprünglichen Elemente nicht ankommt, werde ich, mit Steiner, die ersteren Gebilde ohne Weiteres Ebenen, die letzteren räumliche Strahlenbüschel nennen.

§ 2.

Fortschreitende Multiplikation eines frei beweglichen Punktes x mit einer Reihe fester Elemente.

Es lassen sich zwei Hauptfälle unterscheiden, je nachdem das entstehende Produkt einfach oder zweifach beweglich ist. Es werde der letzte Fall zuerst betrachtet. Der Punkt x kann in diesem Falle nur mit einem Punkte multiplicirt werden, da das Produkt mit einer Geraden einfach beweglich ist. Es sei dieser Punkt a. Das Produkt xa ist nur dann Null, wenn x in a fällt; in jedem andern Falle liefert xa eine Gerade. Diese Gerade könnte nun mit einem Punkte b oder einer Ebene α multiplicirt werden; allein xab kann zugleich als Produkt von x mit der Geraden ab betrachtet werden und würde daher einfach beweglich sein. Es ergiebt sich also das Produkt $xa\alpha$. Wenn a in α liegt, so lassen sich nach Formel (3) a und α vertauschen, und man erhält $x\alpha \, . \, a$, was in einen variablen Faktor nullter Stufe und einen festen Punkt zerfällt. Da wir auch diesen Fall ausschlossen, so bleibt nur übrig, dass a ausserhalb α liegt, wo dann $xa \, . \, \alpha$ eine punktirte

Ebene darstellt. Der Punkt $xa \,.\, \alpha$ kann nun wieder mit einem Punkte b multiplicirt werden. Wenn b in α liegt, so lässt sich wiederum b mit α vertauschen, und man erhält $xab\alpha$ oder $x(ab)\alpha$, und man kommt wieder auf den Fall der einfachen Beweglichkeit zurück. Von hier an wiederholt sich dieselbe Schlussreihe, und man gelangt zu dem Satze:

Wenn ein frei beweglicher Punkt x fortschreitend mit einer Reihe fester Elemente multiplicirt wird, so geht dann, und nur dann, ein zweifach † bewegliches Produkt hervor, wenn diese Reihe mit einem Punkte 25 *beginnt, abwechselnd aus Punkten und Ebenen besteht und dabei jeder Punkt ausserhalb der ihm vorhergehenden und der ihm nachfolgenden Ebene liegt. Das Produkt wird in diesem Falle nur Null, wenn x mit dem ersten Punkte jener Reihe zusammenfällt.*

Ferner:

Wenn der Punkt x mit einer abwechselnden Reihe von Punkten und Ebenen multiplicirt wird und einer dieser Punkte in die ihm nachfolgende oder vorhergehende Ebene fällt, so kann man diese beiden Faktoren vertauschen und erhält im ersten Falle einen variablen Faktor nullter Stufe, der mit einem festen Element multiplicirt ist, im letzten Falle ein einfach bewegliches Produkt, indem an die Stelle des Punkts eine Gerade tritt.

§ 3.

Fortsetzung.

Es werde jetzt der Fall der einfachen Beweglichkeit betrachtet. Am einfachsten ist es hier, x fortschreitend mit einer Reihe von Geraden $A, B, \ldots$ zu multipliciren. Das Produkt xA wird Null, wenn x in A fällt. Dies ausgeschlossen, stellt xA einen Ebenenbüschel dar. Wenn nun von den folgenden Geraden keine die vorhergehende schneidet (der unendlich entfernte Durchschnittpunkt immer als solcher mit gerechnet), so stellt das Produkt abwechselnd Ebenenbüschel und punktirte Geraden dar. Ist nun das Produkt, bis zu irgend einem Faktor hin, $\equiv p$, und es schneiden sich die beiden folgenden festen Geraden A und B, so sei dieser Punkt c, und die Geraden seien ac und bc. Dann erhält man $pAB \equiv pac(bc) \equiv pacb \,.\, c$ [nach Formel (3)]; das heisst, es zerfällt das Produkt in einen variablen Faktor nullter Stufe und einen festen Punkt. Das Entsprechende geschieht im reciproken Falle. Also ergiebt sich folgender Satz:

Wenn ein frei beweglicher Punkt mit einer Reihe fester Geraden multiplicirt wird, so ist das Produkt dann, und nur dann, einfach beweglich, wenn keine dieser Geraden die folgende schneidet; und das Produkt wird in diesem Falle nur dann Null, wenn x in die erste Gerade

jener Reihe fällt. Wenn jedoch eine der Geraden die folgende schneidet, so kann man statt dieser beiden Geraden eine Ebene und einen Punkt setzen, und zwar die Ebene, in der sie liegen, und den Punkt, in dem 26 *sie sich † schneiden, und es zerfällt dadurch das Produkt in einen variablen Faktor nullter Stufe und in ein festes Element.*

Ich werde jetzt zeigen, dass man jeden Fall, in welchem ein beweglicher Punkt x, mit einer Reihe fester Elemente multiplicirt, ein einfach bewegliches Element und zwar einen Punkt oder eine Ebene giebt, auf den soeben betrachteten Fall zurückführen kann.

Es sei zuerst p ein zweifach bewegliches Produkt und ebenso $pa\alpha$; dann trete noch die Gerade B hinzu. Es sei b der Punkt, in welchem die Gerade B die Ebene α schneidet, und $\alpha \equiv Ab$, $B \equiv bc$, so ist:

$$pa\alpha B \equiv pa(Ab)(bc) \equiv pa(Ab)bc \quad \text{[nach Formel (2)]}.$$

Aber

$$pa(Ab)b \equiv pabAb \quad \text{[nach Formel (3)]},$$

also

$$pa\alpha B \equiv pabAbc \equiv p(ab)A(bc) \quad \text{[nach Formel (2)]}.$$

Man hat also statt des Punkts a und der Ebene α gerade Linien erhalten. Nämlich, wenn man den Durchschnittspunkt von B und α durch b bezeichnet, so kann man statt des Punktes a die Gerade ab und statt der Ebene α eine beliebige Gerade dieser Ebene setzen, die jedoch nicht durch den Punkt b gehen darf. Durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens gelangt man zu folgendem Satze:

Wenn ein beweglicher Punkt mit einer Reihe abwechselnder fester Punkte und Ebenen multiplicirt wird und auf die letzte Ebene eine feste Gerade folgt, so kann man statt aller fester Punkte und Ebenen Gerade setzen. Nämlich, wenn man das ganze Produkt umkehrt und das umgekehrte Produkt nach und nach konstruirt, so erhält man eine Reihe von Hülfspunkten, die in den festen Ebenen liegen, und eine Reihe von Geraden, die durch die festen Punkte gehen. Diese Geraden kann man statt der festen Punkte setzen und statt jeder Ebene eine Gerade, die in dieser Ebene liegt, aber nicht durch den in der Ebene liegenden Hülfspunkt geht.

In Formeln ausgedrückt, würde der Satz:

$$xa_1\alpha_1 a_2\alpha_2 \ldots a_n\alpha_n B \equiv x(a_1c_1)A_1(c_1c_2)A_2 \ldots (c_{n-1}c_n)A_nB$$

lauten, wenn

$$B\alpha_n \equiv c_n, \quad c_n a_n \alpha_{n-1} \equiv c_{n-1}, \ldots, \quad c_2 a_2 \alpha_1 \equiv c_1,$$
$$\alpha_n \equiv c_n A_n, \quad \alpha_{n-1} \equiv c_{n-1}A_{n-1}, \ldots, \quad \alpha_1 \equiv c_1 A_1$$

ist. Noch will ich bemerken, dass sich auch die gefundene Form des Produkts noch auf die Form $x(a_1 c_1) B_1 (c_2 c_3) B_3 \ldots$ reduciren lässt, wo B_1 die Durchschnittslinie der Ebenen α_1 und α_2 (oder $c_1 A_1$ und $c_2 A_2$), B_3 die der Ebenen α_3 und α_4 ist; und so weiter. 27

Es bleibt jetzt nur noch zu zeigen, dass sich jedes Produkt von x mit einer Elementenreihe, die mit einer Geraden beginnt, auch, falls das Produkt wieder ein Punkt oder eine Ebene sein soll, stets auf das Produkt von x mit einer Reihe von lauter Geraden zurückführen lässt.

Durch die Multiplikation mit einer Reihe fester Geraden geht entweder ein Punkt p oder eine Ebene hervor. Da beide Fälle zu einander reciprok sind, so braucht man nur den einen zu betrachten. Wir nehmen an, der Punkt p sei entweder $\equiv x$, oder er sei durch Multiplikation von x mit einer Reihe von festen Geraden entstanden. Es trete noch eine Gerade A hinzu, so ist pA eine Ebene. Soll nun zu dieser Ebene ein Element, welches keine Gerade ist, hinzutreten, so kann dieses Element (da die Stufensumme vier ausgeschlossen ist) nur eine Ebene α sein. Nun ist $pA\alpha$ eine Gerade. Diese kann mit einer Ebene β oder mit einem Punkt b zusammentreten; aber $pA\alpha\beta$ ist nach Formel (2) $\equiv pA(\alpha\beta)$, also wäre pA wieder mit einer Geraden $(\alpha\beta)$ multiplicirt; gegen die Annahme. Es bleibt daher nur übrig, das Produkt $pA\alpha b$ zu betrachten. Es sei c der Durchschnitt von A und α, und $A \equiv ac$, $\alpha \equiv cB$, so ist $pA\alpha b \equiv p(ac)(cB)b \equiv pac(cB)b$ [nach Formel (2)] $\equiv pacBcb$ [nach Formel (3)] $\equiv p(ac)B(cb)$. Also ist auch dies Produkt auf ein Produkt mit lauter festen Geraden reducirt. Wir haben demnach folgenden Satz erlangt:

Jedes Produkt eines frei beweglichen Punktes x mit einer Reihe fester Elemente lässt sich, wenn das Produkt ein einfach bewegliches Element und zwar ein Punkt oder eine Ebene ist, in der Form darstellen, dass alle festen Elemente Gerade sind.

Fasset man die gefundenen Sätze mit den reciproken Sätzen zusammen, so erhält man folgenden allgemeinen Satz:

Wenn ein frei bewegliches Element, und zwar ein Punkt oder eine Ebene, mit einer Reihe fester Elemente multiplicirt und das Produkt wieder ein bewegliches Element und zwar ein Punkt oder eine Ebene ist, so kann man statt der Reihe der festen Elemente entweder eine Reihe abwechselnder fester Punkte und Ebenen oder eine Reihe fester Geraden setzen, je nachdem das Produkt ein zweifach oder einfach bewegliches Element ist; und zwar haben beide Reihen nothwendig die Eigenschaft, dass keine zwei aufeinander folgenden Elemente vereinigt liegen. Findet hingegen diese vereinigte Lage statt, so nimmt der Grad der Beweglichkeit mindestens um eins ab. 28

Dieser Satz reicht für die Multiplikation eines beweglichen Elements mit einer Reihe fester vollkommen aus. Denn ist das bewegliche Element eine Gerade, so muss diese entweder mit einer festen Ebene oder mit einem festen Punkte in Kombination treten und giebt dann einen zweifach beweglichen Punkt oder eine zweifach bewegliche Ebene; und für diese wurde die weitere Kombination mit festen Elementen bereits betrachtet. Und ist das Produkt eine Gerade, so kann dieselbe nur durch Multiplikation zweier Punkte oder zweier Ebenen entstanden sein; und für beide wurden die Gesetze aufgestellt.

§ 4.

Lineale Bewegung offener Figuren.

Es sei zunächst die Aufgabe, das bewegliche Produkt eines beweglichen Elements mit einer Reihe fester Elemente für den Fall zu konstruiren, dass sowohl das bewegliche Element als {auch} das Produkt ein Punkt oder eine Ebene ist. In diesem Falle kann man nach § 3 statt der Reihe der festen Elemente entweder eine Reihe abwechselnder Punkte und Ebenen oder eine Reihe von Geraden einführen; und zwar so, dass keine zwei aufeinander folgende Elemente dieser Reihen vereinigt liegen.

Ich werde mich für die Darstellung dieser Konstruktion des Begriffs der *offenen Figur* bedienen. Darunter verstehe ich (siehe Crelle's Journal Bd. 36, S. 181 {hier S. 78}) eine Reihe von Punkten und Geraden, in welcher auf jeden Punkt eine durch ihn gehende Gerade und auf jede Gerade ein in ihr liegender Punkt folgt, gleichviel ob diese Geraden oder Punkte in derselben Ebene liegen oder nicht. Das Anfangselement der Reihe kann, ebenso wie das Endelement derselben, ein Punkt oder eine Gerade sein. Alle Zwischenelemente der Reihe (das heisst, welche nicht Grenzelemente derselben sind) nenne ich Seiten oder Ecken der offenen Figur, je nachdem sie Gerade oder Punkte sind.

Das Produkt eines beweglichen Punktes x mit einer abwechselnden Reihe von Punkten und Ebenen $a_1, \alpha_1, \ldots a_n, \alpha_n$, deren keine zwei aufeinander folgende vereinigt liegen, ist Null, wenn x in a_1 liegt; in jedem andern Falle ist das Produkt die letzte Ecke einer offenen Figur, deren Anfangspunkt x ist, deren Seiten durch die festen Punkte $a_1, \ldots a_n$ gehen und deren Ecken in den festen Ebenen $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ liegen. Betrachtet man, zweitens, das Produkt eines beweglichen Punktes x mit einer geraden Anzahl gerader Linien $A_1, B_1, \ldots A_n, B_n$ (deren keine zwei aufeinander folgende sich schneiden), so zeigt sich

dasselbe gleich Null, wenn x in der Geraden A_1 liegt; in jedem andern Falle ist das Produkt die letzte Ecke einer offenen Figur, deren Anfangspunkt x ist, deren Seiten durch die Geraden $A_1, \ldots A_n$ gehen und deren Ecken in den Geraden $B_1, \ldots B_n$ liegen. Ferner werde das Produkt von x mit einer ungeraden Anzahl gerader Linien $A_1, B_1, \ldots A_n, B_n, A_{n+1}$ betrachtet (deren keine zwei aufeinanderfolgende sich schneiden). Legt man nun, vorausgesetzt, dass x nicht in A_1 liegt, in welchem Falle das Produkt Null ist, eine offene Figur hindurch, deren Anfangspunkt x ist, deren Seiten durch die Geraden $A_1, \ldots A_{n+1}$ gehen und deren Ecken in den Geraden $B_1, \ldots B_n$ liegen, so ist durch eine bestimmte Lage des Anfangspunkts x zwar die letzte Ecke in B_n bestimmt, aber nicht die letzte Seite, die durch A_{n+1} geht; vielmehr ist der geometrische Ort derselben eine Ebene, und diese Ebene ist eben jenem Produkte kongruent.

Es bleiben nur noch die reciproken Fälle zu betrachten, wo statt des Punktes x eine Ebene ξ eintritt. Man könnte hier der offenen Figur ihr reciprokes Gebilde substituiren; doch ist es in vielen Fällen vortheilhaft, auch hier die offene Figur zu Grunde zu legen. Hat man das Produkt $\xi \alpha_1 a_1 \ldots \alpha_n a_n$ zu konstruiren, so lässt sich eine offene Figur zu Grunde legen, deren Anfangsstrahl in der Ebene ξ liegt, deren Ecken in den Ebenen $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ liegen und deren Seiten durch die Punkte $a_1, \ldots a_n$ gehen. Wenn die Ebene ξ fest ist (ohne mit α_1 zusammenzufallen), so ist dennoch die ganze offene Figur beweglich, und der geometrische Ort ihrer letzten Seite ist eine Ebene, welche dem obigen Produkte kongruent ist. Ferner ist das Produkt $\xi A_1 B_1 \ldots A_n B_n$ der geometrische Ort der letzten Seite einer offenen Figur, deren Anfangsstrahl in der Ebene ξ liegt, deren Ecken in den Geraden $A_1, \ldots A_n$ liegen und deren Seiten durch die Geraden $B_1, \ldots B_n$ gehen. Endlich, das Produkt $\xi A_1 B_1 \ldots A_n B_n A_{n+1}$ ist der letzten Ecke einer Figur kongruent, deren Anfangsstrahl in der Ebene ξ liegt, deren Ecken in den Seiten $A_1, \ldots A_{n+1}$ liegen und deren Seiten durch die Geraden $B_1, \ldots B_n$ gehen.

Ich werde alle diese sechs Bewegungen der offenen Figuren *lineale* nennen. Es giebt also zwei Arten der linealen Bewegung offener Figuren, deren erste darin besteht, dass sich alle Ecken und Seiten in festen geraden Linien bewegen, die andere darin, dass sich alle Ecken in festen Ebenen bewegen, während alle Seiten durch feste Punkte gehen. Bei beiden Bewegungen soll † wieder der Fall ausgeschlossen 30 bleiben, wo irgend zwei feste Elemente, in denen sich zwei aufeinander folgende Elemente der offenen Figur bewegen sollen, vereinigt liegen. Im ersteren Falle sind alle Ecken der offenen Figur einfach beweglich,

im letzteren zweifach; daher will ich jene erstere Art der linealen Bewegung gleichfalls eine *einfache*, letztere eine *zweifache* nennen. In beiden Fällen ist jede Ecke (und ebenso der geometrische Ort jeder Seite) einer lineal beweglichen offenen Figur einem Produkte kongruent, dessen erster Faktor der geometrische Ort des Anfangselements ist und dessen folgende Faktoren nach der Reihe diejenigen festen Elemente sind, welchen die Ecken und Seiten der offenen Figur, bis zu der betrachteten Ecke (oder Seite) hin, vereinigt liegen sollen.

§ 5.

Konstruktion der Produkte mit mehreren variablen Faktoren durch Verkettungen offener Figuren.

Wenn zwei variable Faktoren zusammentreten, so sind (immer noch das Produkt nullter Stufe ausgeschlossen) folgende Fälle möglich: Entweder *a*) es treten zwei Punkte zusammen oder *b*) zwei Ebenen oder *c*) eine Gerade und ein Punkt oder *d*) eine Gerade und eine Ebene.

In den ersten zwei Fällen ist das Produkt eine Gerade. Diese Gerade kann dann entweder mit einem Punkt oder einer Ebene zusammentreten. Dies giebt, wenn man in jedem dieser Fälle nur die drei Stufenzahlen nebeneinander schreibt, folgende vier Schemata:

$$111, \ 113, \ 331, \ 333.$$

In den Fällen *c*) und *d*) soll eine Gerade mit einem Punkt oder einer Ebene zusammentreten. Da die Gerade aber wieder nur als Produkt zweier Punkte oder zweier Ebenen entstanden sein kann, so erhält man hier dieselben vier Schemata. Es werde in jedem Schema das erste der drei Elemente mit a oder α, das zweite mit b oder β, das dritte mit c oder γ bezeichnet, so erhält man die den vier Schematen entsprechenden Produkte:

$$abc, \quad ab\gamma, \quad \alpha\beta c, \quad \alpha\beta\gamma,$$

die wir nach der Reihe mit

$$\varrho, \quad r, \quad \sigma, \quad s$$

bezeichnen wollen, indem das erste und dritte eine Ebene, das zweite und vierte einen Punkt darstellt.

31 Ich will jetzt zunächst annehmen, dass sowohl a, b, c als auch α, β, γ variabel sind und dass jedes dieser Elemente dadurch entstanden sei, dass ein variabler Punkt, oder eine variable Ebene, mit einer Reihe fester Elemente multiplicirt wurde. Ebenso will ich annehmen, dass die entstandenen Produkte (ϱ, r, σ, s) späterhin noch mit Reihen fester

Elemente multiplicirt werden sollen. Hierdurch ist Alles auf die Betrachtung des vorigen Paragraphs reducirt.

Zuerst betrachte man das Produkt $\varrho \equiv abc$. Hier können nach § 4 a, b und c als die letzten Ecken dreier lineal beweglicher offener Figuren angesehen werden; die Lage der Endstrahlen der drei offenen Figuren ist willkürlich, nur dass sie beziehlich durch a, b, c gehen müssen. Die Ebene ϱ endlich soll als solche angesehen werden, die hernach noch mit einer Reihe fester Elemente zu multipliciren ist. Dieser Multiplikation wurde in § 4 eine offene Figur zu Grunde gelegt, deren Anfangsstrahl in der Ebene ϱ beweglich ist. Also treten hier vier offene Figuren hervor; und zwar gehen die Endstrahlen der ersten drei offenen Figuren, einzeln genommen, durch die Punkte a, b, c, und der Anfangsstrahl der vierten liegt in der Ebene $\varrho \equiv abc$. Da die Lage jener Endstrahlen im Uebrigen willkürlich ist, so kann man sie leicht so annehmen, dass die vier in Betracht kommenden Grenzstrahlen paarweise zusammenfallen. Es sei p ein in ab beweglicher Punkt, so lässt sich die Gerade ab als der gemeinschaftliche Endstrahl der beiden ersten offenen Figuren und die Gerade pc als der Endstrahl der dritten und der Anfangsstrahl der vierten setzen. Denn durch diese Annahmen werden die Bedingungen erfüllt, dass die Endstrahlen beziehlich durch a, b, c gehen und der Anfangsstrahl in der Ebene abc beweglich sein soll. Die eigenthümliche Lage der vier Grenzstrahlen in dem Produkte abc ist also die, dass sie paarweise zusammenfallen und das eine Paar mit dem andern vereinigt liegt, das heisst, von ihm geschnitten wird.

Betrachtet man *zweitens* das Produkt $r \equiv ab\gamma$, so sind hier a und b als letzte Ecken zweier offener Figuren anzusehen. Die Endstrahlen derselben, welche beziehlich durch a und b gehen müssen, im Uebrigen aber willkürlich sind, kann man wieder zusammenfallen lassen, das heisst, ab als den gemeinschaftlichen Endstrahl derselben setzen. Die Ebene γ ist nach § 4 als geometrischer Ort der letzten Seite einer offenen Figur zu betrachten. Der Endpunkt dieser offenen Figur ist im Uebrigen willkürlich; nur dass er in der letzten Seite, also hier in der Ebene γ liegen muss. Der Punkt $r \equiv ab\gamma$, das heisst der Punkt, in welchem die Gerade ab die Ebene γ schneidet, wird, † wenn 32 r noch mit einer Reihe fester Elemente multiplicirt werden soll, zum Anfangspunkte einer vierten offenen Figur. Da der Endpunkt der dritten in γ willkürlich war, so kann man ihn mit dem Anfangspunkt (r) der vierten zusammenfallen lassen. Also fallen in diesem Falle zwei Grenzstrahlen (ab) zusammen und ebenso zwei Grenzpunkte (r), und diese liegen mit jenen vereinigt. In den beiden bisher betrachteten

Fällen fallen also die vier in Betracht kommenden Grenzelemente paarweise zusammen, und das eine Paar liegt mit dem andern vereinigt. Der Unterschied ist nur der, dass im ersten Falle alle vier Grenzelemente, im zweiten Falle zwei derselben *Strahlen* sind, die beiden andern *Punkte*.

Es werde jetzt das *dritte* Produkt $\sigma \equiv \alpha\beta c$ betrachtet. Hier ist nach § 4 die Ebene α als der geometrische Ort der letzten Seite einer offenen Figur anzusehen, deren Endpunkt willkürlich in dieser Seite, also auch willkürlich in der Ebene α liegt. Ebenso ist β als der geometrische Ort der letzten Seite einer offenen Figur zu betrachten, deren Endpunkt willkürlich in β angenommen werden kann. Man kann daher einen in der Kante $\alpha\beta$ beweglichen Punkt p als gemeinschaftlichen Endpunkt jener beiden offenen Figuren setzen. Ferner ist c als die letzte Ecke einer offenen Figur zu betrachten, deren Endstrahl willkürlich durch c geht. Wir setzen pc als diesen Endstrahl. Endlich die Ebene $\sigma \equiv \alpha\beta c$, das heisst die Ebene, welche durch den Punkt c und die Kante $\alpha\beta$ gelegt ist, wird, wenn sie noch mit einer Reihe fester Elemente multiplicirt werden soll, zu dem geometrischen Orte des Anfangsstrahls einer vierten Figur. Da p in $\alpha\beta$ beweglich ist, so ist σ der geometrische Ort von cp; man kann also cp als Anfangsstrahl der vierten offenen Figur setzen. Es sind demnach, wie im vorhergehenden Falle, zwei der Grenzelemente Strahlen, und die beiden andern sind Punkte; jene Grenzstrahlen (cp) fallen zusammen, ebenso diese Grenzpunkte (p), und diese liegen mit jenen vereinigt. Der Unterschied zwischen diesem und dem vorhergehenden Falle ist nur der, dass das Anfangselement der vierten Figur dort ein Punkt, hier ein Strahl ist.

Das *vierte* Produkt endlich war $s \equiv \alpha\beta\gamma$. Hier ist jede der Ebenen α, β, γ als geometrischer Ort der Endseite einer offenen Figur zu betrachten, deren Endpunkt also in jener Ebene willkürlich angenommen werden kann. Man kann daher den Durchschnittspunkt (s) der drei Ebenen α, β, γ als gemeinschaftlichen Endpunkt der drei 33 offenen Figuren setzen; zugleich ist dieser † Punkt Anfangspunkt der vierten. Also sind dann alle vier Grenzelemente Punkte, welche in einem Punkt s zusammenfallen. Auch in diesem Falle kann man sagen, dass die vier Grenzelemente paarweise zusammenfallen und das eine Paar mit dem andern vereinigt liegt. Dies ist also das Gemeinschaftliche in allen vier Fällen. Im ersten Falle sind alle Grenzelemente Strahlen, im letzten Punkte; in den beiden mittleren Fällen sind zwei Grenzelemente Strahlen, die beiden andern Punkte; und zwar ist das Anfangselement der vierten Figur im zweiten Falle ein Punkt, im dritten ein Strahl.

Es wurde oben angenommen, dafs a, b, c, α, β, γ dadurch entstanden seien, dass ein variabler Punkt, oder eine variable Ebene, mit einer Reihe fester Elemente multiplicirt sei, wobei es gleichgültig ist, ob diese Reihe aus einem oder aus mehren Elementen besteht. Das erlangte Resultat bleibt indessen bestehen, auch wenn jene Bedingung nicht erfüllt wird. In der That, ist zum Beispiel a zwar variabel, aber nicht durch Multiplikation eines beweglichen Elements mit einem oder mehreren festen Elementen entstanden, so können wir dennoch a als den Anfangspunkt einer offenen Figur setzen, an den sich aber sogleich der Endstrahl derselben anschliesst; und die oben gezogenen Folgerungen bleiben bestehen. Durch das Wegfallen der konstanten Faktoren ist nur das Wegfallen der Ecken und Seiten der offenen Figur bedingt, und diese besteht bloss aus den beiden Grenzelementen. Ebenso, wenn die Ebene α zwar variabel ist, aber nicht durch Multiplikation eines beweglichen Elements mit einem oder mehreren festen Elementen entstanden ist, kann man dennoch α als den geometrischen Ort des Anfangsstrahls einer offenen Figur setzen, an welchen sich aber sogleich der Endpunkt derselben anschliesst. Die offene Figur besteht dann wiederum nur aus den beiden Grenzelementen; in den übrigen Folgerungen wird nichts geändert. Ganz auf dieselbe Weise kann man die Annahme, dass die entstehenden Produkte noch hernach mit einer Reihe fester Elemente multiplicirt werden sollen, ganz wegfallen lassen.

Ferner wurde oben angenommen, dafs in jedem der vier Produkte alle drei Faktoren variabel sind. Sind alle drei konstant, so ist auch ihr Produkt konstant und kann also ohne Weiteres als eins der festen Elemente gesetzt werden. Sind zwei derselben konstant, so ist dann das variable Element entweder fortschreitend mit zwei festen Elementen multiplicirt oder mit deren Produkt, das heisst mit *einem* festen Element. In beiden Fällen setzt sich die an das variable Element sich anschliessende offene Figur nur fort. Es bleibt also nur der Fall zu betrachten, wo eins der drei Elemente fest ist, die beiden andern beweglich sind.

Dieser Fall erfordert um so mehr Beachtung, da er bei der Erzeugung der Oberflächen bei weitem der häufigste ist. 34

Angenommen also, es sei etwa der Punkt a, den wir bisher als beweglich setzten, konstant, so tritt kein anderer Unterschied hervor, als dass der durch a gehende Strahl, welcher bisher als Endstrahl einer offenen Figur sich zeigte, jetzt durch den festen Punkt a geht oder, anders ausgedrückt, dass die Ecke a, welche bisher beweglich war, jetzt fest wird. In dem vorher gefundenen Resultate wird im Uebrigen nichts geändert. Ja auch der Wortausdruck desselben kann

unverändert bleiben, wenn man den festen Punkt a, nebst dem von ihm ausgehenden Strahle, gleichfalls als offene Figur setzt; und zwar den Strahl als Endstrahl derselben. Hierbei ist es gleichgültig, ob man den festen Punkt a als Anfangspunkt der offenen Figur setzt oder als eine Ecke derselben, indem man dieser noch beliebige feste Seiten und Ecken vorangehen lässt. Immer kann man die ganze Figur, mit Ausnahme des durch a gehenden willkürlichen Endstrahles, als unbeweglich annehmen. Wir nennen eine solche offene Figur, da sie von dem veränderlichen Elemente unabhängig ist, zum Unterschiede von den früher betrachteten, eine *unabhängige* offene Figur. Ist zweitens eine der Ebenen, etwa α, konstant, so wird der in α liegende Punkt, welcher bisher als Endpunkt einer offenen Figur sich zeigte, jetzt ein in der festen Ebene α liegender Punkt. Man wird daher auch diesen Punkt als Endpunkt einer offenen Figur setzen können, indem man eine solche offene Figur, deren Endpunkt in einer festen Ebene liegt, gleichfalls *unabhängig* nennt.

Von hier aus gelangt man sogleich zur Konstruktion eines beliebigen Produkts, welches das bewegliche Element x beliebig oft als Faktor enthält, indem man den Begriff der Verkettung offener Figuren, wie er von mir (siehe Crelle's Journal Bd. 42, S. 190 {hier S. 83}) der Erzeugung ebener Kurven zum Grunde gelegt ist, nach Anleitung der soeben gegebenen Entwickelung auf den Raum überträgt.

Wenn man nämlich einen beweglichen Punkt x zum Anfangspunkte mehrerer offener Figuren macht, dann aus dreien derselben oder aus zweien und einer unabhängigen offenen Figur eine neue offene Figur in der Art bildet, dass die vier Grenzelemente (nämlich die drei Endelemente der drei ersteren und das Anfangselement der neuen) paarweise zusammenfallen, während zugleich das eine Paar mit dem andern vereinigt liegt, und dann fortfährt, die jedesmal noch übrigen offenen Figuren auf die angegebene Art zusammenzuschliessen, bis sich zuletzt alle variablen offenen Figuren zu einer einzigen vereinigt haben, 35 so nenne ich das ganze System dieser offenen † Figuren eine *Verkettung* derselben; und zwar eine Verkettung n-ten Grades, wenn n offene Figuren von dem Anfangselement der Verkettung ausgehen. Wir sagen ferner, dass eine Verkettung offener Figuren im Raume sich *lineal* bewege, wenn alle abhängigen offenen Figuren, aus denen sie besteht, sich lineal bewegen. Mittels dieser Begriffe lässt sich nun das Resultat dieses Paragraphs in dem folgenden Satze aussprechen:

Jedes Produkt, welches n-mal den variablen Punkt x als Faktor enthält und welches von erster oder dritter Stufe ist, aber keinen Faktor nullter Stufe einschliesst, lässt sich durch eine lineal bewegte Verkettung

n-ten Grades in der Art darstellen, dass für jeden Punkt x das Produkt entweder der letzten Ecke der Verkettung oder der Ebene, in welcher die letzte Seite derselben beweglich ist, kongruent sei. Und umgekehrt lässt sich die letzte Ecke oder die Ebene der letzten Seite jeder Verkettung n-ten Grades durch ein solches Produkt darstellen.

§ 6.

Erzeugung der algebraischen Oberflächen durch lineale Bewegung geschlossener Verkettungen.

Es werde jetzt endlich ein beliebiges Produkt nullter Stufe betrachtet, welches n-mal x als Faktor enthält, aber keinen Faktor nullter Stufe einschliesst. Ich habe in dem vorhergehenden Aufsatze {auf S. 151 f.} gezeigt, dass man in einem solchen Produkte jeden Faktor, also auch x, ohne Klammern nach der letzten Stelle bringen kann. Dann erhält das Produkt die Form ϖx, wo ϖ ein Produkt dritter Stufe ist, welches $(n-1)$-mal den Punkt x als Faktor enthält. Hat man nun die Gleichung

$$\varpi x = 0,$$

so drückt sie aus, dass der Punkt x in der Ebene ϖ liegt. Die Ebene ϖ aber lässt sich nach dem vorigen Paragraph als die Ebene darstellen, in welcher die Endseite einer Verkettung $(n-1)$-ten Grades beweglich ist. Also drückt die Gleichung $\varpi x = 0$ die Möglichkeit aus, jene Seite durch den Punkt x zu legen, oder, anders ausgedrückt, die Möglichkeit, das Endelement der Verkettung mit dem Anfangselement derselben zusammenfallen zu lassen.

Wir nennen eine solche Verkettung, deren Endelement mit ihrem Anfangselement zusammenfällt, eine *geschlossene* Verkettung; und zwar n-ten Grades, wenn n offene Figuren von dem Anfangselemente (x) ausgehen (die letzte, † welche x zum Endelemente hat, eingerechnet). 36 Dann verwandelt sich der Satz (5) der Einleitung in folgenden Satz:

Der Anfangspunkt einer sich lineal bewegenden geschlossenen Verkettung n-ten Grades beschreibt eine Oberfläche n-ter Ordnung,

und umgekehrt:

Jede algebraische Oberfläche lässt sich als Ort einer sich lineal bewegenden geschlossenen Verkettung darstellen.

Stettin, im Juli 1852.

XI.

37 Die stereometrische Gleichung zweiten Grades und die dadurch dargestellten Oberflächen.

Von

Prof. **H. Grassmann**,
am Gymnasio zu Stettin.

Crelles Journal Bd. 49, Heft I, S. 37—46 (1855).

Wenn ein stereometrisches Produkt nullter Stufe, welches m-mal einen veränderlichen Punkt x als Faktor enthält, gleich Null gesetzt wird, so ist der dadurch bedingte geometrische Ort von x, wie ich in den früheren Aufsätzen nachgewiesen habe, eine Oberfläche n-ter Ordnung. Ich will der Kürze wegen eine solche Gleichung eine *stereometrische Gleichung n-ten Grades* nennen. Es ist also der geometrische Ort eines Punktes x, welcher einer stereometrischen Gleichung zweiten Grades genügt, eine Oberfläche zweiter Ordnung. Ich werde hier diese Gleichung und die dadurch ausgedrückte Erzeugung der Oberfläche zweiter Ordnung näher erörtern.

§ 1.

Die allgemeine Form der stereometrischen Gleichung zweiten Grades.

Die stereometrische Gleichung zweiten Grades hat die Form

$$\mathfrak{P} = 0,$$

wo $\mathfrak{P}$ ein stereometrisches Produkt nullter Stufe ist, welches den veränderlichen Punkt x zweimal als Faktor enthält. Da man in einem Produkt nullter Stufe jeden Faktor auf die letzte Stelle bringen kann, und zwar so, dass er von keiner Klammer mehr umschlossen wird (siehe Stereometr. Multiplik. § 5 {hier S. 151 f.}), so lässt sich dies auf

den Faktor x anwenden, und die Gleichung zweiten Grades nimmt die Form

$$\varpi x = 0 \text{ oder, anders geschrieben, } x\varpi = 0$$

an, welche ausdrückt, dass der Punkt x in der Ebene ϖ liegt.

Da ϖ noch den Faktor x enthält, so kann man in der Gleichung $x\varpi = 0$ den in ϖ enthaltenen Faktor x ohne Klammer auf die letzte Stelle bringen und erhält dann die Form

$$xRx = 0,$$

wo R eine Reihe konstanter Faktoren bezeichnet, mit welchen fortschreitend † multiplicrt werden soll. Und zwar wird, da in einem 38 Produkte nullter Stufe die Summe der Stufenzahlen sämtlicher Faktoren durch vier theilbar ist, die Summe der Stufenzahlen aller in R enthaltener Faktoren, durch vier dividirt, zwei zum Rest lassen.

Das Produkt xR stellt ein Element dritter Stufe, also eine Ebene dar; folglich wird man (wenn nicht etwa xR sich in einen variablen Faktor nullter Stufe und in einen konstanten Faktor zerfällen lässt), vermöge des in dem vorhergehenden Aufsatze (§ 3 {hier S. 161}) erwiesenen Gesetzes, statt R entweder eine Reihe abwechselnder fester Punkte und Ebenen, welche mit einem Punkte beginnt, oder eine Reihe fester Geraden setzen können. Allein im ersteren Falle würde xR entweder von der ersten oder von der zweiten Stufe sein, je nachdem jene Reihe mit einer Ebene oder einem Punkte schliesst. Es bleibt also nur der zweite Fall übrig, das heisst, es lässt sich stets statt R eine Reihe gerader Linien setzen; und zwar muss die Anzahl derselben, da die Summe der Stufenzahlen durch vier dividirt zwei zum Rest lassen muss, ungerade sein. Folglich zeigt sich die Gleichung in der Form

$$(1) \qquad xABA_1B_1 \ldots A_nB_nCx = 0,$$

wo $A, B, \ldots$ gerade Linien sind.

Wenn insbesondere xR sich in einen variablen Faktor nullter Stufe und in einen konstanten Faktor auflösen lässt, so wird der erstere die Form $x\alpha$ haben müssen, wo α eine Ebene ist, und der letztere wird eine konstante Ebene sein. Diese sei β; alsdann haben wir

$$x\alpha \,.\, \beta x = 0.$$

Es zerfällt dann die Oberfläche zweiter Ordnung in zwei Ebenen. Aber auch diesen Fall kann man der Gleichungsform (1) unterordnen. In der That: es seien A und B irgend zwei Gerade der Ebene α, die sich in einem Punkt c schneiden, welcher zugleich in der Ebene β

liegt, und C sei irgend eine Gerade in β, die aber nicht durch c geht, so stellt die Gleichung

$$xABCx = 0$$

eine in diese beiden Ebenen α und β zerfallende Oberfläche zweiter Ordnung dar. Diese Form aber ordnet sich der Form (1) unter, wenn man $n = 0$ setzt. Es ist also die Form (1) die ganz allgemeine Form der stereometrischen Gleichung zweiten Grades.

§ 2.

Geometrische Deutung der stereometrischen Gleichung zweiten Grades.

Wenn das Produkt $xAB \ldots A_n B_n$ nicht Null ist, so stellt dasselbe einen Punkt in B_n dar, den wir p_n nennen wollen. Eben so 39 stellt dann das † Produkt $xAB \ldots A_r B_r$ für jeden Index r, von 0 bis n, einen Punkt dar, der p_r heissen soll. Dann folgt sogleich

$$p_{r-1} A_r B_r \equiv p_r.$$

Diese Gleichung drückt aus, dass der Punkt p_r in der Geraden B_r liegt und in der durch p_{r-1} und A_r gelegten Ebene. Das letztere lässt sich auch so ausdrücken, dass die Gerade $p_{r-1} p_r$ die Gerade A_r schneidet. Es bilden also die Punkte $x, p, p_1, \ldots p_n$ eine offene Figur, welche mit dem Punkte x beginnt, deren Ecken $p, \ldots p_n$ in den Geraden $B, \ldots B_n$ liegen und deren Seiten $xp,\ pp_1, \ldots p_{n-1} p_n$ von den Geraden $A, \ldots A_n$ geschnitten werden. Und wenn der Anfangspunkt x dieser offenen Figur gegeben ist, so ist ihr Endpunkt p_n genau bestimmt und stellt das Produkt $xAB \ldots A_n B_n$ dar; immer unter der Voraussetzung, dass das Produkt nicht Null ist. Ist hingegen zwar das Produkt $xAB \ldots A_{r-1} B_{r-1}$ ungleich Null, aber $xAB \ldots A_r B_r$ gleich Null, das heisst $p_{r-1} A_r B_r = 0$, so liegt p_{r-1} entweder in A_r oder B_r liegt in der durch p_{r-1} und A_r gelegten Ebene. In beiden Fällen hat jeder Punkt p_r der Geraden B_r die Eigenschaft, dass die Gerade $p_{r-1} p_r$ die Gerade A_r schneidet; das heisst: Der Endpunkt p_r einer offenen Figur, deren Anfangspunkt x ist, deren Ecken $p, \ldots p_r$ in den Geraden $B, \ldots B_r$ liegen und deren Seiten von den Geraden $A, \ldots A_r$ geschnitten werden, ist in diesem Falle innerhalb der Geraden B_r ganz willkürlich. Dasselbe gilt dann aber offenbar für die Ecke p_n der ganzen offenen Figur $x, p, p_1, \ldots, p_n$. Also:

Das Produkt $xAB \ldots A_n B_n$ wird jedesmal durch eine offene Figur $x, p, p_1, \ldots p_n$, deren Ecken $p, \ldots p_n$ in den Geraden $B, \ldots B_n$ liegen und deren Seiten $xp, \ldots p_{n-1} p_n$ von den Geraden $A, \ldots A_n$ geschnitten werden, in der Art dargestellt, dass, wenn jenes Produkt

nicht Null ist, die Ecke p_n genau bestimmt und jenem Produkte kongruent ist; dass hingegen, wenn jenes Produkt Null ist, die Ecke p_n willkürlich in B_n angenommen werden kann.

Betrachtet man nun die Gleichung zweiten Grades

$$(1) \qquad xAB \ldots A_n B_n C x = 0,$$

so sieht man, dass sie, wenn $xAB \ldots A_n B_n$ nicht Null ist, ausdrückt, dass $p_n Cx = 0$ ist, das heisst, dass sich durch p_n und x eine Gerade legen lässt, welche die Gerade C schneidet; das heisst, es sind dann in der geschlossenen Figur $x, p, \ldots p_n, x$ alle Ecken, ausser x, in den Geraden $B, \ldots B_n$ beweglich, und die Seiten $xp, \ldots p_{n-1}p_n, p_n x$ werden von den Geraden $A, \ldots A_n, C$ geschnitten.

Ist aber das Produkt $xAB \ldots A_n B_n = 0$, so wird auch jedesmal das ganze Produkt zu Null, und also wird die Gleichung (1) befriedigt. In diesem Falle kann nun p_n in B_n willkürlich angenommen 40 werden. Legt man durch x und C eine Gerade, welche die Gerade B_n trifft, und setzt den Punkt, in welchem sie dieselbe trifft, p_n, so genügt die geschlossene Figur $x, p, \ldots p_n, x$ auch in diesem Falle der oben ausgesprochenen Bedingung. Also haben wir den Satz:

Wenn sich eine veränderliche geradlinige Figur $(x, p, p_1, \ldots p_n, x)$ im Raume so bewegt, dass alle Seiten $(xp, pp_1, \ldots p_{n-1}p_n, p_n x)$ von festen Geraden $(A, A_1, \ldots A_n, C)$ getroffen werden und alle Ecken $(p, p_1, \ldots p_n)$, ausser einer (x), in festen Geraden $(B, B_1, \ldots B_n)$ liegen, so beschreibt diese eine Ecke (x) eine Oberfläche zweiter Ordnung; und zwar eine geradlinige, deren Gleichung

$$xAB \ldots A_n B_n C x = 0$$

ist.

Dass die Oberfläche eine geradlinige, das heisst eine solche ist, auf welcher sich gerade Linien ziehen lassen, folgt unmittelbar aus der Gleichung, da derselben zum Beispiel durch jeden Punkt x der Geraden A Genüge geschieht. Die besonderen Fälle, namentlich auch der, wo die Oberfläche zweiter Ordnung unbestimmt wird, sollen in den folgenden Paragraphen abgehandelt werden.

§ 3.

Projektivische Deutung der Gleichung zweiten Grades.

Man nehme an, dass in der Gleichung (1) keine der konstanten Geraden die vorhergehende oder nachfolgende Gerade schneide, und betrachte unter dieser Voraussetzung das Produkt $xAB \ldots A_n B_n C$, welches wir der Kürze wegen auch mit xR bezeichnen und in welchem x zunächst frei im Raume beweglich angenommen wird. Dann stellt,

wenn x nicht in A liegt, xA eine Ebene des durch die Axe A gelegten Ebenenbüschels dar, xAB den jener Ebene entsprechenden Punkt der Geraden B, welche mit jenem Ebenenbüschel perspektivisch ist, $xABA_1$ die entsprechende Ebene eines Ebenenbüschels, der mit jenen beiden Gebilden perspektivisch ist, und so fort; xR endlich die entsprechende Ebene eines Ebenenbüschels, welcher mit allen früheren Gebilden, namentlich auch mit dem Ebenenbüschel xA, projektivisch ist: so nämlich, dass xR und xA entsprechende Ebenen dieser Büschel sind. Dann sagt die Gleichung (1), die jetzt in der Form $xRx = 0$ sich zeigt, aus, dass die der Ebene xA entsprechende Ebene xR durch den Punkt x geht, das heisst, dass x in der Durchschnittslinie der 41 beiden Ebenen liegt. Also ist † jede Durchschnittslinie zweier entsprechender Ebenen jener beiden Büschel eine Linie der durch die Gleichung $xRx = 0$ dargestellten Oberfläche, und da auch alle Punkte x der Geraden A in zwei entsprechenden Ebenen liegen, so besteht die Oberfläche aus der Gesamtheit jener Linien. Also:

Die Durchschnittslinien der entsprechenden Ebenen zweier projektivischer Ebenenbüschel bilden eine (geradlinige) Oberfläche zweiter Ordnung.

§ 4.

Reduktion der Gleichung zweiten Grades auf die einfachsten Formen.

Wenn zuerst in der Gleichung (1) irgend zwei aufeinander folgende feste Gerade, zum Beispiel A_r und B_r, sich schneiden, so kann man, nach den Gesetzen der stereometrischen Multiplikation (§ 3 {hier S. 159 f.}), statt derselben eine Ebene und einen Punkt setzen; nämlich die *Ebene*, in welcher die Geraden liegen, und den Punkt, in welchem sie sich schneiden. Ist α_r jene Ebene und a_r dieser Punkt, so verwandelt sich die Gleichung (1) in

$$xAB \ldots A_{r-1}B_{r-1}\alpha_r \,.\, a_r A_{r+1}B_{r+1} \ldots A_n B_n Cx = 0,$$

wo der zwischengesetzte Punkt die beiden Faktoren nullter Stufe scheidet. Statt des ersten dieser beiden Faktoren kann man auch $x(\alpha_r B_{r-1}A_{r-1} \ldots BA)$ schreiben.

Ist nun entweder $\alpha_r B_{r-1}A_{r-1} \ldots BA$ oder $a_r A_{r+1}B_{r+1} \ldots A_n B_n C$ Null, so genügt jeder beliebige Punkt x der obigen Gleichung. Die durch sie dargestellte Oberfläche zweiter Ordnung ist also gänzlich unbestimmt; der Punkt x ist keiner seine Lage beschränkenden Gleichung unterworfen. Die einfachste Form der Gleichung (1), welche den Punkt x ganz unbestimmt lässt, ist

(a) $$xAx = 0.$$

Sind die beiden Produkte $\alpha_r B_{r-1} A_{r-1} \ldots BA$ und $a_r A_{r+1} B_{r+1} \ldots A_n B_n C$ ungleich Null, so stellt jedes derselben eine Ebene dar. Ist α die eine und β die andere dieser Ebenen, so verwandelt sich die Gleichung in

$$x\alpha \, . \, \beta x = 0,$$

welche in einfachster Form die in zwei Ebenen α und β zerfallende Oberfläche zweiter Ordnung darstellt und welche jedesmal hervorgeht, sobald die Gleichung (1) zwei aufeinander folgende Geraden enthält, die in derselben Ebene liegen, und nicht jeder Punkt jener Gleichung genügt. Zieht man von einem Punkte c, der in α und β zugleich liegt, zwei Gerade in α, etwa ca und cb, und zieht in β irgend eine Gerade C, die nicht durch c geht, so lässt † sich die Gleichung auch 42 in der Form

(b) $$xca(cb)Cx = 0$$

darstellen. Wenn in dieser Gleichung auch die Gerade C durch den Punkt c geht, so stellt sie wieder eine unbestimmte Oberfläche dar.

Ich nehme jetzt an, dass von den Geraden $A, B, \ldots A_n, B_n, C$ keine zwei aufeinander folgende in einer und derselben Ebene liegen. In diesem Falle ist, wie wir oben zeigten, die durch die Gleichung (1) dargestellte Oberfläche der Durchschnitt zweier projektivischer Ebenenbüschel mit den Axen A und C; und zwar geht jede Ebene des letzteren Büschels aus der entsprechenden des ersteren durch fortschreitende Multiplikation mit $B, A_1, B_1, \ldots A_n, B_n, C$ hervor.

Nun wird bekanntlich bei Ebenenbüscheln (erster Stufe), wie bei punktirten Geraden, durch drei Paare entsprechender Elemente zu jedem vierten Elemente des einen Gebildes das entsprechende des andern, also hier das ganze Durchschnittsgebilde bestimmt. Dies führt zu einer Reduktion der Gleichung (1).

Angenommen zuerst, es liegen die Axen A und C nicht in einer und derselben Ebene, so lege man durch A drei verschiedene Ebenen $x_1 A$, $x_2 A$, $x_3 A$. Dann sind, wenn R noch immer die Reihe der Faktoren $A, B, \ldots A_n, B_n, C$ bezeichnet, die drei entsprechenden Ebenen: $x_1 R$, $x_2 R$, $x_3 R$. Die letzteren Ebenen gehen durch die Gerade C, und da A und C nicht in einer und derselben Ebene liegen, so können die entsprechenden Ebenen $x_1 A$ und $x_1 R$, $x_2 A$ und $x_2 R$, $x_3 A$ und $x_3 R$ nicht zusammenfallen. Die Durchschnittslinien dieser drei Paare entsprechender Ebenen seien G_1, G_2, G_3, so schneiden diese drei Geraden jede der beiden Geraden A und C, und keine zwei jener drei Geraden können in einer und derselben Ebene liegen, weil sonst auch A und C in einer Ebene liegen müssten; gegen die Annahme.

Jetzt lege man durch die drei Geraden G_1, G_2, G_3 eine beliebige,

aber von A und C verschiedene Gerade B', welche jene Geraden beziehlich in den Punkten g_1, g_2, g_3 schneiden mag, so lässt sich leicht zeigen, dass die Oberflächen

(1) $$xRx = 0$$

und

(c) $$xAB'Cx = 0$$

dieselbe Oberfläche darstellen. Denn die Ebenen $x_1 A$ und $x_1 R$ enthalten beide die Gerade G_1, also auch den Punkt g_1; sie sind also, da 43 die Gerade † B' mit A und mit C keinen Punkt gemein hat, also auch g_1 weder in A noch in C liegt, beziehlich mit $g_1 A$ und $g_1 C$ kongruent. Setzt man auch in den Ausdrücken xA und $xAB'C$, durch deren gegenseitigen Durchschnitt die Oberfläche (c) entsteht, statt x den Punkt g_1, so wird $xA \equiv g_1 A$ und $xAB'C \equiv g_1 AB'C \equiv g_1 C$, da g_1 in B' liegt. Dasselbe gilt, wenn man g_2 oder g_3 statt g_1 setzt. Also sind die drei Ebenenpaare $g_1 A$ und $g_1 C$, $g_2 A$ und $g_2 C$, $g_3 A$ und $g_3 C$ Paare entsprechender Ebenen sowohl in den Ebenenbüscheln, welche die Oberfläche (1), als {auch} in denen, welche die Oberfläche (c) erzeugen, mithin sind beide Oberflächen identisch.

Es hat sich also ergeben, dass sich jedesmal, wenn von den Geraden A, B, ... A_n, B_n, C keine die nächstfolgende und auch die letzte nicht die erste schneidet, die Reihe der Geraden in der Gleichung (1) auf drei Gerade A, B', C zurückführen lässt, deren keine zwei in einer und derselben Ebene liegen. Die durch die Gleichung (1) dargestellte Oberfläche besteht dann aus der gesamten Linienschaar, welche die drei Geraden A, B', C schneiden.

Es mögen ferner die Geraden A und C einen Punkt g gemein haben, ohne aber zusammenzufallen. Dann haben alle Ebenen beider Büschel, also auch deren Durchschnittslinien, den Punkt g gemein; folglich ist dann die Oberfläche ein *Kegel* mit der Spitze g und zwar, vermöge des allgemeinen Satzes, ein *Kegel zweiter Ordnung*. Dieser Kegel wird durch die Spitze und einen nicht durch die Spitze gehenden Schnitt bestimmt. Legt man nun eine Ebene α, die nicht durch die Spitze des Kegels geht, durch die beiden projektivischen Ebenenbüschel hindurch, so entstehen in dieser Ebene α zwei projektivische ebene Strahlenbüschel, deren gegenseitiger Durchschnitt der Kegelschnitt ist, in welchem der Kegel von der Ebene α geschnitten wird. Es seien a und c die Punkte, in welchen die Axen A und C die Ebene α schneiden, und es sei die planimetrische Gleichung des Kegelschnitts:

$$xaDeFcx = 0,$$

so ist, wie man leicht sieht, die Gleichung des Kegels:

$$\text{(d)} \qquad \begin{cases} & xyaD(ge)F(gc)x = 0 \\ \text{oder} & \\ & xADEFCx = 0, \end{cases}$$

wenn man $ge \equiv E$ setzt.

Es zeigt sich also, dass jeder Kegel, dessen Spitze g ist, durch eine Gleichung von der Form (1) mit fünf Geraden sich darstellen lässt, von denen die erste und die letzte durch den Punkt g gehen, wie auch umgekehrt, dass jede Gleichung von dieser Form einen Kegel darstellt. In besonderen † Fällen kann der vorher betrachtete Kegel- 44 schnitt in zwei gerade Linien zerfallen; dann zerfällt der Kegel in zwei Ebenen, und die Anzahl der Geraden lässt sich dann auf drei reduciren, wie wir es oben sahen.

Endlich werde der letzte Fall betrachtet, wo die beiden Axen A und C zusammenfallen. Dann nimmt die Gleichung (1) die Form

$$xAB \ldots A_n B_n A x = 0$$

an. Man sieht sogleich, dass wenn dieser Gleichung irgend ein ausserhalb der Geraden A liegender Punkt x genügt, auch jeder in der Ebene xA liegende Punkt ihr genugthun muss. Wir haben also nur die sämtlichen Punkte x einer Geraden, die mit A nicht in einer und derselben Ebene liegt, zum Beispiel {der Geraden} B_n, zu suchen, welche der obigen Gleichung genügen. Liegt aber x in B_n, so ist $xAB \ldots A_n B_n A x \equiv xAB \ldots A_n x \,.\, B_n A$; wie sich aus den Gesetzen der stereometrischen Multiplikation (§ 4 {hier S. 150}) ergiebt. Da aber B_n und A nicht in einer und derselben Ebene liegen, also ihr Produkt $B_n A$ nicht Null ist, so darf man diesen Faktor nullter Stufe ganz weglassen und erhält

$$xAB \ldots B_{n-1} A_n x = 0.$$

Diese Gleichung stellt eine *Oberfläche zweiter Ordnung* dar. Die Punkte, welche dieselbe mit B_n gemein hat, sind die gesuchten Punkte, und die Ebenen, welche diese Punkte mit A verbinden, bilden die durch die gegebene Gleichung (1) dargestellte Oberfläche. Nun können aber *vier* verschiedene Fälle vorkommen. Entweder die Gerade B_n liegt ganz in der zu Hülfe genommenen Oberfläche, oder sie hat zwei Punkte mit ihr gemein oder einen oder keinen. Im ersten Falle genügt jeder Punkt x der Gleichung (1); im zweiten Falle zerfällt die Oberfläche (1) in die Ebenen, welche durch A und die beiden Durchschnittspunkte gelegt sind; im dritten Falle fallen die beiden Ebenen zusammen; im vierten Falle endlich genügt kein ausserhalb der Axe A liegender Punkt der Gleichung (1). Die Oberfläche besteht dann aus einer isolirten Geraden.

Nur der letzte Fall zeigt sich hier als ein neuer. Wir können diesen Fall durch die Gleichung $xA = 0$ ausdrücken. Aber diese Gleichung ist keine stereometrische. Es lässt sich der Fall durch eine stereometrische Gleichung von der Form

$$xADEFAx = 0$$

ausdrücken, wenn hier nämlich die Gerade F so angenommen wird, dass sie mit der durch die Gleichung $xADEx = 0$ dargestellten Ober-
45 fläche keinen † Punkt gemein hat. Aber auf weniger als fünf geradlinige Faktoren lässt sich die Gleichung in diesem Fall nicht bringen, da $xADAx = 0$ eine Gleichung ist, welcher durch jeden Punkt x genügt wird.

§ 5.

Die Gesamtheit der durch die stereometrische Gleichung zweiten Grades darstellbaren Oberflächen nebst ihren normalen Gleichungen.

Die stereometrische Gleichung zweiten Grades stellte, wenn sie nicht den veränderlichen Punkt x ganz unbestimmt liess, stets eine geradlinige Oberfläche dar. Wir haben nun im vorigen Paragraph gesehen, dass sich folgende fünf Gattungen geradliniger Oberflächen zweiter Ordnung durch stereometrische Gleichungen zweiten Grades darstellen lassen:

1) Die *hyperbolische geradlinige Fläche* zweiter Ordnung, das heisst das *einschalige Hyperboloid* und das *hyperbolische Paraboloid,*
2) der Verein zweier verschiedener *Ebenen,*
3) der Verein zweier zusammenfallender *Ebenen.*

In diesen drei Fällen liess sich die stereometrische Gleichung auf die Form

$$xABCx = 0$$

bringen. Diese Form stellt die erste Fläche dar, wenn von den drei Geraden A, B, C keine zwei in einer und derselben Ebene liegen; die zweite Fläche, wenn zwei jener Geraden sich schneiden und die dritte Gerade weder in der Ebene der beiden ersteren liegt, noch durch ihren Durchschnittspunkt geht; die dritte Fläche endlich, wenn die drei Geraden A, B, C in einer und derselben Ebene liegen, aber nicht durch einen und denselben Punkt gehen.

4) Der *Kegel zweiter Ordnung,*
5) die *isolirte Gerade.*

In diesen zwei Fällen liess sich die stereometrische Gleichung auf die Form

$$xABCDEx = 0$$

bringen. Diese Form stellte den Kegel dar, wenn A und E sich

schneiden und weder eine der vier Geraden A, B, C, D die nächst folgende Gerade schneidet, noch auch jeder Punkt der Ebene α, in welcher A und E liegen, der Gleichung genügt. Der letzt erwähnte Fall tritt, wie man leicht sieht, dann und nur dann ein, wenn die Gerade C so liegt, dass sie die Gerade $\alpha B(\alpha D)$ schneidet. Endlich stellte diese Form die isolirte Gerade dar, wenn A und E zusammenfallen und die Gerade D die Oberfläche, welche durch die Gleichung $xABCx = 0$ dargestellt wird, gar nicht trifft.

Die aufgestellten fünf Gattungen geradliniger Flächen zweiten Grades haben die Eigenthümlichkeit, dass jede Fläche, welche einer dieser Gattungen angehört, sich aus jeder Fläche derselben Gattung, aber aus keiner Fläche einer andern durch Kollineation ableiten lässt. Daraus folgt, dass, wenn sich eine dieser Flächen durch eine stereometrische Gleichung zweiten Grades darstellen lässt, auch jede andere Fläche derselben Gattung auf gleiche Weise dargestellt werden kann, indem man nur statt der geraden Linien, welche in der Gleichung jener Fläche vorkommen, die geraden Linien desjenigen kollinearen Systems setzen darf, in welchem statt der ersteren Fläche die zweite als jener entsprechend sich zeigt. Da nun jene fünf Gattungen die geradlinigen Flächen zweiter Ordnung vollständig umfassen, so folgt Nachstehendes: 46

Jede geradlinige Fläche zweiter Ordnung lässt sich durch eine stereometrische Gleichung zweiten Grades darstellen; wie auch umgekehrt jede Gleichung der letzteren Art eine Fläche der ersteren Art darstellt.

Stettin, im Juli 1852.

12*

XII.

[47] Die stereometrischen Gleichungen dritten Grades und die dadurch erzeugten Oberflächen.

Von

Prof. **H. Grassmann,**

am Gymnasio zu Stettin.

Crelles Journal Bd. 49, Heft I, S. 47—65 (1855).

§ 1.

Die verschiedenen Formen der stereometrischen Gleichungen dritten Grades.

Eine stereometrische Gleichung, welche in Bezug auf den veränderlichen Punkt x vom *dritten* Grade ist, hat die Form eines gleich Null gesetzten Produkts nullter Stufe, welches den Punkt x dreimal als Faktor enthält.

In diesem Produkte lässt sich nach den in der Abhandlung IX (Stereometr. Multiplikation § 5 {hier S. 152}) entwickelten Gesetzen der stereometrischen Multiplikation jeder beliebige Faktor auf die letzte Stelle schaffen; und zwar so, dass er von keiner Klammer mehr umschlossen wird; also lässt sich namentlich auch einer der drei Faktoren x auf die letzte Stelle bringen. Dann nimmt das Produkt die Form $ABRx$ an, in welcher A und B Produkte sind, die den Punkt x nur einmal als Faktor enthalten, und wo R eine Reihe konstanter Faktoren ist, welche fortschreitend verknüpft werden sollen.

Bezeichnet man durch R' die umgekehrte Reihe von Faktoren, so kann man, nach den am angeführten Orte entwickelten Gesetzen der stereometrischen Multiplikation, statt des Produkts $ABRx$ auch $AB(xR')$ setzen, und das Produkt besteht nun aus drei Faktoren, deren jeder den Punkt x einmal als Faktor enthält.

Da das Produkt von nullter Stufe sein soll, so muss die Summe der drei Stufenzahlen der Faktoren durch vier theilbar sein; und da jede Stufenzahl grösser als Null und kleiner als vier ist, so kann die Summe derselben nur entweder vier oder acht sein. Im ersten Falle sind die Stufenzahlen 1, 1, 2, im zweiten 3, 3, 2. In beiden Fällen ist einer der drei variablen Faktoren von zweiter Stufe. Dieser Faktor zweiter Stufe kann entweder ein Produkt zweier Punkte oder ein Produkt zweier Ebenen sein; und zwar muss von den Faktoren des Produkts, da dasselbe x nur einmal enthält, der eine konstant, der andere variabel sein.

Bringt man den konstanten Faktor auf die letzte Stelle des † Produkts, so erhält man folgende vier Schemata: 48

$$1\,1\,1\,1, \quad 1\,1\,3\,3, \quad 3\,3\,1\,1, \quad 3\,3\,3\,3,$$

wo in jedem Schema die drei ersten Ziffern der Reihe nach die Stufenzahlen der drei variablen Faktoren, wie sie bei der letzten Umgestaltung hervorgingen, bezeichnen, während die letzte Ziffer die Stufenzahl des konstanten Faktors ist. Es ergeben sich demnach folgende vier Gleichungsformen:

$$prsa = 0, \quad pr\sigma\alpha = 0, \quad \varpi\varrho sa = 0, \quad \varpi\varrho\sigma\alpha = 0,$$

wo p, r, s variable Punkte, ϖ, ϱ, σ variable Ebenen sind, a ein konstanter Punkt, α eine konstante Ebene ist, und wo jedes der variablen Elemente ein Produkt ist, welches x nur einmal und zwar verbunden mit einer Reihe fester Elemente enthält.

Nun habe ich gezeigt (siehe Abh. X § 3 {hier S. 161}), dass man, wenn x mit einer Reihe fester Elemente multiplicirt ist und das Produkt einen Punkt oder eine Ebene giebt, statt jener Reihe entweder eine Reihe abwechselnder fester Punkte und Ebenen, die mit einem Punkt beginnt und mit einer Ebene schliesst, oder eine Reihe fester Geraden setzen kann; und zwar in dem Sinne, dass die substituirte Reihe bei jedem beliebigen x dasselbe Produkt giebt wie die ursprüngliche. Die Reihe der festen Geraden, mit dem Punkte x fortschreitend verbunden, giebt eine Ebene oder einen Punkt, je nachdem die Anzahl der Geraden ungerade oder gerade ist; wohingegen die Reihe der abwechselnden Punkte und Ebenen, da sie mit einem Punkt beginnt und mit einer Ebene schliesst, stets wieder einen Punkt als Produkt liefert. Ist nun $\mathfrak{R}$ (oder $\mathfrak{R}_1$ oder $\mathfrak{R}_2$) eine Reihe fester Elemente, deren Stufenzahlen eine durch vier theilbare Summe haben, und zwar entweder eine Reihe abwechselnder Punkte und Ebenen, die mit einem Punkte beginnt und mit einer Ebene schliesst, oder eine Reihe gerader Linien, deren Anzahl gerade ist, und bedeutet $x\mathfrak{R}$, dass das Element x fort-

schreitend mit den Elementen der Reihe $\mathfrak{R}$ multiplicirt werden soll, so lässt sich jede der Grössen p, r, s in der Form $x\mathfrak{R}$ darstellen und jede der Grössen ϖ, ϱ, σ in der Form $x\mathfrak{R}A$, wo A eine Gerade ist und daher auch $\mathfrak{R}$ eine Reihe von Geraden bezeichnet. Setzt man

$$p \equiv x\mathfrak{R}, \quad r \equiv x\mathfrak{R}_1, \quad s \equiv x\mathfrak{R}_2,$$
$$\varpi \equiv x\mathfrak{R}A, \quad \varrho \equiv x\mathfrak{R}_1 A_1, \quad \sigma \equiv x\mathfrak{R}_2 A_2,$$

so ergeben sich die vier Gleichungsformen

$$(1) \qquad x\mathfrak{R}(x\mathfrak{R}_1)(x\mathfrak{R}_2)a = 0,$$
$$(2) \qquad x\mathfrak{R}A(x\mathfrak{R}_1 A_1)(x\mathfrak{R}_2 A_2)\alpha = 0,$$
$$(3) \qquad x\mathfrak{R}(x\mathfrak{R}_1)(x\mathfrak{R}_2 A_2)\alpha = 0,$$
$$(4) \qquad x\mathfrak{R}A(x\mathfrak{R}_1 A_1)(x\mathfrak{R}_2)a = 0.$$

49 Hierbei muss man wohl merken, dass die Reihen $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$, da die Stufenzahlen ihrer Faktoren jedesmal eine durch vier theilbare Summe geben, die Stufenzahl der Grösse, mit der sie verbunden sind, unverändert lassen; dass sie ferner überall, wo zu ihnen keine feste Gerade mehr hinzutritt, sowohl Reihen abwechselnder fester Punkte und Ebenen als auch Reihen fester Geraden darstellen können; dass sie hingegen, wo noch eine feste Gerade hinzutritt, jedesmal Reihen fester Geraden darstellen sollen. Die beiden ersten Gleichungen, in Worte gefasst, geben folgende Sätze:

1. Wenn ein Punkt x Anfangspunkt dreier offener Figuren ist und die Ebene, welche die Endecken derselben verbindet, durch einen festen Punkt (a) geht, während in jeder offenen Figur entweder die Seiten durch feste Punkte gehen und die Ecken in festen Ebenen liegen oder aber die Seiten und Ecken von festen Geraden getroffen werden, so beschreibt der Anfangspunkt x eine *Oberfläche dritter Ordnung.*

2. Wenn ein Punkt x Anfangspunkt dreier offener Figuren ist, deren drei Endseiten sich in einem und demselben Punkte einer festen Ebene (α) begegnen, und alle Ecken und Seiten der drei offenen Figuren von festen Geraden getroffen werden, so beschreibt der Anfangspunkt x eine *Oberfläche dritter Ordnung.*

Bestehen insbesondere die Reihen in Formel (1) nur aus je einem Punkt und einer Ebene, in Formel (2) aus je zwei Geraden, so erhält man folgende Specialsätze:

Wenn die Grundfläche eines veränderlichen Tetraeders und die an der Spitze liegenden Kanten desselben durch feste Punkte gehen, während die Ecken der Grundfläche in festen Ebenen liegen, so beschreibt die Spitze des Tetraeders eine Oberfläche dritter Ordnung.

Wenn von den beiden Spitzen einer dreiseitigen Doppelpyramide

die eine in einer festen Ebene liegt, während die an den Spitzen liegenden Kanten sowie die Ecken der gemeinschaftlichen Grundfläche von festen Geraden getroffen werden, so beschreibt die andere Spitze eine Oberfläche dritter Ordnung.

Da wir die vier aufgestellten Gleichungsformen auf die beiden ersten reduciren werden, so ist es nicht nöthig, auch die beiden unsymmetrischeren Gleichungsformen (3) und (4) in Worte zu fassen.

§ 2. 50

Reduktion der vier Gleichungsformen auf die ersten beiden Formen.

Bezeichnet man in der Gleichung (3) die Gerade $x\mathfrak{R}(x\mathfrak{R}_1)$ mit Y und den Punkt $x\mathfrak{R}_2$ mit r, so nimmt die Gleichung die Form an:

$$Y(rA_2)\alpha = 0.$$

In dem Produkte $Y(rA_2)\alpha$ kann man (siehe Stereom. Mult. § 5 {hier S. 151}), da es von nullter Stufe ist und aus drei Faktoren besteht, die letzten beiden in Klammern schliessen und erhält:

$$0 = Y(rA_2\alpha).$$

Nun sei a der Punkt, in welchem die Gerade A_2 die Ebene α schneidet, und a_2 irgend ein von a verschiedener Punkt in A_2, also $A_2 \equiv a_2 a$. Dann wird

$$rA_2\alpha \equiv ra_2 a\alpha.$$

Da der Faktor a in α liegt, so kann man (siehe Stereom. Mult. § 4 {hier S. 150}) diese beiden Faktoren vertauschen und erhält

$$rA_2\alpha \equiv ra_2\alpha a,$$

also:

$$0 = Y(ra_2\alpha a).$$

Hier lässt sich wieder a, als letzter Faktor, aus der Klammer herausrücken, und man erhält:

$$0 = Y(ra_2\alpha)a.$$

Da endlich $ra_2\alpha$ einen Punkt darstellt, welcher aus x durch Multiplikation mit einer Reihe fester Elemente hervorgegangen ist, so kann man ihn in der Form $x\mathfrak{R}_n$ darstellen. Substituirt man dies und setzt zugleich statt Y seinen Werth, so erhält man die Gleichungsform (1).

In der Gleichung (4) wollen wir

$$x\mathfrak{R} \equiv p, \quad x\mathfrak{R}_1 \equiv p_1, \quad x\mathfrak{R}_2 \equiv p_2$$

setzen; dann giebt dieselbe:

$$pA(p_1A_1)p_2 a = 0.$$

Es wird hier zu unterscheiden sein, ob sich die Geraden A und A_1 schneiden oder nicht.

Angenommen zuerst, sie schneiden sich nicht, so drückt $pA(p_1A_1)$ die Durchschnittslinie der beiden Ebenen pA und p_1A_1 aus, die ich mit Y bezeichnen will, so dass

$$Y \equiv pA(p_1A_1) \quad \text{und} \quad Yp_2a = 0$$

ist. Es genügt, zwei Punkte dieser Geraden Y zu kennen.

Es ist klar, dass der Punkt pAA_1, das heisst der Punkt, in wel- 51 chem die Ebene pA die Gerade A_1 † schneidet, sowohl in der Ebene pA als auch in p_1A_1 liegt, also auch in der Durchschnittslinie Y beider Ebenen. Dasselbe gilt von dem Punkte p_1A_1A. Beide Punkte sind, da der eine in A_1, der andere in A liegt und A und A_1 keinen Punkt gemein haben, von einander verschieden; also ist Y ihrem Produkte kongruent, mithin

$$Y \equiv pAA_1(p_1A_1A).$$

Setzt man diesen Werth in die Gleichung $Yp_2a = 0$ und giebt dann dem pAA_1, was einen Punkt darstellt, die Form $x\mathfrak{R}$ und dem p_1A_1A die Form $x\mathfrak{R}_1$, so erhält man:

$$x\mathfrak{R}(x\mathfrak{R}_1)(x\mathfrak{R}_2)a = 0;$$

was die Form (1) ist.

Angenommen, zweitens, A und A_1 schneiden sich in einem Punkte c. Dann sei $A \equiv cb$, $A_1 \equiv cb_1$, und man erhält

$$pcb(p_1cb_1)p_2a = 0.$$

Das Produkt $pcb(p_1cb_1)$ stellt die Durchschnittskante der beiden Ebenen pcb und p_1cb_1 dar, also eine durch c gehende Linie. Sie werde gleich sc gesetzt, also

$$sc \equiv pcb(p_1cb_1), \quad scp_2a = 0.$$

Es sei nun α irgend eine konstante Ebene, die jedoch nicht durch c geht, so lassen sich, da dann $c\alpha$ nicht Null ist, zu dem Produkte nullter Stufe scp_2a noch die Faktoren c und α hinzufügen; also wird

$$scp_2a \equiv scp_2a \,.\, c\alpha.$$

Hier kann man in dem Produkt der vier Punkte scp_2a die beiden ersten und die beiden letzten Faktoren zusammenschliessen, indem man $(sc)(p_2a)$ schreibt. Tritt nun hier noch der Faktor c hinzu, so liegt derselbe in dem ersten Faktor sc; folglich kann man (siehe Stereom. Mult. § 4 {hier S. 150}) c mit dem zweiten Faktor p_2a zusammenschliessen und erhält

$$scp_2a \equiv sc(p_2ac)\alpha,$$

also, indem man statt sc seinen Werth setzt:

$$0 = pcb(p_1cb_1)(p_2ac)\alpha,$$

welche Gleichung die Form (2) hat. Demnach haben wir alle stereometrischen Gleichungen dritten Grades auf die Formen (1) und (2) reducirt.

§ 3.

52

Lineale Konstruktion der Oberflächen dritter Ordnung.

Die durch stereometrische Gleichungen dritten Grades dargestellten Oberflächen lassen sich *lineal konstruiren;* das heisst, es lässt sich mittels des einzigen Postulates „Drei Punkte durch eine Ebene zu verbinden" jeder Punkt einer solchen Oberfläche konstruiren.

In der That, sei in der Formel (1) das Produkt

(a) $$x\mathfrak{R}(x\mathfrak{R}_1)(x\mathfrak{R}_2) \equiv \varphi$$

gesetzt, so verwandelt sich die Formel (1) in

(b) $$\varphi a = 0.$$

Setzt man noch die Punkte $x\mathfrak{R}$, $x\mathfrak{R}_1$, $x\mathfrak{R}_2$ beziehlich p, p_1, p_2, so wandelt sich die Kongruenz (a) in $pp_1p_2 \equiv \varphi$. Multiplicirt man dieselbe auf beiden Seiten mit p, so erhält man, da $pp_1p_2p = 0$ ist, $0 = p\varphi$, das heisst $0 = x\mathfrak{R}\varphi$. Es ergiebt sich auf die Weise:

(c) $$0 = x\mathfrak{R}\varphi = x\mathfrak{R}_1\varphi = x\mathfrak{R}_2\varphi.$$

Diese Gleichungen lassen sich (siehe Stereom. Mult. § 5 {hier S. 152}) umkehren, und man erhält:

(d) $$0 = \varphi\mathfrak{R}'x = \varphi\mathfrak{R}_1'x = \varphi\mathfrak{R}_2'x,$$

wenn nämlich $\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{R}_1'$, $\mathfrak{R}_2'$ die durch Umkehrung aus $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$ hervorgehenden Faktorenreihen sind.

Diese Gleichungen führen nun unmittelbar zu der gesuchten Konstruktion.

In der That, sei φ eine beliebige durch den Punkt a gelegte Ebene, und es seien die Ebenen $\varphi\mathfrak{R}'$, $\varphi\mathfrak{R}_1'$, $\varphi\mathfrak{R}_2'$ konstruirt, so ist der Durchschnittspunkt dieser drei Ebenen oder, falls sie mehrere Punkte gemein haben, jeder den drei Ebenen gemeinschaftliche Punkt x ein Punkt der Oberfläche dritter Ordnung. In der That: ist x den drei Ebenen gemein, so genügt x den Gleichungen (d), also auch den umgekehrten (c), und mithin liegen die Punkte p, p_1, p_2 in φ; das heisst, wenn nicht $p \cdot p_1 \cdot p_2$ Null ist, so ist $\varphi \equiv pp_1p_2$. Man erhält also, da φ durch a geht, in allen Fällen:

$$pp_1p_2a = 0$$

das heisst

$$x\mathfrak{R}(x\mathfrak{R}_1)(x\mathfrak{R}_2)a = 0;$$

das heisst: x ist ein Punkt der Oberfläche. Jeder durch a gelegten Ebene entspricht also, wenn $\varphi\mathfrak{R}' . \varphi\mathfrak{R}_1' . \varphi\mathfrak{R}_2'$ nicht Null ist, *ein bestimmter*, lineal konstruirbarer Punkt der Oberfläche, und wenn jenes Produkt Null wird, so entspricht der Ebene φ die Gesamtheit der in
53 einer Geraden (der Durchschnittslinie der † drei Ebenen) liegenden Punkte, oder, falls die drei Ebenen zusammenfallen, entsprechen ihr die sämtlichen Punkte dieser Ebene, und jene Gerade oder diese Ebene liegen dann ganz in der Oberfläche.

Umgekehrt giebt es zu jedem Punkte x der Oberfläche mindestens eine Ebene φ, aus welcher er sich lineal konstruiren lässt. Denn vermöge der Gleichung der Oberfläche $pp_1p_2a = 0$ lässt sich stets für jedes x, was dieser Gleichung genügt, durch die Punkte p, p_1, p_2, a mindestens eine Ebene legen. Wird dieselbe mit φ bezeichnet, so sind $p\varphi$, $p_1\varphi$, $p_2\varphi$ gleich Null, also auch $\varphi\mathfrak{R}'x$, $\varphi\mathfrak{R}_1'x$, $\varphi\mathfrak{R}_2'x$; das heisst: der Punkt x wird aus der angenommenen Hülfsebene φ konstruirt.

Hierdurch ist also die lineale Konstruirbarkeit der Oberfläche dritter Ordnung völlig dargethan.

Man betrachte die Gleichung (2)

$$x\mathfrak{R}A\,(x\mathfrak{R}_1A_1)\,(x\mathfrak{R}_2A_2)\,\alpha = 0, \tag{2}$$

und es sei

$$\text{(a)}\quad \begin{cases} & x\mathfrak{R}A \equiv \varpi, \quad x\mathfrak{R}_1A_1 \equiv \varpi_1, \quad x\mathfrak{R}_2A_2 \equiv \varpi_2 \\ \text{und} & \\ & \varpi\varpi_1\varpi_2 \equiv y. \end{cases}$$

Dann verwandelt sich die Gleichung (2) in

$$y\alpha = 0. \tag{b}$$

Multiplicirt man die Kongruenz (a) auf beiden Seiten nach und nach mit ϖ, ϖ_1, ϖ_2, so ergiebt sich:

$$\text{(c)}\quad \begin{cases} 0 = \varpi y = \varpi_1 y = \varpi_2 y, \text{ das heisst} \\ 0 = x\mathfrak{R}Ay = x\mathfrak{R}_1A_1y = x\mathfrak{R}_2A_2y, \end{cases}$$

also auch umgekehrt:

$$0 = yA\mathfrak{R}'x = yA_1\mathfrak{R}_1'x = yA_2\mathfrak{R}_2'x,$$

wo wiederum $\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{R}_1'$, $\mathfrak{R}_2'$ aus $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$ durch Umkehrung hervorgehen.

Es sei also y ein beliebiger Punkt in der Ebene α, und die Ebenen $yA\mathfrak{R}'$, $yA_1\mathfrak{R}_1'$, $yA_2\mathfrak{R}_2'$ seien konstruirt, so ist jeder Punkt x, welcher in diesen drei Ebenen liegt, ein Punkt der durch die Gleichung (2) dargestellten Oberfläche. Umgekehrt: wenn x ein Punkt jener Oberfläche ist, so ist für ein solches x das Produkt $\varpi\varpi_1\varpi_2\alpha = 0$. Es haben also die vier Ebenen ϖ, ϖ_1, ϖ_2, α mindestens einen Punkt gemein. Derselbe sei y; dann sind ϖy, $\varpi_1 y$, $\varpi_2 y$ gleich Null, also

auch $yA\mathfrak{R}'x$, $yA_1\mathfrak{R}_1'x$, $yA_2\mathfrak{R}_2''x$ sind Null, das heisst x liegt in den drei Ebenen $yA\mathfrak{R}'$, $yA_1\mathfrak{R}_1'$, $yA_2\mathfrak{R}_2''$. Also lässt sich jeder Punkt x der Oberfläche aus einem Punkt y der Ebene α auf die angegebene Weise lineal konstruiren; und umgekehrt liefert jeder in der Ebene α 54 liegende Punkt y mittels der angegebenen Konstruktion einen Punkt der Oberfläche.

Es ist also die lineale Konstruirbarkeit aller durch stereometrische Gleichungen dritten Grades dargestellten Oberflächen nachgewiesen und die Konstruktion angegeben.

§ 4.

Projektivische Beziehung zwischen Ebenen und räumlichen Strahlenbüscheln.

Bei den stereometrischen Gleichungen *zweiten* Grades liess sich alles auf die fortschreitende Multiplikation mit einer Reihe von Geraden zurückführen. Es traten daher nur punktirte Gerade und Ebenenbüschel erster Stufe, überhaupt nur Gebilde erster Stufe hervor. Bei der stereometrischen Gleichung *dritten* Grades tritt zum ersten Male der veränderliche Punkt mit einer Reihe von Punkten und Ebenen so in Verbindung, dass Gebilde zweiter Stufe sich ergeben.

Verfolgt man fortschreitend das Produkt $xa\alpha b\beta\ldots$, so stellt xa einen räumlichen Strahlenbüschel mit dem Mittelpunkt a dar, $xa\alpha$ eine punktirte Ebene, welche mit jenem Strahlenbüschel perspektivisch ist, $xa\alpha b$ einen räumlichen Strahlenbüschel mit dem Mittelpunkt b, welcher mit dem ersten Strahlenbüschel perspektivisch ist, indem die punktirte Ebene α ihren perspektivischen Durchschnitt darstellt; $xa\alpha b\beta$ ist eine punktirte Ebene, welche mit der punktirten Ebene α perspektivisch und mit xa projektivisch ist. So wird man überhaupt je zwei dieser Gebilde (räumliche Strahlenbüschel und punktirte Ebenen) zu einander projektivisch nennen können, wenn man eins aus dem andern durch Multiplikation mit einer Reihe abwechselnder fester Punkte und Ebenen ableiten kann. Doch setzen wir stets voraus, dass keins der aufeinander folgenden festen Elemente mit einem Nachbarelemente vereinigt liegen darf (also der Punkt nicht in der vorhergehenden oder folgenden Ebene). Es leuchtet ein, dass diese Beziehung gegenseitig ist; so zum Beispiel, wenn aus xa das Gebilde $xa\alpha b\beta c \equiv yc$ abgeleitet ist, so geht das ursprüngliche Gebilde durch die rückgängige Kombination hervor, nämlich $xa \equiv yc\beta b\alpha a$. Analytisch betrachtet beruht die Gegenseitigkeit auf dem Gesetze, dass $AB\Gamma B \equiv AB$ ist, wenn die Stufenzahlen von Γ und B zusammen vier betragen und diese beiden Elemente nicht vereinigt liegen. Aus diesem Gesetze nämlich, welches

früher (Stereom. Mult. § 4 {hier S. 150}) nachgewiesen wurde, folgt sogleich durch wiederholte Anwendung:

$$ABB_1 \ldots B_n \Gamma B_n \ldots B_1 B \equiv AB,$$

55 wenn die Stufenzahlen je zweier aufeinander folgender Faktoren $B, B_1, \ldots B_n, \Gamma$ zusammen vier betragen. Hierin liegt dann unmittelbar die Gegenseitigkeit der Projektivität.

Betrachtet man nun zwei projektivische punktirte Ebenen, so ist klar, dass dreien Punkten der einen Ebene, welche in gerader Linie liegen, auch drei in gerader Linie liegende Punkte der andern entsprechen. Denn dreien in gerader Linie liegenden Punkten einer Ebene werden in dem perspektivischen Strahlenbüschel drei in einer und derselben Ebene liegende Strahlen entsprechen und diesen wiederum in der mit jedem Strahlenbüschel perspektivischen Ebene drei in gerader Linie liegende Punkte; und so fort. Es sind also die projektivischen Ebenen zugleich einander kollinear. Sind daher vier Punkte in der einen Ebene, von denen jedoch keine drei in gerader Linie liegen, vier derselben Bedingung unterworfenen Punkten der andern entsprechend, so ist dadurch nothwendig zu jedem fünften Punkte der einen Ebene der entsprechende der andern bestimmt.

Der Beweis dafür, dass man auch in der That vier beliebige Punkte in einer Ebene (von denen jedoch keine drei in gerader Linie liegen) vier solchen in einer andern projektivisch entsprechend setzen könne, ergiebt sich aus der Lösung der Aufgabe: Vier beliebige Punkte einer Ebene α (von denen keine drei in gerader Linie liegen) aus vier beliebigen (derselben Bedingung unterworfenen) Punkten einer andern Ebene α_1 durch Multiplikation mit einer Reihe abwechselnder fester Punkte und Ebenen abzuleiten.

Es seien a, b, c, d die vier Punkte in α und a_1, b_1, c_1, d_1 die in α_1. Verbindet man zwei entsprechende Punkte a und a_1 durch eine Gerade und nimmt in ihr einen beliebigen Punkt k_2 an, der jedoch nicht mit a_1 zusammenfällt, legt dann durch a eine beliebige Ebene α_2, die jedoch nicht mit α zusammenfällt, und multiplicirt die Punkte a_1, b_1, c_1, d_1 fortschreitend mit k_2 und α_2, so erhält man vier Punkte a_2, b_2, c_2, d_2, von denen a_2 mit a zusammenfällt. Jetzt ziehe man die Geraden ab und cd und nenne ihren Durchschnittspunkt e, ziehe dann die entsprechenden Geraden a_2b_2 und c_2d_2 und nenne ihren Durchschnittspunkt e_2. Da nun ab und a_2b_2 sich in a schneiden, also in einer und derselben Ebene liegen, so werden auch die Geraden bb_2 und ee_2 sich schneiden. Ihr Durchschnittspunkt sei k_3. Jetzt lege man durch ab eine beliebige Ebene α_3, welche jedoch nicht mit α

zusammenfällt, und multiplicire die Punkte a_2, b_2, c_2, d_2, e_2 fortschreitend mit k_3 und α_3, so erhält man fünf Punkte a_3, b_3, c_3, d_3, e_3, von denen drei in gerader Linie † liegende, nämlich a_3, b_3, e_3, mit 56 den entsprechenden Punkten a, b, e zusammenfallen und von denen auch die Punkte c_3, d_3, e_3 in gerader Linie liegen, weil die entsprechenden c_2, d_2, e_2 in gerader Linie lagen. Nun ziehe man endlich die Geraden cc_3, dd_3. Dieselben werden sich, da sich die Geraden cde und $c_3d_3e_3$ in dem Punkte $e = e_3$ schneiden, gleichfalls schneiden müssen; ihr Durchschnitt sei k_4. Multiplicirt man nun die Punkte a_3, b_3, c_3, d_3 fortschreitend mit k_4 und α, so fallen die so hervorgehenden vier Punkte mit a, b, c, d zusammen. Also ist

$$a, b, c, d = (a_1, b_1, c_1, d_1)\, k_2\alpha_2 k_3\alpha_3 k_4\alpha.$$

Es lässt sich sagen, dass nach dieser Formel die Punkte a, b, c, d aus a_1, b_1, c_1, d_1 durch dreimalige Projektion hervorgehen, indem die Punkte zuerst durch den Punkt k_2 auf die Ebene α_2 projicirt sind, dann die so hervorgegangenen Projektionen durch den Punkt k_3 auf die Ebene α_3, und dass diese Projektionen schliesslich durch k_4 auf α projicirt sind. Dann ergeben sich aus der vorstehenden Auflösung und durch Reciprocität folgende Sätze:

1. Vier beliebige Punkte einer Ebene, von denen keine drei in gerader Linie liegen, lassen sich aus beliebigen vier derselben Bedingung unterworfenen Punkten einer andern Ebene durch *dreimalige* Projektion ableiten.

2. Wenn insbesondere ein Punkt der einen Gruppe mit dem entsprechenden der andern zusammenfällt, so lassen sich die Punkte der einen Gruppe aus denen der andern durch *zweimalige* Projektion ableiten.

3. Wenn endlich zwei der ersten vier Punkte mit zweien entsprechenden der andern zusammenfallen und die geraden Linien, welche die beiden übrig bleibenden Punkte jeder Gruppe verbinden, sich schneiden, so lassen sich die einen vier Punkte aus den andern durch *einmalige* Projektion ableiten.

4. Vier beliebige, durch einen Punkt gehende Ebenen, von denen keine drei dieselbe Kante gemein haben, lassen sich aus beliebigen vier, derselben Bedingung unterworfenen Ebenen durch *dreimalige* Projektion ableiten [wobei ich den Ausdruck Projektion auch auf die reciproke Ableitungsweise übertrage].

5. Wenn dabei ein Paar entsprechender Ebenen zusammenfällt, so lassen sich die einen aus den andern durch *zweimalige* Projektion ableiten.

6. Wenn dabei zwei Paare entsprechender Ebenen zusammenfallen und die Durchschnittskanten, in welchen sich die beiden übrig bleibenden

Ebenen jeder Gruppe schneiden, in einem Punkte sich begegnen, so lassen sich die einen vier Ebenen aus den andern durch *einmalige* Projektion ableiten.

57 7. In zwei Ebenen, welche projektivisch sein sollen, lassen sich beliebige vier Punkte der einen beliebigen vier Punkten der andern, vorausgesetzt, dass keine drei Punkte einer Gruppe in gerader Linie liegen, entsprechend setzen. Dann aber ist zu jedem fünften Punkte der einen Ebene der entsprechende der andern bestimmt. Dasselbe gilt, wenn man statt der vier Punkte in beiden Ebenen vier Gerade setzt, von welchen keine drei durch denselben Punkt gehen.

8. Bei zwei Punkten, welche die Mittelpunkte von projektivischen räumlichen Strahlenbüscheln werden sollen, lassen sich beliebige vier durch den einen Punkt gehende Ebenen, von denen keine drei eine und dieselbe Kante gemein haben, beliebigen vier derselben Bedingung unterworfenen Ebenen, die durch den andern Punkt gehen, entsprechend setzen; dann aber ist zu jeder fünften Ebene des einen Büschels die entsprechende des andern bestimmt. Dasselbe gilt, wenn man statt der vier Ebenen durch jeden der beiden Punkte vier Strahlen setzt, von denen keine drei in einer und derselben Ebene liegen.

9. Zwei projektivische punktirte Ebenen lassen sich stets durch dreimalige Projektion aus einander ableiten. Haben sie insbesondere einen selbstentsprechenden Punkt, so lassen sie sich durch zweimalige Projektion aus einander ableiten; und wenn in der Durchschnittslinie der beiden Ebenen drei selbstentsprechende Punkte liegen, durch einmalige Projektion.

10. Umgekehrt: Wenn sich zwei projektivische Ebenen aus einander durch einmalige Projektion ableiten lassen, so ist in der Durchschnittslinie beider Ebenen jeder Punkt ein selbstentsprechender. Wenn sie sich durch zweimalige Projektion ableiten lassen, so haben sie einen selbstentsprechenden Punkt (nämlich den Punkt, welchen die beiden Ebenen mit der Projektionsebene gemein haben).

11. Zwei projektivische {räumliche} Strahlenbüschel lassen sich stets durch dreimalige Projektion aus einander ableiten. Haben sie insbesondere eine selbstentsprechende Ebene, so lassen sie sich durch zweimalige Projektion aus einander ableiten, und, wenn durch die Verbindungslinie der beiden Mittelpunkte drei selbstentsprechende Ebenen gehen, durch einmalige Projektion.

12. Umgekehrt: Wenn sich zwei projektivische {räumliche} Strahlenbüschel aus einander durch einmalige Projektion ableiten lassen, so ist jede durch die Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte gehende Ebene eine selbstentsprechende. Wenn sie sich durch zweimalige Projektion aus

einander ableiten lassen, so haben sie eine selbstentsprechende Ebene (nämlich die Ebene, welche durch die beiden Mittelpunkte und den Projektionspunkt geht).

Noch ergeben sich leicht die folgenden Sätze, welche zur Veranschaulichung der projektivischen Beziehungen nothwendig sind. 58

13. In je zwei projektivischen Ebenen (α und α_1) giebt es mindestens *ein* Paar entsprechender Geraden, welche sich schneiden. (Es giebt deren im allgemeinen mehrere; und zwar bilden in jeder Ebene die Geraden, die von den entsprechenden Geraden getroffen werden, die Tangenten eines Kegelschnitts.)

Beweis: Denn es lassen sich beide nach dem Satze Nr. 9 durch *dreimalige* Projektion aus einander ableiten. Legt man nun durch die drei Projektionspunkte eine Ebene α_4, welche die Ebenen α und α_1 beziehlich in A und A_1 schneidet, so sind A und A_1 entsprechende Geraden. Denn die fortschreitenden Projektionen der Geraden A_1 bleiben stets in der Ebene α_4; also liegt auch die der Geraden A_1 entsprechende in dieser Ebene, mithin im Durchschnitt von α_4 und α, das heisst, ist identisch mit A.

14. Wenn sich zwei projektivische Ebenen (α und α_1) durch *zweimalige* Projektion aus einander ableiten lassen, so giebt es eine Gerade von der Art, dass alle durch sie gelegte Ebenen die beiden Ebenen α und α_1 in entsprechenden Geraden schneiden; und zwar ist jene Gerade die Verbindungslinie der beiden Projektionspunkte.

15. Wenn sich zwei projektivische Ebenen durch *einmalige* Projektion aus einander ableiten lassen, so schneiden sich je zwei entsprechende Geraden beider Ebenen; und die Ebenen, welche zwei entsprechende Geraden verbinden, gehen alle durch denselben Punkt, nämlich durch den Projektionspunkt.

Und ebenso reciprok:

16. Je zwei projektivische {räumliche} Strahlenbüschel haben mindestens *ein* Paar entsprechender Strahlen, welche sich schneiden.

17. Wenn sich zwei projektivische {räumliche} Strahlenbüschel durch zweimalige Projektion aus einander ableiten lassen, so giebt es eine Gerade, deren sämtliche Punkte Vereinigungspunkte entsprechender Strahlen sind; und zwar ist diese Gerade die Durchschnittslinie der beiden Projektionsebenen.

18. Wenn sich zwei projektivische {räumliche} Strahlenbüschel durch einmalige Projektion aus einander ableiten lassen, so begegnen sich je zwei entsprechende Strahlen in der Projektionsebene.

Die aufgestellten Beziehungen werden für die projektivische Deutung der Gleichungen dritten Grades genügen. Da diese Beziehungen,

so viel ich weiss, bisher nirgends im Zusammenhange dargestellt sind, so glaubte ich, der Deutlichkeit wegen, sie hier zusammenstellen zu müssen.

59

§ 5.

Die Oberfläche dritter Ordnung als Durchschnitt dreier projektivischer Büschel.

Nimmt man an, dass x in der Gleichung dritten Grades stets mit einer Reihe abwechselnder fester Punkte und Ebenen multiplicirt sei, so erhält man eine Gleichung von der Form

$$x\mathfrak{R}(x\mathfrak{R}_1)(x\mathfrak{R}_2)a = 0, \tag{1}$$

wo $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$ Reihen abwechselnder fester Punkte und Ebenen sind.

Wir haben gezeigt, dass jeder Punkt x, welcher dieser Gleichung genügt, sich mittels einer durch den Punkt a gelegten Hülfsebene φ als Durchschnitt der drei Ebenen $\varphi\mathfrak{R}'$, $\varphi\mathfrak{R}_1'$, $\varphi\mathfrak{R}_2'$ konstruiren lässt, indem nämlich $\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{R}_1'$, $\mathfrak{R}_2'$ durch Umkehrung der Reihen $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$ hervorgehen. Ferner wurde gezeigt, dass, wie auch die Hülfsebene φ durch den Punkt a gelegt werden mag, stets der Durchnittspunkt jener drei Ebenen oder allgemeiner jeder den drei Ebenen gemeinsame Punkt {der Gleichung} (1) genügt. Nun stellt die Gesamtheit der durch den Punkt a gehenden Ebenen φ einen Ebenenbüschel zweiter Stufe {dar}, und ihre Durchschnittslinien stellen einen räumlichen Strahlenbüschel dar. Aus diesem Ebenenbüschel geht das System der Ebenen $\varphi\mathfrak{R}'$ durch fortschreitende Multiplikation mit einer Reihe abwechselnder fester Ebenen und Punkte, also durch fortschreitende Projektion hervor. Das hervorgehende Gebilde ist ein Ebenenbüschel zweiter Stufe, aus welchem also (nach dem vorhergehenden Paragraph) der ursprüngliche Ebenenbüschel wiederum durch Projektion abgeleitet werden kann. Die Beziehung ist also eine gegenseitige, das heisst: beide Büschel sind zu einander projektivisch. Demnach sind die drei Ebenenbüschel $\varphi\mathfrak{R}'$, $\varphi\mathfrak{R}_1'$, $\varphi\mathfrak{R}_2'$ dem Ebenenbüschel φa projektivisch, also auch untereinander, und wir haben folgenden Satz:

Der Durchschnitt dreier projektivischer Ebenenbüschel zweiter Stufe ist eine Oberfläche dritter Ordnung.

Oder, anders ausgedrückt:

Die gesamten Durchschnittspunkte je dreier entsprechender Ebenen dreier projektivischer Strahlenbüschel bilden eine Oberfläche dritter Ordnung.

Sucht man, umgekehrt, wenn drei projektivische Ebenenbüschel zweiter Stufe gegeben sind, die möglichst einfache Gleichung ihres Durchschnitts, so kann man auf den Satz zurückgehen, dass zwei solche Büschel sich stets durch dreimalige Projektion aus einander

ableiten lassen. Es seien a, a_1, a_2 die † Mittelpunkte der drei Ebenenbüschel und φ, φ_1, φ_2 entsprechende Ebenen derselben. Da sich nun aus einem Ebenenbüschel (φ) jeder damit projektivische Büschel (φ_1, φ_2) durch dreimalige Projektion, also durch fortschreitende Multiplikation mit drei Paaren von Ebenen und Punkten ableiten lässt, so folgt, dass sich φ_1 und φ_2 in den folgenden Formen ausdrücken lassen: 60

$$\varphi_1 \equiv \varphi\gamma c\beta b\alpha a_1, \quad \varphi_2 \equiv \varphi\gamma_1 c_1\beta_1 b_1\alpha_1 a_2.$$

Also wenn x der Durchschnitt der drei entsprechenden Ebenen φ, φ_1, φ_2 ist, so ist

$$x \equiv \varphi\varphi_1\varphi_2 \equiv \varphi(\varphi\gamma c\beta b\alpha a_1)(\varphi\gamma_1 c_1\beta_1 b_1\alpha_1 a_2).$$

Ist x der Durchschnitt der drei Ebenen φ, φ_1, φ_2 oder allgemeiner (auch wenn die drei Ebenen eine Kante gemein haben oder zusammenfallen) ein Punkt, der in allen dreien zugleich liegt, so hat man:

$$0 = \varphi x, \quad 0 = \varphi_1 x = \varphi\gamma c\beta b\alpha a_1 x, \quad 0 = \varphi_2 x = \varphi\gamma_1 c_1\beta_1 b_1\alpha_1 a_2 x$$

oder umgekehrt:

$$x\varphi = 0, \quad x a_1\alpha b\beta c\gamma\varphi = 0, \quad x a_2\alpha_1 b_1\beta_1 c_1\gamma_1\varphi = 0,$$

also, da die drei Punkte x, $xa_1\alpha b\beta c\gamma$, $xa_2\alpha_1 b_1\beta_1 c_1\gamma_1$ in φ liegen:

$$\varphi \equiv x(xa_1\alpha b\beta c\gamma)(xa_2\alpha_1 b_1\beta_1 c_1\gamma_1).$$

Die Ebene φ geht aber durch a, also hat man

$$0 = \varphi a = x(xa_1\alpha b\beta c\gamma)(xa_2\alpha_1 b_1\beta_1 c_1\gamma_1)a.$$

Dies ist die gesuchte Gleichung, durch welche der Durchschnitt dreier projektivischer Ebenenbüschel dargestellt ist.

Wenn insbesondere zwei der projektivischen Ebenenbüschel durch zweimalige Projektion aus einander sich ableiten lassen, das heisst, wenn sie eine selbstentsprechende Ebene haben, so reducirt sich nach der soeben gegebenen Entwickelung die Gleichung auf die Form

$$0 = x(xa_1\alpha b\beta)(xa_2\alpha_1 b_1\beta_1 c_1\gamma_1)a.$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich, dass die Durchschnittslinie der Ebenen α und β auf der durch die Gleichung dargestellten Oberfläche dritter Ordnung liegt. In der That, ist x irgend ein Punkt dieser Durchschnittslinie, das heisst, liegt x in α und in β, so ist $xa_1\alpha \equiv x$, also $xa_1\alpha b\beta \equiv xb\beta \equiv x$. Mithin geben die beiden ersten Faktoren obiger Gleichung denselben Punkt x, folglich ist ihr Produkt gleich Null, also auch das ganze Produkt. Somit ist x, also jeder Punkt von $\alpha\beta$, ein Punkt der Oberfläche, das heisst: die Gerade $\alpha\beta$ † liegt selbst auf der Oberfläche. Die Ebenen α und β sind nun diejenigen Ebenen, mittels deren die beiden ersten Ebenenbüschel (φ und φ_1) aus einander durch Projektion abgeleitet werden konnten. Die Durch- 61

schnittslinie dieser beiden Ebenen hat nach dem Satze Nr. 17 (im vorigen Paragraph) die Eigenschaft, dass in jedem Punkte derselben zwei entsprechende Strahlen der beiden Büschel sich begegnen, weshalb sie die *Kollineationsaxe* dieser Büschel genannt werden kann.

Haben insbesondere je zwei der drei projektivischen Büschel, welche die Oberfläche erzeugen, eine selbstentsprechende Ebene, so ist klar, dass die drei Kollineationsaxen, die zu je zweien jener Büschel gehören, in der Oberfläche liegen. Fallen endlich diese drei selbstentsprechenden Ebenen zusammen, das heisst, fallen in der Ebene δ, welche die drei Mittelpunkte der Büschel verbindet, drei entsprechende Ebenen zusammen, so liegt jeder Punkt jener Ebene δ in drei entsprechenden Ebenen und ist also ein Punkt der Durchschnittsfläche; das heisst: die Durchschnittsfläche zerfällt in die Ebene δ und in eine Fläche zweiter Ordnung. In dieser Fläche zweiter Ordnung müssen aber die drei Kollineationsaxen liegen, folglich ist die dadurch erzeugte Fläche zweiter Ordnung gleichfalls eine geradlinige.

Für die drei Kollineationsaxen ergiebt sich leicht, dass, wenn zwei derselben in einem Punkt zusammentreffen, auch die dritte durch diesen Punkt gehen muss. Denn treffen zwei Kollineationsaxen, zum Beispiel die zwischen dem ersten und zweiten und die zwischen dem zweiten und dritten Büschel, in einem Punkte zusammen, so begegnen sich in diesem Punkte drei entsprechende Strahlen jener drei Büschel, also auch zwei entsprechende Strahlen des ersten und dritten Büschels; das heisst: die Kollineationsaxe zwischen dem ersten und dritten Büschel muss gleichfalls durch diesen Punkt gehen. Hieraus nun folgt, dass die Kollineationsaxen entweder durch einen und denselben Punkt gehen oder sich überhaupt nicht treffen. Im ersteren Falle ist die durch sie gelegte Fläche zweiter Ordnung ein *Kegel*, im zweiten ein *einfaches Hyperboloid* oder, wenn die drei Kollineationsaxen mit einer und derselben Ebene parallel sind, ein *hyperbolisches Paraboloid*.

In beiden Fällen wird die Fläche zweiter Ordnung durch jene drei Axen bestimmt. Sind A, B, C die drei Axen und wird angenommen, sie treffen nicht in demselben Punkte zusammen, so ist die Gleichung des gesamten Durchschnitts der drei Büschel:

$$x\delta \,.\, xABCx = 0,$$

und in Worten ausgedrückt:

62 *Wenn in der Verbindungsebene der Mittelpunkte dreier projektivischer Büschel drei entsprechende Ebenen zusammenfallen, so zerfällt die Durchschnittsfläche der drei Büschel in jene Verbindungsebene und in eine durch die drei Kollineationsaxen gehende Fläche zweiter Ordnung.*

Wir stellen nun noch die Aufgabe: „Die Oberfläche dritter Ordnung,

welche durch drei gegebene Punkte und durch vier gegebene gerade Linien geht, als Durchschnitt dreier projektivischer Büschel zu konstruiren."

Die Bedingung, dass eine Oberfläche durch eine gerade Linie gehen (das heisst: diese ganz in jener liegen) soll, ist identisch mit der Bedingung, dass *vier* in gerader Linie liegende Punkte auf der Oberfläche liegen sollen. Die Bedingung also, dass sie durch vier gerade Linien gehen soll, drückt aus, dass sie sechzehn Punkte enthalten soll, die zu je vieren auf vier geraden Linien liegen. Diese sechszehn Punkte, mit den drei ursprünglich gegebenen, liefern eine Anzahl von neunzehn Punkten, welche zur Bestimmung einer Oberfläche dritter Ordnung im allgemeinen ausreichen. Es wird also die Oberfläche durch jene drei Punkte und vier Gerade im allgemeinen bestimmt werden. Es seien a, a_1, a_2 die drei Punkte, A, B, C, D die vier Geraden. Durch jene drei Punkte und diese vier Geraden lege man die zwölf Ebenen, so bilden diese drei Büschel mit den Mittelpunkten a, a_1, a_2, indem jeder Büschel vier Ebenen enthält.

Wir nehmen an, dass die gegebenen sieben Elemente *nicht* eine solche besondere Lage haben, dass sich durch irgend einen der drei Punkte eine Gerade ziehen lasse, welche drei der gegebenen Geraden schnitte. Dies angenommen, folgt, dass von den vier Ebenen eines jeden Büschels keine drei sich in einer und derselben geraden Linie schneiden, weil sonst diese gerade Linie, gegen die Annahme, durch den Mittelpunkt dieses Büschels gehen und die drei Geraden, durch welche die drei Ebenen gelegt wären, schneiden würde. Man kann daher (nach § 4, Nr. 8) die drei Büschel zu einander projektivisch setzen, wobei sich die entsprechenden Ebenen beliebig wählen lassen. Wir setzen aA, a_1A, a_2A einander entsprechend; und so überhaupt diejenigen jener zwölf Ebenen, welche jedesmal in einer der vier Geraden A, B, C, D zusammentreffen. Die Durchschnittsfläche dieser drei Ebenenbüschel wird dann durch eine Gleichung von der Form

$$x(x\mathfrak{R}_1)(x\mathfrak{R}_2)a = 0$$

ausgedrückt, wo die Reihen $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$ beziehlich mit a_1 und a_2 beginnen. Diese Gleichung lässt sich, da die vier Faktoren Punkte sind, auch

$$xa(x\mathfrak{R}_1)(x\mathfrak{R}_2) = 0$$

schreiben. Es ist {noch} zu zeigen, dass die durch sie dargestellte Durchschnittsfläche die sieben gegebenen Elemente enthält. 63

Ist zuerst $x \equiv a$, so wird $xa = 0$; ist $x \equiv a_1$ oder a_2, so wird $x\mathfrak{R}_1$ oder $x\mathfrak{R}_2 = 0$, also wird in allen drei Fällen der Gleichung genügt, das heisst, die Fläche enthält die Punkte a, a_1, a_2. Ferner, in

der Geraden A, da sie in drei entsprechenden Ebenen liegt, ist jeder Punkt dreien entsprechenden Ebenen gemein, also ein Punkt der Durchschnittsfläche, folglich geht diese auch durch die Gerade A und ebenso durch B, C, D. Mithin ist die Aufgabe vollständig gelöset.

§ 6.

Deutung jeder stereometrischen Gleichung dritten Grades durch Projektivität.

In dem vorhergehenden Paragraph wurde nur die Gleichungsform (1) und von ihr wiederum nur der Fall betrachtet, wo die in der Gleichung vorkommenden Reihen ($\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$) von Faktoren aus abwechselnden Punkten und Ebenen bestehen. Es bleiben also noch die Fälle zu berücksichtigen, wo eine oder mehrere der Reihen nur aus Geraden bestehen. In der zweiten Gleichungsform bestehen, wie wir oben sahen, alle drei Reihen aus Geraden. Die Gleichung (1) war:

$$x\mathfrak{R}(x\mathfrak{R}_1)(x\mathfrak{R}_2)a = 0. \tag{1}$$

Es wurde gezeigt, dass sich jeder Punkt x, der dieser Gleichung genügt, als Durchschnitt dreier Ebenen ansehen lässt; mittels eines durch a gelegten Ebenenbüschels zweiter Stufe. Wenn nämlich φ eine beliebige Ebene dieses Büschels ist und $\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{R}_1'$, $\mathfrak{R}_2'$ die durch Umkehr aus $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$ hervorgehenden Reihen sind, so genügt der Durchschnitt der drei Ebenen $\varphi\mathfrak{R}'$, $\varphi\mathfrak{R}_1'$, $\varphi\mathfrak{R}_2'$ der obigen Gleichung, und die Gesamtheit dieser Durchschnitte bildet die durch die Gleichung (1) dargestellte Oberfläche. Die Ebene $\varphi\mathfrak{R}'$ geht nun aus φ durch fortschreitende Projektion hervor, und die ganze Schaar der Ebenen $\varphi\mathfrak{R}'$ bildet einen Ebenenbüschel; und zwar entweder einen Ebenenbüschel zweiter Stufe oder erster Stufe, je nachdem $\mathfrak{R}'$ aus einer Reihe abwechselnder Ebenen und Punkte oder aus einer Reihe von Geraden besteht. Im ersten Falle ist der letzte Punkt jener Reihe $\mathfrak{R}'$ der Mittelpunkt des Ebenenbüschels zweiter Stufe; im zweiten Falle ist die letzte Gerade jener Reihe $\mathfrak{R}'$ die Axe des Ebenenbüschels erster Stufe. In beiden Fällen ist der Ebenenbüschel $\varphi\mathfrak{R}'$ durch Projektion aus dem Ebenenbüschel zweiter Stufe φ abgeleitet. Im ersten Falle 64 liess sich rückwärts aus dem letzteren Büschel φ † wieder der erste durch Projektion ableiten. Im zweiten Falle ist dies nicht möglich, da man durch fortschreitende Projektion eines Ebenenbüschels erster Stufe immer nur höchstens zu Gebilden erster Stufe gelangen kann. Die Projektivität ist also in diesem Falle nicht gegenseitig. Dasselbe gilt nun von den Ebenenbüscheln $\varphi\mathfrak{R}_1'$, $\varphi\mathfrak{R}_2'$.

Nach diesen Vorbemerkungen lassen sich die vier aus der Formel (1)

fliessenden Sätze der Projektivität unmittelbar aussprechen, wobei wir, der Vollständigkeit wegen, auch noch den früher entwickelten Satz hinzufügen:

1. Der Durchschnitt dreier einander projektivischer Ebenenbüschel zweiter Stufe ist eine *Oberfläche dritter Ordnung.*

2. Der Durchschnitt zweier Ebenenbüschel zweiter Stufe und eines Ebenenbüschels erster Stufe, von denen die ersten beiden untereinander projektivisch sind, der letzte aber aus ihnen durch Projektion ableitbar ist, bildet eine *Oberfläche dritter Ordnung.*

3. Der Durchschnitt eines Ebenenbüschels zweiter Stufe und zweier aus ihm durch Projektivität ableitbarer Ebenenbüschel erster Stufe ist eine *Oberfläche dritter Ordnung.*

4. Der Durchschnitt dreier aus einem Ebenenbüschel zweiter Stufe durch Projektion ableitbarer Ebenenbüschel erster Stufe ist eine *Oberfläche dritter Ordnung.*

Hierzu füge ich sogleich den aus der Formel (2) {S. 182} ableitbaren Satz, welcher sich aus ihr genau auf die entsprechende Weise ergiebt.

5. Der Durchschnitt dreier aus einer punktirten Ebene durch Projektion ableitbarer Ebenenbüschel erster Stufe ist eine *Oberfläche dritter Ordnung.*

Endlich lassen sich alle diese Fälle in dem folgenden Satze zusammenfassen:

6. Der Durchschnitt dreier aus einem Gebilde zweiter Stufe durch Projektion ableitbarer Ebenenbüschel ist eine *Oberfläche dritter Ordnung.*

Zu der speciellen Diskussion der Sätze Nr. 2 bis 5 würde eine Entwickelung der projektivischen Beziehungen zwischen Gebilden zweiter und erster Stufe und zwischen Gebilden erster Stufe, die aus demselben Gebilde zweiter Stufe entspringen, nothwendig sein. Diese Beziehungen sind indessen von so eigenthümlicher Art, dass ihre auch nur nothdürftige Entwickelung einen bedeutenden Umfang haben würde. Nur beispielsweise will ich hier eine der einfacheren Beziehungen ohne Beweis aufstellen:

„Aus einem beliebigen Verein von fünf verschiedenen Punkten (*a*, *b*, *c*, *d*, *e*) einer Ebene (α), von denen jedoch keine vier in gerader Linie liegen, lässt sich ein beliebiger Verein von fünf verschiedenen Punkten (a_1, b_1, c_1, d_1, e_1) einer Geraden A_1 durch fortschreitende Projektion ableiten; vorausgesetzt jedoch, dass keine vier Punkte des letzten Vereins mit den vier Strahlen projektivisch sind, welche von den vier entsprechenden Punkten des ersten Vereins nach dem fünften Punkte desselben gezogen werden. Alsdann ist zu jedem sechsten Punkt der Ebene der entsprechende Punkt der Geraden bestimmt. 65

Wenn hingegen vier Punkte der Geraden (zum Beispiel a_1, b_1, c_1, d_1) mit den vier Strahlen (ae, be, ce, de) projektivisch sind, welche von den entsprechenden Punkten (a, b, c, d) nach dem fünften Punkt (e) der Ebene gezogen sind, so hängt die projektivische Beziehung zwischen jener Geraden und dieser Ebene von dem durch fünf Punkte (a, b, c, d, e) der Ebene gelegten Kegelschnitt in folgender Weise ab: Ist der von irgend einem sechsten Punkt (g) des Kegelschnitts nach den fünf Punkten (a, b, c, d, e) gezogene Strahlenbüschel zu der gegebenen Geraden *nicht* projektivisch, so kann dieselbe aus jener Ebene *nicht* durch Projektion abgeleitet werden; findet dagegen jene Projektivität statt, so ist die projektivische Beziehung zwischen der Ebene und der Geraden *nicht* bestimmt, sondern man kann dann zu jedem beliebigen sechsten Punkt (f) der Ebene, der jedoch nicht in dem Kegelschnitt liegt, den entsprechenden Punkt f_1 der Geraden noch willkürlich annehmen, sodass noch immer die Gerade aus der Ebene durch fortschreitende Projektion erfolgt."

Dieser Satz entspricht dem bekannten Satze, „dass man in zwei Geraden drei Paare von Punkten beliebig annehmen und dann die Geraden projektivisch setzen kann, so dass jene Punktenpaare entsprechende Elementenpaare werden". Und schon aus diesem Satze, welcher für die gegenseitige Beziehung *dreier* aus *einem* Gebilde zweiter Stufe ableitbaren Gebilde erster Stufe noch bei weitem zusammengesetzter sich gestaltet, sieht man, dass zu der weitern Behandlung des hier berührten Gegenstandes ein umfangreicherer Apparat nöthig ist; weshalb ich diesen Gegenstand für eine andere Gelegenheit vorbehalte.

Stettin, im Juli 1852.

XIII.

Sur les différents genres de multiplication.

Par

Grassmann,

prof. des mathém. au collège de Stettin.

Crelles Journal Bd. 49, Heft 2, S. 123—141 (1855).

M. Cauchy a communiqué à l'Académie des Sciences, le 10, 17 et 24 janvier de l'année passée, les principes d'un calcul fondé sur des quantités qu'il nomme *clefs algébriques.* (Voyez Comptes rendus XXXVI, {1853}, pages 70, 129, 161. Oeuvres complètes, I. Serie, Bd. XI, Nr. 514, Bd. XII, Nr. 516, 517.) Il a fait voir qu'à l'aide de ce calcul, on peut résoudre avec une grande facilité des questions d'analyse et de mécanique, dans lesquelles l'application des méthodes ordinaires entraînerait de longs et pénibles calculs. Ce n'est que depuis quelques semaines que j'ai pu obtenir connaissance de ces communications; mais au premier coup d'oeil je reconnus que les principes qui y sont établis, et les résultats qui en ont été tirés, étaient absolument les mêmes que ceux, que j'avais publiés déjà en 1844 (dans un ouvrage intitulé *„Ausdehnungslehre oder Wissenschaft der extensiven Grösse.“ Leipzig 1844*) et dont j'avais donné en même temps des applications nombreuses à l'analyse algébrique, à la géométrie, à la mécanique et à d'autres branches de la physique. Depuis la publication de cet ouvrage, je suis parvenu à simplifier et à généraliser les principes du calcul qui y est exposé, mais je m'étais proposé d'en retarder la publication jusqu'au temps ou j'aurais le loisir de remanier tout l'ouvrage. Cependant, en raison des articles cités, je me trouve forcé de publier ici quelques-uns des resultats obtenus, comme je vois que, dans ses *clefs algébriques,* M. Cauchy a trouvé en quelque sorte les clefs, non seulement pour entrer dans la théorie que j'ai publiée jusqu'à présent, mais encore pour ouvrir la porte à plusieurs résultats

non encore publiés. Ce qui en paraît le plus important, c'est le développement des divers genres de multiplication, dont je me propose de donner ici un aperçu.

L'arithmétique ne connaît qu'un seul genre de multiplication, dont la propriété est que l'on puisse intervertir l'ordre des facteurs, et réunir en un produit particulier autant de facteurs que l'on voudra, sans que la valeur du produit total en soit altérée; et qui de plus ne s'évanouit pas, à moins que l'un de ses facteurs ne devienne égal à zéro. C'est surtout dans la théorie des quantités dans l'espace, que j'ai nommées 124 *extensives*, et traitées dans † l'ouvrage cité, que se présentent des genres de multiplication entièrement différentes de celle de l'analyse ordinaire, dont l'application néanmoins s'étend, à peu près, à toutes les branches des mathématiques et de la physique.

§ 1.

Système d'unités relatives.

Pour fixer l'idée générale de la multiplication dont il s'agit, je commencerai par établir les principes sur lesquels il paraît convenable de s'appuyer.

Je dis que deux ou plusieurs quantités A, B, C, ... ont entr'elles une *relation algébrique*, quand l'une ou l'autre d'entre elles est égale à un polynôme dont les termes sont proportionnels aux autres, en sorte que l'on ait, par exemple,

$$A = \beta B + \gamma C + \cdots,$$

où β, γ, ... désignent de simples nombres, soit rationnels ou irrationnels, soit réels ou imaginaires, soit égaux à zéro ou non. Pour en donner une idée palpable, concevons que les lettres A, B désignent des objets différents quelconques, par exemple, différentes espèces de plantes. Alors il est évident que la chose représentée par la lettre A ne saurait être regardée comme le produit de la chose B par aucun facteur algébrique; ou, pour en choisir un exemple qui soit plus conforme aux mathématiques, supposons que A et B désignent des *lignes* données en grandeur et en direction, et supposons que le produit d'une ligne par un facteur algébrique réel, représente une ligne de la même direction, mais dont la grandeur est à celle de la ligne donnée comme le facteur algébrique est à l'unité; supposons de plus que le produit d'une ligne réelle par un facteur imaginaire, soit une ligne imaginaire. Alors la ligne A ne pourra évidemment résulter d'une multiplication de la ligne B par un facteur algébrique, à moins que

les lignes ne soient parallèles entre elles. D'où il résulte que les lignes A et B n'ont aucune relation algébrique entre elles.

Considérons maintenant n quantités $a, b, c, \ldots$ qui n'ont aucune relation algébrique entre elles: alors il est évident que l'on peut en déduire une infinité de quantités, en multipliant chacune d'elles par un facteur algébrique, et en ajoutant les produits ainsi obtenus. Nous appellerons *unité relative* toute quantité que l'on se propose d'employer, pour en déduire d'autres quantités au moyen d'une multiplication par des facteurs algébriques, tandis que nous réserverons à l'unité des nombres le nom d'*unité absolue*. De même nous appellerons *système d'unités relatives* tout assemblage de plusieurs quantités, non liées entre elles par des relations algébriques, mais destinées pour en dériver par voie de multiplication et d'addition, toutes les quantités que † l'on 125 veut considérer. Enfin, nous désignerons les quantités ainsi obtenues par le nom de *quantités extensives*, en sorte que, par exemple le polynôme

$$\alpha a + \beta b + \gamma c + \cdots,$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ désignent de simples nombres, et $a, b, c, \ldots$ un système d'unités relatives, devra être regardé comme une quantité *extensive;* et nous dirons qu'elle est *composée* des unités $a, b, c, \ldots$ au moyen des coefficients $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ (Dans mon ouvrage cité, j'ai désigné les unités relatives par le nom „*Grundänderungen*“, et un système d'unités relatives par le nom de „*von einander unabhängige Grundänderungen*“ [voir § 16 {diese Ausgabe I, 1, S. 51}]: dénominations qui résultent du point de vue particulier, sous lequel les quantités extensives y sont envisagées.)

Il ne serait pas convenable d'employer l'épithète *composé* pour désigner les quantités extensives elles-mêmes, parcequ'il arrive souvent que les quantités extensives sont des quantités aussi simples que les unités dont elles résultent. Par exemple, la diagonale d'un parallélogramme peut être regardée comme la somme des côtés qui partent du même point, pourvu que l'on tienne compte de leur direction, aussi bien que de leur grandeur. Donc, si l'on regarde ces côtés comme des unités relatives, il est clair que la diagonale est composée de ces unités, sans qu'elle cesse pour celà d'être une simple ligne. Nous remarquons à cette occasion que l'on peut regarder trois lignes, ou quatre points quelconques dans l'espace, comme un système d'unités relatives, et qu'on peut en composer toutes les lignes ou tous le points de l'espace, à moins que les lignes ne soient parallèles à un même plan et que les points ne soient situés dans un même plan. (Voyez sur ce sujet mon ouvrage précédemment cité, où je suis entré dans des détails; et en suivant, quant aux points,

les principes établis par M. **Moebius** dans son calcul barycentrique. Quant à la somme des lignes données en grandeur et direction, il est remarquable que plusieurs géomètres ont conçu cette idée presque en même temps et indépendamment les unes des autres.)

§ 2.

Multiplication des quantités extensives.

Considérons maintenant la *multiplication* des *quantités extensives.* La multiplication en général est caractérisée par la propriété, que l'on peut multiplier, chacun par chacun, les termes, dont les facteurs sont composés, ou sont censés composés, sans que la valeur du produit total en soit alterée. Il faut cependant en général tenir compte de l'ordre, dans lequel les multiplications sont effectuées successivement; en sorte que les termes, qui entrent dans chaque produit, y soient 126 rangés dans le même ordre, dans lequel les facteurs qui les † renfermaient, étaient rangés dans le produit donné. Il est facile de voir que l'on pourrait déduire de cette idée générale toutes les lois de la multiplication des nombres, sans y ajouter aucune autre condition que celle que 1 . 1 soit égal à 1: condition qui servira à définir l'unité absolue. Il résulte aussi de l'idée générale, qu'ayant à multiplier des quantités quelconques, affectées chacune d'un facteur algébrique, il sera permis de multiplier le produit de ces quantités par le produit des facteurs algébriques, à moins que l'on n'intervertisse l'ordre des facteurs dans le premier des produits. Il sera maintenant facile de *définir* précisément la multiplication des quantités extensives.

Définition. Multiplier des quantités extensives, c'est multiplier d'abord dans le même ordre, chacune par chacune, les unités dont les diverses quantités extensives sont composées: multiplier ensuite ces produits chacun par le produit des coefficients dont les unités qui y entrent étaient affectées, et ajouter finalement par voie d'addition les produits ainsi obtenus.

En d'autres termes:

On multipliera les quantités extensives en suivant les règles de la multiplication algébrique, en ayant seulement soin que l'ordre des facteurs ne soit point altéré. Par exemple, le produit des quantités extensives $\alpha a + \beta b$ *et* $\gamma a + \delta b$, α, β, γ, δ *désignant des nombres,* a *et* b *des unités relatives, sera:*

$$(\alpha a + \beta b)(\gamma a + \delta b) = \alpha\gamma . aa + \alpha\delta . ab + \beta\gamma . ba + \beta\delta . bb.$$

Il n'y aura donc qu'à definir les produits des unités relatives. On conçoit que, si l'on n'admet aucune relation entre ces produits, il faudra regarder ces produits comme de nouvelles unités relatives, que

l'on pourrait appeller unités d'un degré supérieur, par exemple du n-ième degré, n étant le nombre des facteurs. Mais rien n'empêche de supposer des relations algébriques arbitrairement choisies, qui lient entre eux les produits des unités. Quelles que soient d'ailleurs ces relations, on pourra toujours en représenter chacune par une équation, en égalant à zéro la somme des ces produits, multipliés chacun par un facteur algébrique. Soient, pour fixer les idées,

$$\alpha, \beta, \gamma, \ldots$$

des nombres quelconques, et

$$A, B, C, \ldots$$

les produits des unités relatives: alors toute relation entre ces produits pourra † être représentée par une équation de la forme 127

$$\alpha A + \beta B + \gamma C + \cdots = 0,$$

équation qu'on peut appeler équation de condition par rapport à la multiplication dont il s'agit. Étant donné le système de toutes les équations de condition relatives à une multiplication particulière, celle-ci en sera déterminée précisément; et il est évident qu'à l'aide de ces équations, on pourra éliminer autant des produits $A, B, C, \ldots$ qu'il y en a d'équations. Ces éliminations étant effectuées, le reste des produits $A, B, C, \ldots$ formera un système d'unités relatives, qui serviront à en composer toutes les quantités fournies par la multiplication dont il s'agit.

Voilà l'idée la plus générale qu'on puisse concevoir de la multiplication de quantités quelconques. C'est cette idée qui a servi de base aux développements dans mon ouvrage cité (voyez „*Ausdehnungslehre*" § 12 {diese Ausgabe I, 1, S. 44}), et que j'ai tâché ensuite de perfectionner à plusieurs égards. C'est encore cette idée que M. Cauchy paraît avoir eue en vue dans ses mémoires sur les *clefs algébriques*. En effet: les *clefs algébriques* de M. Cauchy ne sont au fond que les unités relatives; et ses *facteurs symboliques* conviennent, du moins dans un certain rapport, aux quantités extensives telles que je les ai définies. La différence ne consiste qu'en ce que M. Cauchy regarde les clefs algébriques seulement comme un moyen pour résoudre divers problèmes de l'analyse et de la mécanique et qui, les problèmes étant résolus, disparaissent, tandis que d'après les principes établis par moi, on est en état, à chaque pas du procédé, d'attribuer une signification indépendante aux unités relatives et aux quantités qui en sont composées, qu'elle que soit d'ailleurs la marche que l'on suive.

Pour considérer les produits de quantités quelconques, on pourra se borner d'abord à des produits de *deux* facteurs. Car, quel que soit

le nombre des facteurs, il sera toujours possible de les réduire à *deux* facteurs; ce que l'on effectuera, en partageant tous les facteurs en deux groupes, et en réunissant ensuite les facteurs de l'un et de l'autre groupe à deux produits particuliers, lesquels multipliés donneront le produit proposé. Si donc les lettres $u_1, u_2, \dots u_n$ désignent des unités relatives, on pourra présenter toute équation de condition sous la forme

$$S(\alpha_{r,s} u_r u_s) = 0,$$

où les $\alpha_{r,s}$ désignent des nombres quelconques et le signe sommatoire doit être étendu à toutes les valeurs entières des indices r et s entre 128 les limites $+1$ et n. Il est évident que l'on peut supposer plusieurs équations de cette forme qui doivent subsister simultanément, et que d'ailleurs tous les coefficients, tels que $\alpha_{r,s}$, sont tout-à-fait arbitraires. On se trouverait ainsi conduit à une infinité de multiplications particulières, qui ne semblent promettre aucune utilité pour la science. Le plus grave inconvénient, qui s'y trouve, est surtout que les équations de condition cessent généralement de subsister lorsqu'on y substitue aux unités les quantités qui en sont composées.

Pour faire disparaître cet inconvénient, nous supposerons premièrement que l'on puisse changer le signe de l'une quelconque des unités relatives, ou bien, de deux quelconques d'entre elles, et substituer chacune d'elles à la place de l'autre, sans que les équations de condition cessent de subsister. En second lieu, nous supposerons en outre que, pour deux unités quelconques, il y ait toujours deux quantités extensives, qui ne soient ni multiples des unités, ni égales à elles, et qui néanmoins, étant substituées à ces unités, satisfassent encore aux équations de condition. En troisième lieu enfin, nous supposerons qu'il soit même permis de substituer à toutes les unités des quantités qui en sont composées à volonté, sans que les équations de condition en soient altérées.

Nous désignerons, dans la suite, les multiplications qui résultent de ces trois suppositions, respectivement par les noms des *multiplications symétriques*, *circulaires* et *linéales;* ce qui nous servira, dès à present, pour distinguer entre elles les trois suppositions que nous venons d'exposer.

§ 3.

Multiplications symétriques.

Dans la première supposition, soit l'équation

$$S(\alpha_{r,s} u_r u_s) = 0$$

l'une quelconque des équations de condition. Après l'avoir mise sous la forme

$$S(\alpha_{1,r}u_1u_r) + S(\alpha_{r,1}u_ru_1) + \alpha_{1,1}u_1u_1 + S(\alpha_{r,s}u_ru_s) = 0,$$

où les indices r et s sont différents de 1, substituons $-u_1$ à la place de $+u_1$, et nous aurons:

$$-S(\alpha_{1,r}u_1u_r) - S(\alpha_{r,1}u_ru_1) + \alpha_{1,1}u_1u_1 + S(\alpha_{r,s}u_ru_s) = 0.$$

Ces équations, ajoutées et retranchées, donneront:

$$\alpha_{1,1}u_1u_1 + S(\alpha_{r,s}u_ru_s) = 0,$$

et

$$S(\alpha_{1,r}u_1u_r) + S(\alpha_{r,1}u_ru_1) = 0.$$

Puis, en substituant dans la première de ces équations, $-u_2$ à la place de l'unité u_2 on en tirera, par voie d'addition:

$$\alpha_{1,1}u_1u_1 + \alpha_{2,2}u_2u_2 + S(\alpha_{r,s}u_ru_s) = 0,$$

les indices r et s étant différents des indices 1 et 2. En poursuivant 129 de cette manière, on obtiendra finalement l'équation

$$\alpha_{1,1}u_1u_1 + \alpha_{2,2}u_2u_2 + \cdots + \alpha_{n,n}u_nu_n = 0.$$

De même, en substituant, dans la seconde des équations ci-dessus trouvées, $-u_2$ à la place de $+u_2$, et en retranchant l'équation ainsi obtenue de celle d'où l'on est parti, on trouvera l'équation

$$\alpha_{1,2}u_1u_2 + \alpha_{2,1}u_2u_1 = 0,$$

dans laquelle les indices 1 et 2 pourront être remplacés par deux {différents} quelconques des indices $1 \ldots n$. On est donc conduit à la proposition suivante.

Théorème 1. Si l'équation

$$S(\alpha_{r,s}u_ru_s) = 0$$

est l'une quelconque des équations de condition relatives à une multiplication, et qu'il soit d'ailleurs permis de changer le signe de chacune des unités relatives $u_1, u_2, \ldots u_n$, sans que les équations de condition cessent de subsister, on aura les équations suivantes:

$$(1) \qquad \alpha_{1,1}u_1u_1 + \alpha_{2,2}u_2u_2 + \cdots + \alpha_{n,n}u_nu_n = 0$$

et

$$(2) \qquad \alpha_{1,2}u_1u_2 + \alpha_{2,1}u_2u_1 = 0;$$

dont la dernière aura encore lieu, quand on y remplace les indices 1 et 2 par deux différents quelconques parmi les indices $1 \ldots n$.

Ajoutons maintenant à la supposition précédemment établie, cette autre, que l'on puisse substituer réciproquement l'une quelconque des unités à l'autre, sans altérer par là les équations de condition. Cette

hypothèse admise, en substituant, dans l'équation (1) du théorème précédent, les unités u_1 et u_2 l'une à l'autre, on aura l'équation

$$\alpha_{1,1}u_2u_2 + \alpha_{2,2}u_1u_1 + \cdots + \alpha_{n,n}u_nu_n = 0;$$

donc, en la retranchant de l'équation primitive

$$\alpha_{1,1}u_1u_1 + \alpha_{2,2}u_2u_2 + \cdots + \alpha_{n,n}u_nu_n = 0,$$

on obtiendra celle-ci:

$$(\alpha_{1,1} - \alpha_{2,2})(u_1u_1 - u_2u_2) = 0.$$

De plus, en remplaçant, dans la même équation (1), les unités

$$u_1,\ u_2,\ \ldots\ u_{n-1},\ u_n$$

respectivement par

$$u_2,\ u_3,\ \ldots\ u_n,\quad u_1$$

180 on en tirera l'équation

$$(\alpha_{2,2} - \alpha_{3,3})(u_2u_2 - u_3u_3) = 0.$$

Puis, en appliquant le même remplacement à l'équation obtenue, et ainsi de suite, jusqu'à ce que chaque unité soit changée successivement dans toutes les autres, et en ajoutant finalement toutes ces équations, on obtiendra pour équation résultante:

$$(\alpha_{1,1} + \alpha_{2,2} + \cdots + \alpha_{n,n})(u_1u_1 + u_2u_2 + \cdots + u_nu_n) = 0.$$

Considérons maintenant l'autre équation du théorème précédent, savoir:

$$\alpha_{1,2}u_1u_2 + \alpha_{2,1}u_2u_1 = 0.$$

En y substituant l'une à l'autre les deux unités u_1 et u_2, nous aurons

$$\alpha_{1,2}u_2u_1 + \alpha_{2,1}u_1u_2 = 0.$$

Ces équations, combinées entre elles par voie d'addition et de soustraction, donneront les équations

$$(\alpha_{1,2} + \alpha_{2,1})(u_1u_2 + u_2u_1) = 0,$$
$$(\alpha_{1,2} - \alpha_{2,1})(u_1u_2 - u_2u_1) = 0,$$

dans lesquelles on peut remplacer les indices 1 et 2 par deux quelconques différents parmi les valeurs $1 \ldots n$. Les résultats, auxquels on est arrivé, peuvent être énoncés par la proposition suivante.

Théorème 2. S'il est permis de changer le signe de l'une quelconque des unités relatives, ainsi que d'en substituer réciproquement l'une quelconque à l'autre, sans que les équations de condition cessent de subsister, on peut en tirer les systèmes suivants d'équations:

(1) $$(\alpha_{1,2} - \alpha_{2,1})(u_1u_2 - u_2u_1) = 0,$$

(2) $$(\alpha_{1,2} + \alpha_{2,1})(u_1u_2 + u_2u_1) = 0,$$

(3) $$(\alpha_{1,1} - \alpha_{2,2})(u_1u_1 - u_2u_2) = 0,$$

(4) $$(\alpha_{1,1} + \alpha_{2,2} + \cdots + \alpha_{n,n})(u_1u_1 + u_2u_2 + \cdots + u_nn_n) = 0,$$

dont les trois premiers subsistent encore, quand on y substitue à la place des indices deux quelconques différents parmi les valeurs $1 \ldots n$.

Le premier membre de chacune des équations précédentes contient deux facteurs; par conséquent, le second membre étant égal à zéro, il faudra que l'un ou l'autre de ces facteurs *s'évanouisse.* On tirera donc de chacune de ces équations deux nouvelles équations, dont l'une ou l'autre devra se vérifier, et dont l'une se rapporte aux coefficients, l'autre aux unités. Or il † est clair que chacune des équations qui 131 renferment les unités, entraînera avec elle les autres qui en résultent par l'échange des indices, et qu'il en sera de même pour les équations des coefficients. Il s'ensuit que chacun des quatre systèmes d'équations ci-dessus établis, se partagera en deux systèmes, dont l'un ou l'autre devra subsister. En plaçant ces systemes deux à deux en ligne horizontale, on aura:

1°.	ou $\alpha_{1,2} = \alpha_{2,1}$ etc.,	ou $u_1 u_2 = u_2 u_1$ etc.,
2°.	ou $\alpha_{1,2} + \alpha_{2,1} = 0$ etc.,	ou $u_1 u_2 + u_2 u_1 = 0$ etc.,
3°.	ou $\alpha_{1,1} = \alpha_{2,2} = \alpha_{3,3} = \ldots$,	ou $u_1 u_1 = u_2 u_2 = u_3 u_3 = \ldots$,
4°.	ou $\alpha_{1,1} + \alpha_{2,2} + \cdots + \alpha_{n,n} = 0$,	ou $u_1 u_1 + u_2 u_2 + \cdots + u_n u_n = 0$.

Il y a donc *seize* cas différents, puisqu'on peut choisir l'un ou l'autre système de chaque colonne horizontale. Or il est évident que, réciproquement, toutes les équations que nous venons d'établir entre les unités, continueront encore de subsister, quand on y fait les substitutions ci-dessus désignées. On est donc conduit à la proposition suivante.

Théorème 3. Entre deux facteurs, composés des unités relatives $u_1, u_2, \ldots u_n$, *il en existe seize espèces de multiplication; de sorte que les équations de condition subsistent encore, soit que l'on échange arbitrairement les unités relatives, soit que l'on change le signe de l'une quelconque d'entre elles. On obtient les équations de condition relatives à chacune de ces espèces, en choisissant, comme l'on voudra parmi ces quatre systèmes d'équations suivants:*

$$(1) \qquad u_r u_s = u_s u_r,$$

$$(2) \qquad u_r u_s + u_s u_r = 0,$$

$$(3) \qquad u_1 u_1 = u_2 u_2 = \cdots = u_n u_n,$$

$$(4) \qquad u_1 u_1 + u_2 u_2 + \cdots + u_n u_n = 0;$$

les deux premiers devant subsister pour deux différentes valeurs entières quelconques r *et* s *entre les limites* 1 *et* n.

§ 4.

Multiplications circulaires.

En second lieu, en poursuivant la marche proposée, ajoutons aux suppositions précédemment établies, cette autre, qu'aux unités u_1 et u_2 on puisse substituer des quantités $x_1 u_1 + x_2 u_2$ et $y_1 u_1 + y_2 u_2$, qui en sont composées au moyen des coefficients x_1, x_2, y_1, y_2, supposés distincts de zéro, sans que les équations de condition en soient altérées.

132 En posant, pour abréger,

$$x_1 u_1 + x_2 u_2 = a, \quad y_1 u_1 + y_2 u_2 = b,$$

on aura:

$$aa = x_1^2 u_1 u_1 + x_2^2 u_2 u_2 + x_1 x_2 (u_1 u_2 + u_2 u_1),$$
$$ab = x_1 y_1 u_1 u_1 + x_2 y_2 u_2 u_2 + x_1 y_2 u_1 u_2 + x_2 y_1 u_2 u_1,$$

d'où l'on tirera les valeurs des produits bb et ba, en remplaçant, l'une par l'autre, les lettres x et y.

D'après le théorème précédent, on a pour équations de condition les quatre systèmes d'équations:

(1) $$u_1 u_2 = u_2 u_1, \ldots$$

(2) $$u_1 u_2 + u_2 u_1 = 0, \ldots$$

(3) $$u_1 u_1 = u_2 u_2 = u_3 u_3 = \cdots$$

(4) $$u_1 u_1 + u_2 u_2 + \cdots + u_n u_n = 0,$$

qui doivent subsister, ou separés, ou combinés d'une manière quelconque. Il est d'abord évident que le premier de ces systèmes ne sera pas altéré par des substitutions quelconques.

Pour trouver les transformations des autres équations, supposons d'abord, pour plus de simplicité, qu'il en existe plus de deux unités. Alors, en substituant a et b à la place des unités u_1 et u_2, ce qui est permis par hypothèse, on aura, en partant des équations (2), la suivante:

$$0 = ab + ba = 2x_1 y_1 u_1 u_1 + 2x_2 y_2 u_2 u_2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1)(u_1 u_2 + u_2 u_1);$$

d'où, puisque le dernier terme s'évanouit en vertu de l'équation supposée $u_1 u_2 + u_2 u_1 = 0$, il vient:

$$x_1 y_1 u_1 u_1 + x_2 y_2 u_2 u_2 = 0.$$

On en tirera, à l'aide du théorème 2:

$$x_1 y_1 (u_1 u_1 - u_3 u_3) = 0,$$

d'où il suit (x_1 et y_1 étant différents de zéro):

$$u_1 u_1 = u_3 u_3.$$

Donc, on obtiendra par l'échange des indices, permis par hypothèse:

$$u_1u_1 = u_2u_2 = u_3u_3 = \cdots;$$

c'est à dire: les équations (2) entraîneront avec elles les équations (3).

Supposons maintenant que les équations (3) aient lieu. En appliquant à l'équation

$$u_1u_1 = u_3u_3$$

la substitution indiquée, on aura: 138

$$u_3u_3 = aa = x_1^2u_1u_1 + x_2^2u_2u_2 + x_1x_2(u_1u_2 + u_2u_1),$$

d'où, en remplaçant les carrés u_2u_2 et u_3u_3 par le carré équivalent u_1u_1, on trouvera:

$$(x_1^2 + x_2^2 - 1)\,u_1u_1 + x_1x_2(u_1u_2 + u_2u_1) = 0.$$

En y changeant le signe de l'unité u_1, ce qui est permis par hypothèse, et retranchant l'équation ainsi obtenue de l'équation précédente, on aura:

$$x_1x_2(u_1u_2 + u_2u_1) = 0;$$

d'où, x_1 et x_2 étant distincts de zéro, il résulte:

$$u_1u_2 + u_2u_1 = 0;$$

c'est à dire: les équations (3) entraîneront avec elles les équations (2).

Il est donc évident que, dans l'hypothèse admise, les équations (2) et (3) ne sauraient subsister séparément, et que, par suite, au lieu de ces deux systèmes d'équations, on en aura un seul, résultant de leur combinaison.

Pour trouver les conditions auxquelles les coefficients x_1, y_1, x_2, y_2 sont assujettis, transformons aussi l'équation (4) par les substitutions ci-dessus énoncées. On aura:

$$0 = aa + bb + u_3u_3 + \cdots + u_nu_n = (x_1^2 + y_1^2)u_1u_1 +$$
$$+ (x_2^2 + y_2^2)u_2u_2 + (x_1x_2 + y_1y_2)\,(u_1u_2 + u_2u_1) + u_3u_3 + \cdots + u_nu_n.$$

Par suite, en retranchant l'équation (4), on obtiendra:

$$0 = (x_1^2 + y_1^2 - 1)u_1u_1 + (x_2^2 + y_2^2 - 1)\,u_2u_2 + (x_1x_2 + y_1y_2)\,(u_1u_2 + u_2u_1);$$

d'où l'on tirera, à l'aide du théorème 2, les équations suivantes:

$$\begin{aligned} (x_1^2 + y_1^2 - 1)\,(u_1u_1 - u_3u_3) &= 0, \\ (x_2^2 + y_2^2 - 1)\,(u_2u_2 - u_3u_3) &= 0, \\ (x_1x_2 + y_1y_2)\quad(u_1u_2 + u_2u_1) &= 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, si le système combiné des équations (2) et (3) n'a pas lieu, on aura:

$$x_1^2 + y_1^2 - 1 = 0, \quad x_2^2 + y_2^2 - 1 = 0, \quad x_1x_2 + y_1y_2 = 0,$$

d'où l'on tirera:

$$x_1^2 + x_2^2 = 1, \quad y_1 = \mp x_2, \quad y_2 = \pm x_1.$$

C'est à dire: pour que l'on puisse substituer les quantités a et b à la place des unités u_1 et u_2, il faudra que l'on ait:

$$a = x_1 u_1 + x_2 u_2, \quad b = \pm (x_1 u_2 - x_2 u_1),$$

134 $x_1^2 + x_2^2$ étant égal à l'unité. Les mêmes équations auraient été obtenues, si nous avions supposé au lieu de l'équation (4) le système des équations (2) et (3).

Supposons, pour en donner un exemple palpable, que les unités u_1 et u_2 représentent deux rayons d'un cercle, perpendiculaires l'un à l'autre; alors il est clair, que les quantités a et b représenteront pareillement deux rayons perpendiculaires du même cercle. Par cette raison nous appelons *changement circulaire* ou *transformation circulaire,* toute transformation, au moyen de laquelle deux quantités quelconques a et b se changent respectivement en $xa + yb$ et en $\pm (xb - ya)$, $x^2 + y^2$ étant égal à l'unité absolue; et admettons que le changement soit appelé ou positif ou négatif, selon que, dans l'expression dernière, on met le signe positif ou le signe négatif. Je dirai de plus qu'un système de quantités est transformé par un changement *circulaire,* quand on a appliqué ce changement à deux quelconques d'entre elles.

(Les changements *circulaires* s'appliquent convenablement surtout aux théories des diamètres conjugués, des points triples et quadruples, à la théorie de la rotation et à d'autres théories de la géométrie et de la mécanique, où ils servent souvent à faciliter beaucoup les recherches.)

Nous avons trouvé que, dans l'hypothèse admise, les équations de condition se réduisent à trois systèmes d'équations, dont l'un résulte de la combinaison des équations (2) et (3) du théorème **3**, et que de plus il faut que les transformations des unités soient de la forme circulaire, pour que les trois systèmes d'équations n'en soient pas altérés. Il nous reste à faire voir que, réciproquement, ces transformations circulaires ne sauraient altérer aucun de ces systèmes.

Premièrement, il est évident que les équations (1) ne seront altérées par aucune transformation des unités.

Secondement, supposons que les équations (2) et (3) aient lieu simultanément, et admettons qu'on y remplace les unités u_1 et u_2 par des quantités a et b, qui en sont dérivées par un changement circulaire positif, de sorte que l'on ait:

$$a = x_1 u_1 + x_2 u_2, \quad b = x_1 u_2 - x_2 u_1, \quad x_1^2 + x_2^2 = 1.$$

L'expression $u_1 u_2 + u_2 u_1$ se changera par là en

$$ab + ba = (x_1^2 - x_2^2)(u_1 u_2 + u_2 u_1) + 2x_1 x_2 (u_2 u_2 - u_1 u_1).$$

Donc, puisque par hypothèse:

$$u_1 u_2 + u_2 u_1 = 0, \quad u_1 u_1 = u_2 u_2,$$

on aura: 135

$$ab + ba = 0.$$

De plus, l'expression $u_1 u_r + u_r u_1$ (r étant différent de 1 et 2) se changera en

$$au_r + u_r a = x_1(u_1 u_r + u_r u_1) + x_2(u_2 u_r + u_r u_2) = 0.$$

La même chose ayant lieu pour l'expression $u_2 u_r + u_r u_2$, il est clair que les équations (2) subsisteront encore dans l'hypothèse admise.

De l'autre côté, le carré $u_1 u_1$ se changera en

$$aa = x_1^2 u_1 u_1 + x_2^2 u_2 u_2 + x_1 x_2 (u_1 u_2 + u_2 u_1),$$

d'où, puisque $u_1 u_2 + u_2 u_1$ est égal à zéro, et $u_1 u_1 = u_2 u_2$, il vient:

$$aa = (x_1^2 + x_2^2) u_1 u_1,$$

donc, en vertu de l'équation $x_1^2 + x_2^2 = 1$, on a:

$$aa = u_1 u_1.$$

Il est donc évident que le système des équations (2) et (3) ne sera altéré par aucun changement circulaire positif. Mais comme ces équations ne cessent pas de subsister, quand on y change le *signe* d'une quantité quelconque y contenue, il est clair que le résultat obtenu aura encore lieu par rapport à un changement circulaire *négatif*, et conséquemment par rapport à un changement circulaire *quelconque*.

Troisièmement, supposons que l'équation (4) ait lieu, et admettons qu'on y applique le changement circulaire ci-dessus adopté; alors l'expression $u_1 u_1 + u_2 u_2 + \cdots + u_n u_n$ se changera en:

$$aa + bb + u_3 u_3 + \cdots + u_n u_n = (x_1^2 + x_2^2)(u_1 u_1 + u_2 u_2) + u_3 u_3 + \cdots + u_n u_n.$$

Donc, $x_1^2 + x_2^2$ étant égal à l'unité, il en résultera:

$$aa + bb + u_3 u_3 + \cdots + u_n u_n = u_1 u_1 + u_2 u_2 + u_3 u_3 + \cdots + u_n u_n = 0.$$

L'équation (4) ne sera donc altérée par *aucune* transformation circulaire.

Nous avons supposé jusqu'ici qu'il y ait plus de deux unités. Or il est facile de s'assurer que pour le cas de deux unités, on pourrait déduire les mêmes conséquences, quoique la marche nécessaire dans ce cas, s'écarte à quelques égards, de celle que nous venons de suivre.

Les résultats, auxquels on est arrivé, peuvent être énoncés par les propositions suivantes.

Théorème 4. Si d'abord il doit être permis de changer le signe de l'une quelconque des unités relatives, et de remplacer à volonté l'une 136 *par l'autre, et si ensuite il doit y avoir deux quantités, composées de deux unités au moyen de coefficients différents de zéro, et qui, étant substituées à ces unités, satisfont encore aux équations de condition: il est nécessaire que ces équations, pourvu qu'il y en ait, forment un ou plusieurs des trois systèmes suivants:*

[1] $$u_r u_s = u_s u_r,$$

[2] $$u_r u_s + u_s u_r = 0, \quad u_1 u_1 = u_2 u_2 = \cdots = u_n u_n,$$

[3] $$u_1 u_1 + u_2 u_2 + \cdots + u_n u_n = 0,$$

où les signes $u_1, u_2, \ldots, u_n$ représentent les unités relatives, et où r et s désignent deux quelconques différents des indices $1, 2, \ldots n$.

Théorème 5. Chacun des systèmes d'équations, établis dans le théorème précédent, continue de subsister, quand les unités sont transformées par des changements circulaires quelconques; et réciproquement: il n'y a en outre aucune transformation des unités qui laisse subsister tous ces systèmes.

Théorème 6. Il existe huit espèces de multiplication, dont les équations de condition continuent de subsister, quand on assujettit les unités à des transformations circulaires quelconques. On obtient les équations de condition relatives à chacune de ces multiplications, en choisissant entre les trois systèmes, assignés dans le théorème **5** *autant que l'on en voudra.*

Nous désignons les multiplications obtenues ici sous le nom de *multiplications circulaires*, tandis que les multiplications établies par les théorèmes **1, 2, 3** pourraient être appelées *multiplications symétriques*. Cependant il faut faire observer que les *huit* espèces de la multiplication *circulaire* font partie des *seize* espèces de la multiplication *symétrique*, en sorte que parmi celles-ci il n'y a que *huit* espèces, qui ne sont pas en même temps circulaires.

§ 5.

Multiplications linéales.

En troisième lieu, supposons qu'il soit permis de substituer aux unités des quantités qui en sont composées à volonté, sans que les équations de condition en soient altérées. Il est d'abord évident que les suppositions établies jusqu'ici, auront encore lieu dans ce cas. On peut donc recourir aux systèmes d'équations obtenus ci-dessus. Reprenons les quatre systèmes d'équations relatifs à la multiplication symétrique, savoir:

$$(1)\qquad u_1 u_2 = u_2 u_1,$$
$$(2)\qquad u_1 u_2 + u_2 u_1 = 0,$$
$$(3)\qquad u_1 u_1 = u_2 u_2 = \cdots = u_n u_n,$$
137
$$(4)\qquad u_1 u_1 + u_2 u_2 + \cdots + u_{nn} = 0,$$

et substituons à la place de l'unité u_1, la quantité a, supposée égale au polynôme $x_1 u_1 + x_2 u_2 + \cdots$, dont les coefficients $x_1, x_2, \ldots$ sont arbitraires.

Alors, en partant de l'équation (1), on aura:

$$a u_2 = x_1 u_1 u_2 + x_2 u_2 u_2 + x_3 u_3 u_2 + \cdots$$

d'où, en échangeant l'ordre des unités dans chaque terme du second membre (ce qui est permis en vertu de l'équation (1)), il résulte:

$$a u_2 = x_1 u_2 u_1 + x_2 u_2 u_2 + x_3 u_2 u_3 + \cdots =$$
$$= u_2 (x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 + \cdots) = u_2 a,$$

c'est à dire: l'équation (1) ne cesse pas de subsister, quand on y remplace l'une quelconque des unités par une quantité composée arbitrairement de toutes les unités.

Puis, en partant de l'équation (2), on obtiendra par la même substitution:

$$a u_2 + u_2 a = x_1 (u_1 u_2 + u_2 u_1) + 2 x_2 u_2 u_2 + x_3 (u_1 u_3 + u_3 u_1) + \cdots,$$

et comme tous les termes du second membre, excepté seulement le terme $2 x_2 u_2 u_2$, doivent s'évanouir en vertu des équations (2), il faudra, que ce terme $2 x_2 u_2 u_2$ s'évanouisse pareillement, pour que l'équation (2) puisse subsister encore après la substitution. Donc, puisque x_2 peut être supposé différent de zéro, on aura $u_2 u_2 = 0$; et par l'échange des indices:

$$u_1 u_1 = u_2 u_2 = \cdots = 0.$$

Or il est évident que ces équations résulteraient aussi de la combinaison des équations (3) et (4). Par suite nous en conclurons que dans l'hypothèse admise, les équations (2) entraîneront avec elles les équations (3) et (4).

En partant maintenant des équations (3), on aura:

$$a a = x_1^2 u_1 u_1 + x_1 x_2 (u_1 u_2 + u_2 u_1) + x_2^2 u_2 u_2 + \cdots.$$

Or d'après l'hypothèse, le carré aa doit être égal encore au carré $u_2 u_2$. On aura donc:

$$u_2 u_2 = x_1^2 u_1 u_1 + x_2^2 u_2 u_2 + x_1 x_2 (u_1 u_2 + u_2 u_1) + \cdots,$$

et puisque cette équation doit subsister, quelles que soient les valeurs des coefficients $x_1, x_2, \ldots$, on aura séparément:

$$u_1 u_1 = 0, \quad u_2 u_2 = 0, \quad u_1 u_2 + u_2 u_1 = 0, \quad \text{etc.};$$

c'est à dire: les équations (3) entraîneront les équations (2) et (4).

188 En partant enfin de l'équation (4) on aura:

$$0 = a^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2 =$$
$$= x_1^2 u_1^2 + (x_2^2 + 1) u_2^2 + \cdots + (x_n^2 + 1) u_n^2 + x_1 x_2 (u_1 u_2 + u_2 u_1) + \cdots,$$

d'où l'on tirera:

$$u_1^2 = u_2^2 = \cdots = 0,$$
$$u_1 u_2 + u_2 u_1 = 0, \quad \text{etc.}$$

En combinant les résultats, trouvés dans l'hypothèse établie, on peut énoncer la proposition suivante.

Théorème 7. S'il est permis de remplacer chaque unité, renfermée dans les équations de condition, par une quantité composée arbitrairement d'unités, sans que ces équations cessent de subsister: il faudra, que les équations de condition, pourvu qu'il y en ait, forment un des deux systèmes:

[1*] $$u_r u_s = u_s u_r,$$

[2*] $$u_1 u_1 = u_2 u_2 = \cdots = 0, \quad u_1 u_2 = - u_2 u_1, \ldots,$$

ou bien qu'elles en soient combinées.

Nous désignons les multiplications établies dans ce théorème sous le nom de *multiplications linéales*, parce que, étant appliquées à la Géométrie, elles s'effectuent par des constructions *linéales*, sans qu'il faudrait recourir au *cercle*. Il est évident qu'il y aura, pour parler exactement, quatre espèces de multiplication linéale, et qu'il y restera égalément quatre multiplications circulaires, qui ne sont pas en même temps linéales. Cependant parmi les quatre multiplications linéales il y en a une que l'on peut rejeter entièrement, parceque tous les produits en seraient égaux à zéro. Ce serait celle où les deux systèmes d'équations, établis ci-dessus, auraient lieu conjointement. De même, la multiplication qui n'est assujettie à aucune condition, peut être rejetée, parcequ'elle ne paraît pas fournir des applications remarquables. Il nous restera donc deux multiplications linéales, dont l'une est assujettie aux équations [1*] et l'autre aux équations [2*]. L'une et l'autre est de la plus grande importance, tant pour l'analyse que pour la géométrie, la mécanique et la physique en général; l'une et l'autre peut d'ailleurs être étendue sans aucune difficulté à autant de facteurs que l'on voudra. La première, qui jouit de la propriété, que le produit est indépendant de l'ordre dans lequel se suivent les facteurs, est identique, quant aux opérations, à la multiplication employée dans

l'analyse algébrique, et sera appelée pour cela *multiplication* † *algébrique;* l'autre est celle que j'ai appelée *multiplication extérieure*, et qui fait l'objet principal de mon ouvrage cité plus haut. C'est par elle qu'on est en état d'effectuer avec la plus grande facilité l'élimination des inconnues entre des équations, tant linéaires que non-linéaires, et de résoudre tout à coup un grand nombre de problèmes de géométrie, ainsi que de mécanique, difficiles à résoudre autrement; comme je l'ai fait voir déjà en 1844 et comme Mrs. Cauchy et de Saint-Venant l'ont proposé récemment, sans y ajouter rien de nouveau. Cependant, ayant publié plusieurs applications de cette multiplication non seulement dans l'ouvrage cité, mais aussi dans le journal de M. Crelle (Tomes 31, 36, 42, 44*)) je peux me dispenser d'entrer dans plus de détail à ce sujet. 139

A l'égard de la multiplication algébrique, les règles d'opération en sont connues; mais il n'en est pas de même quant à l'application de cette multiplication à des quantités qui ne sont pas tout à fait algébriques; par exemple, s'il s'agit de multiplier algébriquement, non les grandeurs des lignes, mais les lignes elles-mêmes, données en grandeur et direction, ou bien des points quelconques. Pour mettre en évidence l'avantage de cette multiplication, nous remarquerons par exemple que, les lettres a, b, c, d, e, f, g, h, i désignant neuf points quelconques d'une courbe du troisième ordre, et x un dixième point de cette courbe, on obtiendra pour équation de cette courbe celle-ci:

$$a^3 . b^3 . c^3 . d^3 . e^3 . f^3 . g^3 . h^3 . i^3 . x^3 = 0,$$

équation, dans laquelle chaque exposant se rapporte à la multiplication algébrique, en sorte que la puissance $a^3 = aaa$ désigne un produit algébrique de trois facteurs, dont chacun est égal au point a, et ainsi de suite, et dans laquelle les diverses puissances sont multipliées l'une par l'autre au moyen de la multiplication extérieure. Une proposition analogue aura lieu par rapport à toute courbe algébrique. De plus, à l'aide de la multiplication algébrique, appliquée à des quantités extensives, on peut réduire toute fonction de plusieurs variables à une fonction d'une seule variable, et appliquer directement la plupart des théorèmes démontrés pour des fonctions d'une seule variable, à des fonctions d'un nombre quelconque de variables. Enfin, par cette multiplication, on est en état d'appliquer immédiatement tous les théorèmes analytiques aux fonctions de quantités purement géométriques; comme de points etc.

---

*) {Hier S. 49, 73, 80, 109.}

§ 6.

Deux cas importants de multiplications circulaires.

Parmi les quatre multiplications, proprement dites *circulaires*, il y en a deux qui sont d'un grand usage dans l'analyse, dans la géométrie, et surtout dans la mécanique. Ce sont celles, dont les produits sont 140 indépendants de † l'ordre des facteurs, et dont l'une d'ailleurs est assujettie aux équations [2] du théorème 4, et l'autre à l'équation [3] du même théorème.

La première est déterminée par les équations

$$u_r u_s = 0, \text{ où l'index } r \text{ est différent de } s,$$

et

$$u_1 u_1 = u_2 u_2 = \cdots.$$

Je l'ai appelée *multiplication intérieure*, (voyez „*Ausdehnungslehre*" pag. *XI*, {diese Ausgabe I, 1, S. 11} et surtout „*Geometrische Analyse*", gekrönte Preisschrift, Leipzig 1847, pag. 17—57 {diese Ausgabe I, 1, S. 345—395}, où j'ai donné des applications à la géométrie et à la mécanique) en voulant exprimer par ce mot le rapport particulier qui existe entre elle et la multiplication extérieure. Pour trouver ce rapport, prenons pour unités trois lignes perpendiculaires et égales en grandeur l'une à l'autre, et projetons une ligne quelconque, désignée par la lettre a sur deux autres lignes b et c, supposées perpendiculaires l'une à l'autre; soient b_1 et c_1 ces projections: alors il est facile de s'assurer que le produit *intérieur* des deux lignes a et b sera égal au produit ab_1, tandis que le produit *extérieur* des mêmes lignes sera égal au produit ac_1; donc parceque les lignes a et b_1 sont situées l'une *dans* l'autre, et que les lignes a et c_1 sont situées l'une *au dehors* de l'autre, il sera convenable de désigner ces produits sous les noms que je leur ai données.

L'autre multiplication circulaire est déterminée par les équations

$$u_r u_s = u_s u_r$$

et

$$u_1 u_1 + u_2 u_2 + \cdots + u_n u_n = 0.$$

Cette multiplication remarquable est représentée, si l'on ne suppose que deux unités relatives, par la multiplication de deux quantités *complexes*, telles que $a + b\sqrt{-1}$ et $c + d\sqrt{-1}$. En effet, il sera permis de regarder l'unité absolue et l'unité imaginaire $\sqrt{-1}$ comme des unités relatives, pourvu que l'on n'en compose des quantités qu'au moyen de coefficients réels. Alors, en désignant l'unité imaginaire $\sqrt{-1}$ par la lettre i, on aura

$$1 + i^2 = 0,$$

et le produit sera en outre indépendant de l'ordre des facteurs. Donc les équations

$$u_1 u_2 = u_2 u_1 \quad \text{et} \quad u_1 u_1 + u_2 u_2 = 0$$

auront lieu au cas où u_1 est $= 1$ et $u_2 = \sqrt{-1}$. Pour cette raison, on pourrait désigner cette multiplication sous le nom de *multiplication complexe*.

Il est bon de remarquer que l'une ou l'autre de ces multiplications circulaires s'appliquera en géométrie et en mécanique à tous les problèmes qui se rapportent d'une manière quelconque au *cercle*, ou à *l'angle*, ou à la *grandeur des lignes*, séparée de leur direction, et aux aires des surfaces situées dans l'espace. Et il sera facile de voir que dans tous ces cas, l'emploi des multiplications linéales ne suffira pas pour résoudre les problèmes. 141

Il nous resterait encore à discuter les huit multiplications symétriques qui ne sont pas en même temps circulaires. Mais nous remarquons que ces multiplications ne sont d'aucun usage, ni dans l'analyse, ni dans la géométrie, et que nous n'en aurions fait aucune mention, s'il ne nous eût pas paru convenable, d'en partir, pour établir les divers genres de la multiplication circulaire.

Stettin le 5 février 1854.

XIV.

Die lineale Erzeugung von Kurven dritter Ordnung.

Von

Prof. **H. Grassmann,**
Oberlehrer am Gymnasio zu Stettin.

Crelle's Journal Bd. 52, Heft 3 (1856).

254 Im 31. Bande (S. 122 f. {hier S. 62 f.}) und im 36. Bande dieses Journals (S. 177 f. {hier S. 74 f.}) habe ich drei möglichst einfache Methoden angegeben, um sämtliche Kurven dritter Ordnung durch Bewegung gerader Linien um feste oder geradlinig bewegliche Punkte zu erzeugen. Es wurden diese Methoden durch die drei Gleichungen:

$$xaBcDxD_1c_1B_1a_1x = 0, \quad (1)$$

$$xaAa_1 \,.\, xbBb_1 \,.\, xc = 0, \quad (2)$$

$$xaA \,.\, xbB \,.\, xcC = 0, \quad (3)$$

dargestellt, in welchen die kleinen Buchstaben Punkte, die grossen gerade Linien, x den die Kurve konstruirenden Punkt bezeichnen, und in welchen die Multiplikation *planimetrisch* ist. Ich habe dort streng und ausführlich nachgewiesen, dass die *beiden ersten* Methoden *allgemein* sind, das heisst, dass sich *jede* Kurve dritter Ordnung durch *jede* dieser Methoden erzeugen lasse; und zwar die erste auch dann, wenn man B und B_1 zusammenfallen lässt, wogegen ich für die dritte Methode dort den Beweis nur mehr andeutete als ausführte (Bd. 36, S. 180 {hier S. 77}).

Hr. Prof. Bellavitis behauptet nun in einem Aufsatze (unter dem Titel: Sopra un algoritmo proposto per esprimere gli allineamenti etc., Venezia 1855), welchen er mir zuzuschicken die Güte gehabt hat, es sei *keine* jener Methoden *allgemein*, sondern es liessen sich durch jede derselben nur ganz *specielle* Kurven dritter Ordnung erzeugen; nämlich nur solche, die durch sieben oder gar durch sechs Punkte bestimmt

werden, und die daher von noch speciellerer Natur seien als die durch acht Punkte bestimmte Doppeltpunktskurve; dagegen sei Chasles der erste, welcher (Compte rendu, 30 mai 1853) ein solches Problem gelöst habe. Dies und die freie Darstellung des Algorithmus, wie ich ihn in Band 31, 36, 42, 44 dieses Journals {hier S. 49—135} entwickelt, sowie der Rechnungsregeln, welche ich dort für diesen Algorithmus mitgetheilt habe, bildet den Inhalt des genannten Aufsatzes. Der Einwurf musste für mich um so bedeutender sein, da Hr. Bellavitis diesen Algorithmus selbständig behandelt † und damit Resultate 255 erzielt. Ich glaube es daher mir und dem Gegenstande schuldig zu sein, denselben noch einmal aufzunehmen und namentlich auch die Allgemeinheit der dritten Methode streng nachzuweisen. Zugleich werde ich zeigen, dass sich nicht nur jede beliebige lineale Erzeugung der Kurven dritter Ordnung auf die zweite Methode direkt zurückführen lässt, sondern dass sich auch aus neun beliebig gegebenen Punkten die Konstanten der Gleichung (2) so bestimmen lassen, dass die durch diese Gleichung dargestellte Kurve durch jene neun Punkte geht; das heisst, ich werde die linealen Eigenschaften eines *Zehnecks*, welches einer Kurve dritter Ordnung eingeschrieben ist, aus einer Gleichung von jener Form ableiten. Gelegentlich werde ich dann auch die Fehlschlüsse angeben, auf welchen der Einwurf des Hrn. Bellavitis beruht.

§ 1.

Die wichtigsten Rechnungsregeln der planimetrischen Multiplikation.

Im folgenden, wie in den früheren Aufsätzen, sollen stets die *Punkte* mit *kleinen*, die *geraden Linien* mit *grossen* Buchstaben bezeichnet werden, und jene „Elemente erster Stufe“, diese „Elemente zweiter Stufe“ heissen, während ich die *Zahlen* „*Grössen nullter* Stufe“ nennen werde. Ich werde vorzugsweise solche Gleichungen betrachten, deren eine Seite Null und deren andere Seite ein Produkt ist, in welchem die Summe der Stufenzahlen aller darin enthaltener Faktoren durch *drei* theilbar ist und in welchem überhaupt keine andere Verknüpfung vorkommt als nur planimetrische Multiplikation. Eine solche Gleichung drückt, wenn nicht einer der Faktoren Null ist, stets aus, dass ein bestimmter Punkt in einer bestimmten geraden Linie liegt. So zum Beispiel drückt die Gleichung

$$Ab = 0$$

aus, dass der Punkt b in der geraden Linie A liegt. Hr. Bellavitis braucht hiefür das Wort *Kongruenz*, was aber nicht ganz angemessen sein dürfte, da ein Punkt nicht mit einer geraden Linie *kongruent*

genannt werden kann. Ich werde mich, wo es auf einen kurzen Namen ankommt, des entsprechenden Wortes *Incidenz* bedienen, sodass also die obige Gleichung, welche ausdrückt, dass b in A fällt oder b mit A *incident* ist, eine *Incidenz* heissen soll, während ich für das Zusammenfallen *zweier Punkte* oder *zweier gerader Linien* das Wort *Kongruenz* beibehalte, für welches Hr. Bellavitis ohne Noth *Koïncidenz* setzt. Dass Hr. Bellavitis jene Gleichung überdies in der Form

$$Ab \parallel 0$$

256 schreibt, ist eine Veränderung der Bezeichnung, welche nicht bloss überflüssig, sondern auch, wenn das Zeichen $\parallel$ nicht denselben Sinn haben soll wie jedes Gleichheitszeichen, unrichtig genannt werden muss. (Man sehe meine Ausdehnungslehre, wo sich die Gleichheit planimetrischer Produkte sowie ihre Addition und so weiter im weitesten Sinne behandelt findet.)

Die wichtigsten Rechnungsregeln, deren ich mich im Folgenden bedienen will und bei deren Anwendung ein Produkt sich selbst kongruent bleibt, werde ich hier kurz zusammenstellen, indem ich mich dabei auf meine früheren Aufsätze berufe.

Regel 1. Die Stufenzahl eines *planimetrischen* Produkts ist der Summe der Stufenzahlen seiner Faktoren kongruent, in Bezug auf den Modul 3. (Man sehe den entsprechenden Satz für das *stereometrische* Produkt in diesem Journal Bd. 49, S. 12 {hier S. 147}).

Regel 2. Zwei Elemente von gleicher Stufe, welche entweder die ersten Faktoren eines Produkts sind oder auf einen ersten Faktor derselben Stufe folgen, können unter sich vertauscht werden und geben Null, wenn sie einander kongruent sind (Bd. 42, S. 194 {hier S. 87}), zum Beispiel:

$$ab \equiv ba, \quad AB \equiv BA, \quad abc \equiv acb, \quad ABC \equiv ACB,$$
$$aa = AA = abb = ABB = 0.$$

Regel 3. In einem Produkt nullter Stufe (siehe Regel 1) kann man eine schliessende Klammer weglassen, wenn man zugleich die Ordnung sämtlicher frei in der Klammer stehenden (das heisst nicht von einer neuen Klammer umschlossenen) Faktoren umkehrt; oder, anders ausgedrückt: Man kann in einem Produkt nullter Stufe eine Schlussklammer setzen, wenn man die Ordnung sämtlicher frei in die Klammer tretender Faktoren umkehrt (Bd. 44, S. 5 {hier S. 115}), zum Beispiel:

$$ab\,CdEfg \equiv a(gfEdCb).$$

Zusatz. Man kann auch die Ordnung sämtlicher Faktoren eines Produkts nullter Stufe umkehren (ebenda), zum Beispiel:

$$abCdEfg \equiv gfEdCba.$$

Regel 4. Zwei einander *incidente* Faktoren, welche auf einander folgen, können vertauscht werden (Bd. 42, S. 194 {hier S. 87, 88}), zum Beispiel:

$$abC \equiv aCb, \quad \text{wenn} \quad bC = 0.$$

Regel 5. Ein Faktor nullter Stufe (siehe Regel 1) kann, wenn er nicht Null ist, weggelassen werden (Bd. 42, S. 194 {hier S. 87}), zum Beispiel (siehe Regel 4):

$$aCb \equiv b, \quad \text{wenn} \quad aC \gtrless 0 \quad \text{ist.}$$

Regel 6. Wenn in einem Produkte zwischen zwei kongruenten 257 Elementen ein Element von anderer Stufe steht, so kann man es mit einem der beiden andern zusammen weglassen, falls nicht Incidenz zwischen ihnen stattfindet. Zum Beispiel:

$$abCb \equiv ab, \quad \text{wenn} \quad Cb \gtrless 0 \quad \text{ist.}$$

Beweis. $abCb \equiv C(ab)b$ (Regel 2) $\equiv Cb(ab)$ (Regel 4) $\equiv ab$ (Regel 5), wenn $Cb \gtrless 0$.

Regel 7. Wenn ein Produkt mit vier Faktoren gleicher Stufe beginnt, von denen die zwei letzten von einer Klammer umschlossen sind und einer der zwei letzten kongruent ist mit einem der zwei ersten, so kann man statt aller vier Faktoren einen der beiden kongruenten setzen, falls nicht das Produkt der drei übrigen Null ist (Ausdehnungslehre. Leipzig 1844. § 133 {Ges. Werke I, 1, S. 219}), zum Beispiel:

$$ab(ac) \equiv a, \quad \text{wenn} \quad abc \gtrless 0.$$

Denn $ab(ac) \equiv ba(ac)$ (Regel 2) $\equiv b(ac)a$ (Regel 4) $\equiv a$ (Regel 5), wenn $acb \gtrless 0$ ist.

Regel 8. Wenn das Produkt zweier Elemente, deren eines wieder aus zwei Faktoren besteht, gleich Null gesetzt ist, so ist diese Gleichung gleichbedeutend mit dem Vereine zwei anderer Gleichungen, die man aus jenen erhält, wenn man von den letztgenannten Faktoren einmal den einen, dann den andern auslässt; zum Beispiel die Gleichung

$$abC = 0$$

ist, wenn ab ein Element (also nicht Null) ist, gleichbedeutend mit dem Vereine der beiden Gleichungen

$$aC = 0, \quad bC = 0.$$

Regel 9. Eine *Incidenz*, welche in Bezug auf x vom n-ten Grade ist, bestimmt als geometrischen Ort von x eine Linie n-ter Ordnung (Bd. 31, S. 119 {hier S. 58}).

§ 2.

Deutung der Gleichung (3).

Die Gleichung (3)

$$xaA \, . \, xbB \, . \, xcC = 0$$

ist in Bezug auf x vom dritten Grade; also ist (Regel 9) der geometrische Ort von x eine *Linie dritter Ordnung*. Der Ausdruck xaA stellt den Durchschnittspunkt der geraden Linien xa und A dar, und 258 da das Produkt dreier † Punkte dann und nur dann Null ist, wenn die drei Punkte in gerader Linie liegen, so enthält obige Gleichung folgenden, schon (Bd. 36 {hier S. 74}) mitgetheilten Satz:

Der geometrische Ort eines Punkts, dessen Verbindungslinien mit drei festen Punkten drei feste gerade Linien so schneiden, dass die drei Durchschnittspunkte in gerader Linie liegen, ist eine Kurve dritter Ordnung.

Die Kurve geht, wie ich (Bd. 31, S. 125 {hier S. 66}) nachgewiesen habe, durch folgende neun Punkte:

$$a, \; b, \; c, \; BC, \; CA, \; AB, \; bcA, \; caB, \; abC,$$

die ich beziehlich mit

$$a, \; b, \; c, \; a_1, \; b_1, \; c_1, \; \alpha, \; \beta, \; \gamma$$

bezeichne. Es haben also die beiden Dreiecke abc und $a_1b_1c_1$ die Eigenschaft, dass sich ihre entsprechenden Seiten in den Punkten α, β, γ treffen; nämlich bc trifft die Seite b_1c_1 oder A in dem Punkte α, ca die Seite c_1a_1 oder B in β und ab die Seite a_1b_1 oder C in γ. Folglich ist es, damit sich eine Kurve dritter Ordnung mittels der Gleichung (3) darstellen lasse, nothwendig, dass man ihr zwei Dreiecke abc und $a_1b_1c_1$ einschreiben könne, deren entsprechende Seiten sich in drei Kurvenpunkten α, β, γ schneiden. Um auf rein geometrische Weise zu zeigen, dass dies bei jeder Kurve dritter Ordnung möglich sei, will ich einige Sätze über diese Kurven voranschicken.

§ 3.

Ueber den Gang der Kurven überhaupt und der Kurven dritter Ordnung insbesondere.

Satz 1. Definition. Ich sage, ein Punkt, welcher sich in einer Ebene bewegt, bewege sich *stetig*, wenn die gerade Linie, welche von irgend einem Punkte ausserhalb der Ebene nach ihm gezogen wird, bei jener Bewegung niemals aus einer Lage unmittelbar in eine andere übergeht, welche mit jener einen *endlichen Winkel* bildet.

Bemerkung. So lange der Punkt in endlicher Entfernung bleibt, lässt sich seine stetige Bewegung auch dadurch bestimmen, dass er bei jener Bewegung niemals aus einer Lage in eine andere übergeht, welche um eine *endliche Strecke* von jener entfernt liegt.

Satz 2. Definition. Wenn ein Punkt von einer beliebigen Lage aus sich *stetig* so bewegt, dass er keinen Punkt seiner früheren Bahn berührt, bis er wieder in seine ursprüngliche Lage zurückkommt, so nenne ich diese Bahn einen *Zug* und sage, der Punkt habe diesen *Zug* einmal durchlaufen.

Bemerkung. In diesem Sinne wird man zum Beispiel sagen können, 259 dass jeder Kegelschnitt, der nicht in zwei gerade Linien zerfällt, aus *einem* Zuge bestehe.

Satz 3. Jede Projektion eines Zuges ist wieder ein *Zug.*

Satz 4. Jede Kurve dritter Ordnung besteht entweder aus zwei Zügen oder aus nur einem Zuge oder aus einem Zuge und einem isolirten Punkt, und zwar sind die drei reellen Wendepunkte jedesmal in *einem* Zuge enthalten.

Beweis. Es geht dies am deutlichsten aus den fünf von Newton aufgestellten divergirenden *Parabeln* hervor, durch deren Projektion alle Kurven dritter Ordnung erzeugt werden können (Newton, Enumeratio linearum tertii ordinis, pag. 92, 93). Die Kurve mit einem Kreuzpunkte muss nach der aufgestellten Definition als aus zwei Zügen bestehend angesehen werden, welche in dem Kreuzpunkte zusammenstossen. Eine in gerade Linien zerfallende Linie höherer Ordnung rechne ich nicht zu den *Kurven.*

Satz 5. Wenn eine gerade Linie, die sich um einen festen Punkt stetig bewegt, eine algebraische Kurve schneidet, so kann die stetige Fortbewegung der Durchschnittspunkte nur gleichzeitig bei zweien dieser Punkte aufhören.

Bemerkung. Alle diese Sätze sind entweder bekannt oder unmittelbar einleuchtend.

Satz 6. Zieht man von irgend einem festen Punkte einer Kurve dritter Ordnung, der aber nicht ein Doppelpunkt ist, eine Gerade nach einem beweglichen Punkte, welcher einen Zug der Kurve einmal durchläuft, so durchläuft auch der dritte Punkt, in welchem jene Gerade die Kurve trifft, einen *Zug* derselben einmal.

Beweis. Es sei a der *feste* Punkt, p der *bewegliche,* welcher einen Zug der Kurve einmal durchläuft, und q der dritte *Durchschnittspunkt* von ap mit der Kurve. Zu zeigen ist, dass auch q einen Zug der Kurve einmal durchläuft. *Erstens* kann während jener Bewegung q nicht unbeweglich bleiben, weil sonst a ein Doppelpunkt wäre; *zweitens*

kann aber q nie aufhören, sich stetig zu bewegen, weil sonst, nach Satz 5, auch einer der beiden andern Punkte p oder a aufhören müsste, sich stetig zu bewegen. Für p ist dies gegen die Annahme; für a ist es gleichfalls nicht möglich, da sich a nach der Annahme gar nicht bewegt. *Drittens* kann aber auch q nicht einen früheren Punkt seiner Bahn, etwa den Punkt q', wieder berühren; denn es sei 260 p' der Punkt, in welchem aq' die Kurve ausser {in} a und q' trifft, so ist p' der Punkt, in welchem sich beidemale p befunden haben müsste, während q sich in q' befindet; also müsste auch p in p' wieder einen Punkt seiner früheren Bahn berührt haben; gegen die Annahme. Endlich, wenn p wieder zu seiner Anfangslage zurückkehrt, so kehrt auch q zu ihr zurück; also durchläuft q während jener Bewegung die Kurve einmal.

Satz 7. Die Anzahl der Punkte, in welchen eine algebraische Kurve den Umfang einer geschlossenen Figur schneidet, ist stets eine *gerade*.

Beweis. Da jeder Zweig einer algebraischen Kurve entweder in sich geschlossen ist oder nach beiden Seiten ins Unendliche hin sich erstreckt, so muss jeder Zweig, der in das Innere der Figur hineingeht, auch wieder aus demselben herausgelangen; mithin muss die Anzahl der Kurvenstücke, welche den Umfang schneiden, *gerade* sein, folglich auch die Anzahl der Punkte, in welchen die Kurve den Umfang schneidet, indem, wenn m Kurvenzweige durch denselben Punkt des Umfangs gehen, dieser als ein m-facher Punkt gerechnet wird.

§ 4.

Entsprechende Dreiecke, welche einer Kurve dritter Ordnung eingeschrieben sind.

Wenn die Richtung, in welcher eine gerade Linie in einer Ebene durchlaufen wird, bekannt ist, so ist dadurch auch ihre *rechte* oder *linke Seite* bestimmt. Ich sage, ein Punkt c liege von der geraden Linie ab aus nach *rechts*, wenn man, um auf zwei geradlinigen Wegen von a über b nach c zu gelangen, nach *rechts* hin abbiegen muss.

Satz 8. Wenn eine gerade Linie (pq) sich um einen festen Punkt (c) dreht und zwei Punkte in ihr $(p$ und $q)$ sich in zwei festen Geraden $(A$ und $B)$ bewegen, welche während der Bewegung nie mit jener beweglichen geraden Linie (pq) zusammenfallen, so bewegen sich beide Punkte $(p$ und $q)$ von der beweglichen Linie aus nach *derselben* Seite, wenn der Drehpunkt (c) *ausserhalb* dieser Punkte liegt, und nach entgegengesetzter, wenn *innerhalb*.

Satz 9. Wenn die Schenkel eines Winkels (cqa) sich um zwei feste Punkte (c und a) drehen und der Scheitelpunkt desselben (q) sich in einer festen geraden Linie (B) bewegt, welche während der Bewegung mit keinem der Schenkel zusammenfällt, so bewegt sich der Scheitelpunkt (q) von den beiden Schenkeln (cq und aq) aus nach *derselben* Seite, wenn die gerade † Linie (B) nicht in den Winkel hinein- 261 geht, und nach *entgegengesetzten* Seiten, wenn sie hineingeht.

Nach diesen vorbereitenden Sätzen, von welchen die beiden letzten keines Beweises bedürfen, schreite ich nun zu dem Hauptsatze:

Satz 10. Zu jedem Dreiecke abc, welches einer Kurve dritter Ordnung eingeschrieben ist und dessen Seiten nicht *Tangenten* sind, giebt es ein, aber auch *nur ein* entsprechendes Dreieck $a_1 b_1 c_1$, dessen Seiten die entsprechenden des ersteren in Punkten der Kurve schneiden und von dessen Ecken jede mit der entsprechenden in demselben Kurvenzuge liegt.

Beweis. Es seien α, β, γ die Punkte, in welchen die Seiten bc, ca, ab beziehlich die Kurve zum drittenmale schneiden, und A, B, C seien die Tangenten der Kurve in den Punkten a, b, c. Nun bewege sich von a aus ein Punkt p auf der Kurve, also von a aus in der Richtung der Tangente A. Man ziehe die gerade Linie γp, welche die Kurve zum drittenmale in q treffen mag, so bewegt sich q von b aus in der Richtung der Tangente B. Ferner ziehe man die gerade Linie αq, welche die Kurve zum drittenmale in r treffen mag, so bewegt sich r von c aus in der Richtung der Tangente C. Endlich ziehe man die gerade Linie βr, welche die Kurve zum drittenmale in p_1 treffen mag, so bewegt sich p_1 von a aus in der Richtung der Tangente A. Auch p bewegte sich von demselben Punkte a aus in der Richtung derselben Tangente A. Es lässt sich aber leicht zeigen, dass p und p_1 von a aus nach entgegengesetzten Seiten sich bewegen. In der That, wenn m von den drei Punkten α, β, γ innerhalb der Seiten des Dreiecks abc liegen und n von den drei Tangenten A, B, C nicht in das Dreieck abc hineingehen, so werden, da der Annahme gemäss die Seiten des Dreiecks abc keine Tangenten sind, $3 - n$ von den Tangenten A, B, C in das Dreieck hineingehen, ebenso aber diejenigen m Curventheile, welche die (unverlängerten) Seiten des Dreiecks treffen. Also wird, nach Satz 7, $m + 3 - n$ eine *gerade* Zahl sein, folglich $m - n$ eine *ungerade*, mithin auch $m + n$ eine ungerade Zahl sein.

Betrachtet man nun der Reihe nach die Seiten (rechte oder linke), nach welchen sich p und q von ab aus, q und r von bc aus, r und p_1 von ca aus und p_1 von ab aus bewegen, {so} zeigt sich klar, nach Satz 8, dass p und q von ab aus dann und nur dann nach entgegengesetzten

Seiten sich bewegen, wenn γ innerhalb der Seite ab liegt; dasselbe gilt für die Bewegung von q und r von bc aus und für die von r und p_1 von ca aus. Ferner wird q, nach Satz 9, von ab und bc aus 262 sich dann und nur dann nach † entgegengesetzten Seiten bewegen, wenn die Tangente B nicht in das Dreieck hineingeht; und dasselbe gilt für die Bewegung des Punktes r von bc und ca aus sowie des Punktes p_1 von ca und ab aus. Folglich wird sich die Seite, nach welcher die Bewegung in den sieben oben genannten Fällen erfolgt, $(m+n)$-mal umkehren, also, da $m+n$ *ungerade* ist, im siebenten Falle *entgegengesetzt* sein wie im ersten; das heisst: p_1 bewegt sich von ab aus nach entgegengesetzter Seite wie p.

Lässt man nun den Punkt p von a aus den ganzen Kurvenzug, in welchem a liegt, einmal durchlaufen, so durchläuft, nach Satz 6, der Punkt q gleichfalls einen Zug der Kurve einmal, und weil q, so auch r, und weil r, so auch p_1. Folglich durchlaufen p und p_1 von a aus nach entgegengesetzten Seiten den Zug, in welchem a liegt, einmal, müssen sich also in einem zweiten Punkte dieses Zuges begegnen, aber auch in keinem dritten. Es sei a_1 dieser Punkt; und mögen q und r, während p in a_1 übergeht, in b_1 und c_1 übergehen, so ist $a_1b_1c_1$ das entsprechende Dreieck, dessen Seiten die entsprechenden des Dreiecks abc in den Kurvenpunkten α, β, γ schneiden und dessen Ecken mit den entsprechenden in denselben Kurvenzügen liegen. Ausser ihm giebt es kein anderes Dreieck dieser Art, q. d. e.

Zusatz. Wenn die drei Punkte (α, β, γ), in welchen die Seiten eines Dreiecks (abc) die Kurve zum drittenmale schneiden, in gerader Linie liegen und jeder dieser Punkte mit der gegenüberliegenden Ecke (α mit a, β mit b, γ mit c) in demselben Kurvenzuge liegt, so streckt sich das jenem Dreieck entsprechende {Dreieck} in die gerade Linie, welche jene drei Punkte (α, β, γ) verbindet, aus; und es giebt dann ausserdem kein Dreieck, welches dem gegebenen (abc) in der genannten Weise entspricht.

§ 5.

Allgemeinheit der Kurven dritter Ordnung, welche durch die Gleichung (3) dargestellt werden.

Es sei eine beliebige Kurve dritter Ordnung gegeben. Um sie auf die Gleichung (3) zurückzuführen, zeichne man in demjenigen Zuge derselben, der die Wendepunkte enthält, ein beliebiges Dreieck, dessen Seiten jedoch nicht Tangenten sind; dann müssen die dritten Durchschnittspunkte der Seiten und der Kurve in *demselben* Zuge liegen. Sollten diese drei Durchschnittspunkte etwa in gerader Linie liegen,

so ist nach obigem Zusatze das angenommene Dreieck das einzige demselben Zuge eingeschriebene, dessen Seiten † durch jene drei Durch- 263 schnittspunkte gehen. Verändert man also in dem genannten Zuge das Dreieck auf beliebige Weise, jedoch so, dass zwei seiner Seiten durch zwei jener Durchschnittspunkte gehen, so kann die dritte Seite nicht den dritten Durchschnittspunkt treffen.

Hat man nun das Dreieck so angenommen, dass seine Seiten nicht Tangenten sind, so hat man in jedem Falle ein Dreieck abc erlangt, dessen Seiten, ohne Tangenten zu sein, die Kurve zum drittenmale in drei Punkten α, β, γ schneiden, welche nicht in gerader Linie liegen.

Jetzt konstruire man das entsprechende Dreieck $a_1 b_1 c_1$, dessen Seiten sich mit den entsprechenden des Dreiecks abc in den Kurvenpunkten α, β, γ schneiden. Dies ist nach § 4 stets möglich. Man setze $b_1 c_1 \equiv A$, $c_1 a_1 \equiv B$, $a_1 b_1 \equiv C$, so ist der geometrische Ort eines Punktes x, welcher der Gleichung

$$xaA \,.\, xbB \,.\, xcC = 0 \tag{3}$$

genügt, eine Kurve dritter Ordnung, welche mit der gegebenen die neun Punkte a, b, c, a_1, b_1, c_1, α, β, γ gemein hat. Es bleibt also nur noch zu zeigen, dass diese neun Punkte von der Art sind, dass durch sie eine Kurve dritter Ordnung vollkommen bestimmt wird, das heisst, dass zwei Kurven dritter Ordnung, deren jede durch diese neun Punkte geht, mit einander zusammenfallen.

Zu dem Ende berufe ich mich auf folgenden allgemein bekannten Satz:

Wenn zwei Linien dritter (n-ter) Ordnung sich in neun (in n^2), aber auch nicht in mehr Punkten treffen, und man nimmt zu acht (zu $\frac{1}{2}n(n+3)-1$) derselben einen Punkt hinzu, welcher nicht jenen beiden Linien dritter (n-ter) Ordnung gemein ist, so wird durch diese neun (durch diese $\frac{1}{2}n(n+3)$) Punkte eine Linie dritter (n-ter) Ordnung unter allen Umständen vollkommen bestimmt.

Legt man nun durch die drei Punkte b, c, α eine Gerade, ferner eine zweite Gerade durch die drei Punkte c_1, a_1, β und eine dritte Gerade durch die drei Punkte a, γ, b, so bildet der Verein dieser drei Geraden eine Linie dritter Ordnung, welche mit der gegebenen Kurve dritter Ordnung ausser den genannten Punkten, unter denen b, als Doppelpunkt der einen, zweimal gerechnet werden muss, keinen Punkt weiter gemein hat, weil jede Kurve dritter Ordnung von einer geraden Linie in nicht mehr als drei Punkten getroffen werden kann. Der Punkt b_1 kann nun in keiner jener drei Geraden liegen, weil sonst diese Gerade die Kurve in vier Punkten treffen würde; also ist b_1 nicht beiden Linien dritter Ordnung gemein, während die übrigen acht Punkte

264 $a, b, c, a_1, c_1, \alpha, \beta, \gamma$ beiden gemein sind. Somit wird nach dem angeführten Satze durch die neun Punkte $a, b, c, a_1, b_1, c_1, \alpha, \beta, \gamma$ eine Linie dritter Ordnung vollkommen bestimmt; das heisst, zwei Linien dritter Ordnung, welche diese neun Punkte gemein haben, sind *identisch;* also ist die gegebene Kurve mit dem durch die obige Gleichung (3) bestimmten geometrischen Orte des Punkts x *identisch;* folglich lässt sich jede Kurve dritter Ordnung durch eine Gleichung von der Form (3) darstellen. Das heisst:

Jede Kurve dritter Ordnung lässt sich als geometrischer Ort eines Punktes erzeugen, dessen Verbindungslinien mit drei festen Punkten drei feste gerade Linien in drei Punkten schneiden, die in gerader Linie liegen; und zwar kommt es zu dem Ende nur darauf an, das Dreieck der festen Punkte und das der festen Geraden so anzunehmen, dass sie der Kurve eingeschrieben sind und dass die entsprechenden Seiten beider auf der Kurve sich begegnen.

Bemerkung. Hr. Bellavitis behauptet, dass sich durch die Gleichung (3) nur solche Kurven dritter Ordnung darstellen lassen, welche schon durch sechs beliebige Punkte bestimmt sind, das heisst, welche schon bestimmt sind, wenn nur sechs Punkte gegeben sind, durch welche sie gehen sollen. An diesem Resultate hätte Hr. Bellavitis schon um deswillen sich stossen sollen, weil es keine Kurve dritter Ordnung giebt, die durch sechs Punkte auf lineale Weise bestimmt wird.

Die Art, wie er zu seinem Resultate gelangt, ist im Wesentlichen folgende: Wenn nämlich sechs Punkte a, b, c und a_1, b_1, c_1 gegeben sind, so sind auch die Linien A, B, C als Seiten des Dreiecks a, b, c, also alle konstanten Elemente der Gleichung (3), mithin auch die durch sie dargestellte Kurve dritter Ordnung bestimmt, und folglich (so schliesst Hr. Bellavitis weiter) ist diese Kurve dritter Ordnung schon bestimmt, wenn sechs Punkte a, b, c, a_1, b_1, c_1 gegeben sind, welche in ihr liegen sollen; und dies ist der Fehlschluss. Nicht *dadurch* schon ist jene Kurve bestimmt, dass die genannten sechs Punkte in ihr liegen sollen, sondern erst dadurch, dass die sechs Punkte *auch in der verlangten Weise* in ihr liegen sollen, nämlich in der Weise, dass die entsprechenden Dreiecke abc und $a_1b_1c_1$ sich auf der Kurve begegnen; wie ich dies auch schon in der oben angeführten Abhandlung (Bd. 36, S. 180 {hier S. 77}) bemerkt habe. Also, so wenig man daraus, dass ein Kreis durch die Endpunkte eines Durchmessers bestimmt wird, schliessen darf, dass der Kreis schon durch zwei beliebige Punkte bestimmt werde, ebenso wenig kann jener Schluss 265 Geltung † haben. Ganz dieselben Fehlschlüsse wendet Hr. Bellavitis

an, um die Allgemeingültigkeit der beiden andern Konstruktionsmethoden zu bestreiten, wobei er auf die von mir gegebenen Beweise der Allgemeinheit keine Rücksicht nimmt.

§ 6.

Zusammenhang zwischen den verschiedenen linealen Erzeugungsweisen einer Kurve dritter Ordnung.

Es wird dieser Zusammenhang am klarsten sich ergeben, wenn ich zeige, wie sich alle andern linealen Erzeugungsweisen auf eine derselben, zu welcher ich die durch die Gleichung (2) dargestellte nehme, direkt zurückführen lassen; nämlich in der Art, dass man, wenn man die gegebene Erzeugungsweise gleichfalls durch eine lineale Gleichung darstellt, aus den konstanten Elementen dieser Gleichung stets solche Elemente ableiten kann, welche, in die Gleichung (2) gesetzt, diese der gegebenen gleichbedeutend machen. Nun habe ich in dem angeführten Aufsatze (Bd. 36, S. 178 {hier S. 75}) folgenden Satz bewiesen:

Der geometrische Ort des Punktes x, der durch die Gleichung

$$xaAa_1 \,.\, xbBb_1 \,.\, xc = 0$$

bestimmt wird, ist eine Linie dritter Ordnung, welche durch folgende neun Punkte geht: erstens durch a, b, c, zweitens durch die Ecken eines Vierecks, von welchem zwei einander gegenüberliegende Seiten in den geraden Linien aa_1 und A und die beiden andern in den geraden Linien bb_1 und B liegen, und endlich durch die beiden Punkte, in welchen a_1c die Seite A und b_1c die Seite B schneidet,

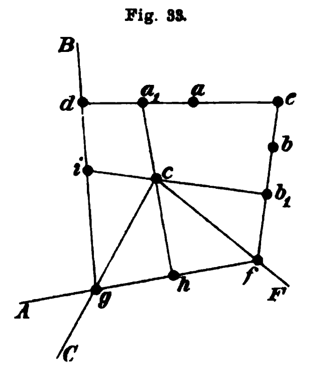


Fig. 33.

und den umgekehrten Satz:

Werden in einer Seite eines Vierecks zwei beliebige Punkte a und a_1 angenommen, während die gegenüberliegende Seite in der geraden Linie A liegt; sind ferner in einer dritten Seite zwei beliebige Punkte b und b_1 angenommen, während die gegenüberliegende Seite in der geraden Linie B liegt, und ist c ein beliebiger Punkt, der nicht in den Vierecksseiten liegt, so ist

$$xaAa_1 \,.\, xbBb_1 \,.\, xc = 0$$

die Gleichung derjenigen Kurve dritter Ordnung, welche durch die Ecken des Vierecks und durch den Punkt c geht, und die Vierecksseiten ausser- 266 *dem in den Punkten a, b und in denjenigen zwei Punkten trifft, in welchen die Geraden a_1c und b_1c die gegenüberliegenden Seiten A und B*

schneiden; und zwar giebt es ausser dieser Kurve keine andere Kurve dritter Ordnung, welche durch die bezeichneten neun Punkte ginge. (Siehe Fig. 33.)

Jede lineale Erzeugung einer Kurve dritter Ordnung lässt sich nun (siehe Bd. 42, S. 190 {hier S. 83 f.}) durch ein gleich Null gesetztes Produkt darstellen, welches mit dem konstruirenden Punkte x beginnt und schliesst und ausserdem eine Reihe abwechselnder Punkte und gerader Linien als Faktoren enthält, die mit einem Punkte beginnt und schliesst, während einer der übrigen Faktoren der Reihe von dem Punkte x im ersten Grade abhängt, also in der Form

$$xd\mathsf{A}fx = 0, \tag{4}$$

wo A eine Reihe abwechselnder gerader Linien und Punkte ist, von denen einer noch den Punkt x als Faktor enthält.

Es seien e und g zwei beliebige Punkte der Kurve (4), von der Art, dass keine drei der vier Punkte d, e, f, g in gerader Linie liegen. Durch Konstruktion lässt sich leicht der dritte Punkt finden, in welchem jede Seite des Vierecks $defg$ die Kurve schneiden muss. Wird zum Beispiel der dritte Punkt x gesucht, in welchem die Seite ed die Kurve schneidet, so fällt die Gerade xd mit ed zusammen und die Gleichung (4) verwandelt sich in

$$ed\mathsf{A}fx = 0. \tag{5}$$

Da dieselbe nur noch vom *zweiten* Grade in Bezug auf x ist, so ist der geometrische Ort von x ein *Kegelschnitt.* In diesem Kegelschnitte liegt (nach Regel 2) der Punkt f; ferner aber auch der Punkt e, indem e der Annahme zufolge ein Punkt der Kurve (4) ist, also, statt x gesetzt, der Gleichung (4) und mithin auch der Gleichung (5) genügt.

Es lassen sich nun beliebig viele neue Punkte dieses Kegelschnittes lineal konstruiren. Es seien k, l, m drei neue Punkte desselben. Bildet man das Sechseck $xeklmf$, so liegen, nach dem Pascalschen Satze, die Punkte $xe \,.\, lm$, $ek \,.\, mf$, $kl \,.\, fx$ in einer geraden Linie, das heisst es ist

$$xe(lm)\,(ek \,.\, mf)\,(kl)\,fx = 0 \tag{6}$$

die Gleichung des Kegelschnitts, der durch die fünf Punkte e, k, l, m, f geht, also mit dem Kegelschnitte (5) identisch ist. Es ist demnach der gesuchte Punkt x derjenige, in welchem die Gerade ed den Kegel-[267]schnitt ausser {in} e noch † trifft. Da x in ed liegt und nicht mit e identisch ist, so ist die Gerade xe mit de identisch, und die Gleichung (6) verwandelt sich in

$$de(lm)\,(ek \,.\, mf)\,(kl)fx = 0;$$

das heisst, der Punkt x liegt in der Geraden $de(lm)(ek\,.\,mf)(kl)f$; er liegt aber auch in der Geraden de, also im Durchschnitt beider, das heisst, wenn man diesen Punkt jetzt mit a bezeichnet, so ist

(7) $$a \equiv de(lm)(ek\,.\,mf)(kl)f(de).$$

Ganz auf dieselbe Weise finden sich die dritten Punkte, in welchen die Seiten ef, fg, gd die Kurve (4) schneiden. Sie mögen beziehlich durch b, h, i bezeichnet werden (siehe Fig. 33). Dann ist, wie bekannt, auch der Durchschnitt von ah und bi ein Punkt der Curve. Endlich sei c ein beliebiger zehnter Punkt der Kurve (4), und es werde fg durch A, dg durch B, der Durchschnitt von hc und de durch a_1 und der Durchschnitt von ic und ef durch b_1 bezeichnet; dann ist nach dem obigen Satze die Gleichung

(8) $$xaAa_1\,.\,xbBb_1\,.\,xc = 0$$

die einer Kurve dritter Ordnung, welche durch die neun Punkte $a \ldots i$ geht; und zwar ist diese Kurve, nach jenem Satze, die *einzige* dritter Ordnung, welche durch die neun Punkte geht. Aber auch die Kurve (4) geht durch diese neun Punkte, also ist die Kurve (4) mit der {Kurve} (8) *identisch;* mithin ist auch die Gleichung (4) mit der Gleichung (8) gleichbedeutend; und die Aufgabe der Umwandlung ist gelöset.

Als Beispiel der Umwandlung nehme ich die von Hrn. Bellavitis aufgestellte Gleichung

(9) $$xeDpEdF(xfB)\,.\,xdC = 0$$

an, in welcher noch Ff und Bd gleich Null gesetzt sind (siehe Fig. 33), und welche nach ihm die erste allgemeine Auflösung des Problems der linealen Erzeugung der Kurven dritter Ordnung darstellen soll, und zwar diejenige, welche Chasles in dem angeführten Aufsatze angegeben hat.

Es lässt sich diese Gleichung (Regel 3) wie folgt schreiben:

$$xeDpEdF(xdC)Bfx = 0,$$

wobei sich annehmen lässt, dass von den konstanten Faktoren keine zwei auf einander folgende *incident* sind, weil sonst (Bd. 42, S. 197 {hier S. 90f.}) die Linie in eine gerade Linie und einen Kegelschnitt zerfallen würde. Punkte jener Kurve sind (Regel 2) d, e, f. Ferner ist auch $g \equiv BC$ ein Punkt derselben. Denn dann † ist x mit B 268 und C *incident;* also verwandeln sich dann xdC und xfB, wenn sie nicht selbst Null sind (Regel 2, 4, 5), beide in g, folglich wird $xdC(xfB) = 0$ (Regel 2). Um den dritten Punkt a, in welchem de die Kurve schneidet, zu finden, muss man in obige Gleichung a statt x

und statt ae und ad das mit ihnen identische de setzen; dann wird $deDpEdF(deC)Bfa = 0$, also, da a auch in de liegt:

$$a \equiv deDpEdF(deC)Bf(de);$$

und ebenso findet sich für den dritten Punkt b, in welchem ef die Kurve trifft:

$$b \equiv efDpEdF(efB)Cd(ef).$$

Es mögen jetzt die dritten Punkte h und i gesucht werden, in denen fg und gd die Kurve treffen. Setzt man, um den dritten Durchschnittspunkt h in fg zu finden, h in die Gleichung (9) statt x, so erhält man, da h in fg liegt, $xf \equiv hf \equiv fg$; und da g mit B wie mit C *incident* ist, so ergiebt sich $xfB \equiv fgB \equiv g$ (Regel 4, 5) und $xdC(xfB) \equiv xdCg \equiv xdg \,.\, C$ (Regel 4). Sollte xdg Null sein, so müsste x in dg wie in fg, also in g liegen. Um also den dritten Durchschnittspunkt zu finden, muss man xdg *ungleich Null* annehmen; dann erhält man $xdC \,.\, (xfB) \equiv C$ (Regel 5) und somit $heDpEdFC = 0$ oder umgekehrt (Regel 3) $FCdEpDeh = 0$; folglich, da h auch in fg liegt:

$$h \equiv FCdEpDe(fg)$$

und ebenso:

$$i \equiv BFdEpDe(gd).$$

Ferner ist auch CF ein Punkt der Kurve. Denn setzt man CF statt x, so wird $xdC \equiv FCdC \equiv FC$ (Regel 6), und xfB wird $\equiv CFfB \equiv Cf \,.\, FB$ (Regel 4), da f nach der Annahme mit F *incident* ist. Ist nun Cf nicht Null, so kann man es (nach Regel 5) weglassen. Also wird xfB entweder zu Null oder $\equiv FB$; also $xfB \,.\, (xdC)$ entweder zu Null oder $\equiv FB(FC) \equiv F$ (Regel 2, 4, 5). Somit erhält man dann

$$xeDpEdF(xfB) \,.\, xdC \equiv xeDpEdFF = 0 \quad \text{(Regel 2)},$$

also ist $x \equiv FC$ ein Punkt der Kurve. Dieser werde $\equiv c$ gesetzt. Wird nun, wie oben, $gf \equiv A$, $hc \,.\, de \equiv a_1$, $ic \,.\, ef = b_1$ gesetzt, so ist die Gleichung

$$xaAa_1 \,.\, xbBb_1 \,.\, xc = 0$$

gleichbedeutend mit der Gleichung (9). Also folgt Nachstehendes:

269 *Die Gleichung*

$$xeDpEdF(xfB) \,.\, xdC = 0, \quad \textit{mit} \quad Ff = Bd = 0,$$

ist gleichbedeutend mit der Gleichung

$$xaAa_1 \,.\, xbBb_1 \,.\, xc = 0,$$

wo

$$a \equiv deDpEdF(deC)Bf(de),\ b \equiv efDpEdF(efB)Cd(ef),\ c \equiv FC,$$
$$A \equiv BCf,\ a_1 \equiv cdEpDeAc(de),\ b_1 \equiv BFdEpDeBc(ef)$$

ist.

§ 7.

Lineale Erzeugung einer Kurve dritter Ordnung aus neun beliebigen Punkten.

Entwurf der Auflösung. Jede lineale Erzeugung einer Kurve dritter Ordnung kann durch eine Gleichung von der Form

$$PQR = 0$$

dargestellt werden, in welcher P, Q, R entweder drei gerade Linien oder drei Punkte sind, die in beiden Fällen in Form von Produkten vorkommen, deren jedes den konstruirenden Punkt x einmal als Faktor enthält.

Es seien nun $a, b \ldots i$ die neun Punkte, durch welche die durch jene Gleichung darzustellende Kurve gehen soll. Es giebt stets drei Punkte, die statt x gesetzt ein solches Produkt PQ zu Null machen; und die konstanten Faktoren in P und Q lassen sich so annehmen, dass a, b, c diese drei Punkte sind. Ferner wird R durch den Punkt d zu Null gemacht, wenn man dem R die Form $xd \ldots$ giebt. Setzt man nun in PQ statt x nach und nach die Punkte $e \ldots i$ und ebenso in xd, so stellt PQ nach und nach fünf Elemente dar und xd einen Büschel von fünf Strahlen. Es lassen sich aber im Allgemeinen aus fünf gegebenen Elementen fünf gegebene Strahlen eines Strahlbüschels projektivisch, das heisst, durch fortschreitende Multiplikation mit einer Reihe abwechselnder Punkte und Linien ableiten; und zwar sind diese Punkte und Linien lineal konstruirbar. Es sei A diese Reihe fortschreitender Faktoren, so stellt das Produkt $PQ\mathsf{A}$ eine gerade Linie dar, welche mit der geraden Linie xd, sobald man statt x irgend einen der fünf Punkte $e \ldots i$ setzt, zusammenfällt. Also ist für diese fünf Punkte:

$$PQ\mathsf{A}x = 0. \tag{10}$$

Aber auch für die vier Punkte a, b, c, d wird diese Gleichung erfüllt; für a, b, c, da für sie das Produkt PQ Null ist, und für d, da $PQ\mathsf{A}$, wenn es nicht Null ist, eine durch d gehende gerade Linie darstellt, also $PQ\mathsf{A}d$ stets Null ist. Die Gleichung (10) stellt nun aber eine Kurve dritter Ordnung † als *Ort* von x dar, und da die neun Punkte $a \ldots i$, statt x gesetzt, jener Gleichung genügen, so geht die Kurve durch die gegebenen neun Punkte, und die Aufgabe ist gelöset. 270

§ 8.

Fortsetzung.

Um eine specielle Lösung der Aufgabe zu geben, will ich annehmen, es solle die lineale Konstruktion der Kurve, die durch die neun Punkte $a \dots i$ gehen soll, durch eine Gleichung von der Form (2) ausgedrückt werden, zu welcher jedoch, um die Lösung zu vereinfachen, zunächst noch zwei Faktoren k und C hinzugefügt werden mögen, so dass sie die Form

(11) $$xaAa_1 \,.\, xbBkCb_1 \,.\, xc = 0$$

annimmt. Die drei Faktoren können (Regel 2) beliebig umgeordnet werden. Setzt man

$$xaAa_1 \,.\, xc \equiv p, \quad xbB \equiv q,$$

so nimmt die Gleichung die Form $p(qkCb_1) = 0$ oder (Regel 3)

(12) $$pb_1Ckq = 0$$

an. Der Ausdruck p wird Null für $x \equiv a$ und $\equiv c$, weil dann zwei aufeinander folgende Faktoren kongruent werden (Regel 2). Damit nun p auch noch für einen andern der Punkte $a \dots i$, zum Beispiel für d, zu Null werde und für einen vierten und fünften Punkt e und f sich möglichst vereinfache, setze man

$$A \equiv de, \quad a_1 \equiv af \,.\, cd.$$

Und zwar nehme man die Punkte a, c, d, e, f so an, dass keine drei derselben in gerader Linie liegen. Dann wird erstens für $x \equiv d$ der Ausdruck $xaAa_1 \equiv da(de)a_1 \equiv da_1$ (Regel 7) $\equiv a_1d \equiv af(cd)d \equiv cd$ (Regel 4, 5); also $p \equiv xaAa_1 \,.\, xc \equiv cd \,.\, cd = 0$ (Regel 2). Ferner für $x \equiv e$ wird $p \equiv ea(de)a_1 \,.\, ec \equiv ea_1 \,.\, ec$ (Regel 7) $\equiv e$, weil nämlich ea_1c nicht Null sein kann. Endlich für $x \equiv f$ wird $p \equiv faA(af.cd).cf$ $\equiv A(af)(af.cd).cf$ (Regel 2) $\equiv af.cf$ (Regel 4) $\equiv f$ (Regel 7). Für $x \equiv g$, h oder i gehe p beziehlich in g_1, h_1 oder i_1 über; dann erhält man

$$x \equiv a,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g,\ \ h,\ \ i,$$
$$p \equiv 0,\ 0,\ 0,\ e,\ f,\ g_1,\ h_1,\ i_1.$$

Ferner $q \equiv xbB$ wird zu Null für $x \equiv b$. Damit es auch für e und f sich vereinfache, setze man

$$B \equiv ef$$

271 und nehme b so an, dass es nicht in ef falle. Dann wird für $x \equiv e, f$ der Ausdruck q auch $\equiv e, f$ (Regel 7); für $x \equiv g, h, i$ werde $q \equiv g_2, h_2, i_2$; dann erhält man

$$x \equiv b,\ e,\ f,\ g,\ \ h,\ \ i,$$
$$q \equiv 0,\ e,\ f,\ g_2,\ h_2,\ i_2.$$

Es kommt also nur noch darauf an, die Gleichung (12) für die fünf Fälle zu befriedigen, wo

$$p \equiv e,\ f,\ g_1,\ h_1,\ i_1,$$

und gleichzeitig

$$q \equiv e,\ f,\ g_2,\ h_2,\ i_2$$

ist.

Man nehme noch $C \equiv ei_1$ an; dann wird die genannte Gleichung für $p \equiv q \equiv e$ befriedigt und für $p \equiv i_1$, $q \equiv i_2$ vereinfacht. Es ergiebt sich nämlich im ersteren Falle $pb_1Ckq \equiv eb_1 . ei_1 . ek$, was drei gerade Linien, die durch einen Punkt e gehen, als Faktoren enthält, also Null ist. Ferner für $p \equiv i_1$, $q \equiv i_2$ erhält man

$$pb_1Ckq \equiv i_1b_1(ei_1)ki_2 \equiv i_1ki_2$$

(Regel 7), wenn nicht i_1b_1e Null ist; im letztern Falle würde hierdurch für k keine besondere Lage bedingt, im andern Falle muss k in der Geraden i_1i_2 liegen; dies lässt sich daher auch im ersteren Falle annehmen.

Nun bleibt nur noch für die drei übrigen Werthpaare die Gleichung (12) zu befriedigen; das heisst, es muss noch

$$fb_1Ckf = 0, \quad g_1b_1Ckg_2 = 0, \quad h_1b_1Ckh_2 = 0$$

sein; oder, anders geschrieben (Regel 2, 3):

$$kfCfb_1 = 0, \quad kg_2Cg_1b_1 = 0, \quad kh_2Ch_1b_1 = 0.$$

Die erste dieser Gleichungen giebt, wenn Cf nicht Null ist, (nach Regel 6) $kfb_1 = 0$; und es ergiebt sich dann, dass die geraden Linien

$$kf, \quad kg_2Cg_1, \quad kh_2Ch_1$$

durch einen und denselben Punkt gehen müssen, der dann gleich b_1 zu setzen ist. Sollte Cf zufällig Null sein, so würde jene erstere Bedingung wegfallen. Sollen nun jene drei gerade Linien durch einen und denselben Punkt gehen, so ist dazu nöthig und ausreichend, dass ihr Produkt Null sei. Also hat man zur Bestimmung von k die Gleichung

(13) $$kf . kg_2Cg_1 . kh_2Ch_1 = 0.$$

Sie ist in Bezug auf k vom dritten Grade, also ist der geometrische Ort von k eine Linie dritter Ordnung. Aber diese zerfällt in drei gerade Linien. † Nämlich, *erstens*, wenn k in der geraden Linie C 272 liegt, wird $kg_2C \equiv k$ (Regel 7); ebenso $kh_2C \equiv k$, also {geht} die linke Seite von (13) in $kf . kg_1 . kh_1$ {über}, was Null ist. *Ferner* da f, g_2, h_2 in der geraden Linie B liegen, so wird, wenn auch k in B liegt, $kf \equiv kg_2 \equiv kh_2 \equiv B$; also geht dann die linke Seite von (13) in $B . BCg_1 . BCh_1$ über, das heisst in ein Produkt dreier geraden Linien,

die durch ein und denselben Punkt BC gehen; also ist ihr Produkt Null. Es wird also jeder Punkt k, der in B oder C fällt, der Gleichung (13) genügen, und mithin muss die Linie (13) in drei gerade Linien zerfallen.

Um die dritte zu finden, suche man zwei ihrer Punkte. Ein solcher Punkt ist aus der Gleichung (13) leicht zu finden, wenn man sie in der Form $kf(kg_2Cg_1)h_1Ch_2k = 0$ schreibt (Regel 3) und den Punkt so bestimmt, dass $kf(kg_2Cg_1)h_1$ schon Null ist. Die Gleichung $kf(kg_2Cg_1)h_1 = 0$ sagt aus, dass die geraden Linien kf und kg_2Cg_1 durch den Punkt h_1 gehen, dass heisst, dass $kfh_1 = 0$, $kg_2Cg_1h_1 = 0$ ist; oder, diese Gleichungen umgekehrt (Regel 3), dass $h_1fk = 0$ und $h_1g_1Cg_2k = 0$ ist; also liegt dann k in den beiden Geraden h_1f und $h_1g_1Cg_2$. Der so gefundene Punkt werde mit α bezeichnet, also

$$\alpha \equiv h_1g_1Cg_2(h_1f)$$

gesetzt. Aus gleichem Grunde wird der Gleichung (13) durch den Punkt

$$\beta \equiv h_1g_1Ch_2(g_1f)$$

genügt, und da diese Punkte im Allgemeinen nicht in den Geraden B und C liegen, so ist $\alpha\beta$ die dritte der Geraden, in welche die Linie (13) zerfällt. Liegt nun k in dieser Geraden, so wird der Gleichung (13) genügt; das heisst, es gehen dann die drei geraden Linien kf, kg_2Cg_1, kh_2Ch_1 durch einen und denselben Punkt; derselbe heisse b_1, so wird nun die Gleichung

$$xaAa_1 \,.\, xbBkCb_1 \,.\, xc = 0$$

durch jeden der neun Punkte $a \ldots i$, wenn er statt x gesetzt wird, befriedigt. Denn dass die Punkte a, b, c, d, e, i ihr genügen, ist oben bewiesen; aber auch f, g, h genügen ihr, denn da die geraden Linien kf, kg_2Cg_1, kh_2Ch_1 durch b_1 gehen, so hat man, wenn man noch für kf das ihm gleiche $kfCf$ schreibt, die drei Gleichungen

$$kfCfb_1 = 0, \quad kg_2Cg_1b_1 = 0, \quad kh_2Ch_1b_1 = 0,$$

oder umgeordnet (Regel 2, 3):

$$fb_1Ckf = 0, \quad g_1b_1Ckg_2 = 0, \quad h_1b_1Ckh_2 = 0.$$

273 Aber f, g_1, h_1 waren die Werthe von p und f, g_2, h_2 die von q, wenn x beziehlich die Werthe f, g, h annahm, also wird die Gleichung (12) auch für $x \equiv f$, g, h erfüllt, mithin auch die mit (12) identische Gleichung (11); und die Aufgabe ist gelöst. Da übrigens k in $\alpha\beta$ und in i_1i_2 lag, so hat man $k \equiv \alpha\beta(i_1i_2)$, und da b_1 in kf und in kg_2Cg_1 lag, so hat man $b_1 \equiv kg_2Cg_1(kf)$. Somit hat sich folgender Satz ergeben:

Wenn $a \ldots i$ neun beliebige Punkte sind, und

$$A \equiv de, \quad a_1 \equiv af.cd, \quad B \equiv ef, \quad C \equiv ei_1, \quad k \equiv \alpha\beta(i_1i_2), \quad b_1 \equiv kg_2Cg_1(kf)$$

gesetzt wird, wo g_1, h_1, i_1 *die Punkte sind, in welche sich* $xaAa_1 . xc$ *verwandelt, wenn man statt* x *nach und nach die Punkte* g, h, i *substituirt, und* g_2, h_2, i_2 *die Punkte, in welche sich* xbB *verwandelt, wenn man statt* x *beziehlich die Punkte* g, h, i *setzt, und wo*

$$\alpha \equiv h_1 g_1 C g_2 (h_1 f); \quad \beta \equiv h_1 g_1 C h_2 (g_1 f)$$

ist, so ist

$$xaAa_1 . xbBkCb_1 . xc = 0$$

die Gleichung der Kurve dritter Ordnung, welche durch die gegebenen neun Punkte $a \ldots i$ *geht.*

Es lässt sich die gefundene Gleichung nach § 6 nun auch auf die einfachere Form (2) zurückführen; was ich jedoch nicht weiter verfolge.

Es drückt die oben gefundene Gleichung zugleich die lineale Beziehung aus, welche zwischen zehn Punkten $a, b, \ldots i, x$ herrschen muss, damit sie in einer Kurve dritter Ordnung liegen; also die lineale Eigenschaft des einer solchen eingeschriebenen *Zehnecks.*

Es ist dies die einfachste Eigenschaft dieses Zehnecks, die ich bisher bemerkt habe, obgleich die Gleichung (11), welche dieselbe darstellt, nachdem man statt der darin vorkommenden Grössen die angegebenen Ausdrücke substituirt hat, bis nur noch die zehn Ecken des Zehnecks darin vorkommen, noch immer 369 Faktoren enthält, indem nämlich a, c, d je 62mal, x, b, e, f, g, h, i beziehlich 3, 11, 51, 48, 24, 21, 25mal darin vorkommen.

§ 9.

Fernere Sätze über das Zehneck in einer Kurve dritter Ordnung.

Ich theile zum Schlusse noch einige hierhergehörige Sätze mit, ohne den leicht sich ergebenden Beweis beizufügen.

I. Zwischen zehn Punkten $a \ldots k$ einer Kurve dritter Ordnung 274 bestehen folgende Eigenschaften:

a) Wenn man durch vier der Punkte (zum Beispiel a, b, c, d) sechs Kegelschnitte legt, welche ausserdem beziehlich durch je einen der übrigen sechs Punkte ($e \ldots k$) gehen, so lässt sich stets ein eilfter Punkt (l) {der Kurve} von der Art finden, dass jene sechs Kegelschnitte mit den sechs Strahlen, die von dem eilften Punkte (l) nach diesen sechs Punkten ($e \ldots k$) gehen, *projektivisch* sind.

b) Wenn man zwei von den Punkten (zum Beispiel a, b) zu Mittelpunkten zweier Strahlbüschel von je acht Strahlen macht, deren entsprechende Strahlen sich in den übrigen acht Punkten ($c \ldots k$) schneiden, so lassen sich stets zwei Gerade A und B finden, welche jenen Strahlbüscheln *projektivisch* sind und welche die Beschaffenheit haben, dass jede Verbindungslinie zweier entsprechender Punkte dieser

Geraden durch den Punkt geht, in welchem sich die diesen Punkten entsprechenden Strahlen jener Strahlbüschel schneiden.

c) Wenn man drei von den Punkten (zum Beispiel *a*, *b*, *c*) zu Mittelpunkten dreier Strahlbüschel von je sieben Strahlen macht, deren entsprechende Strahlen sich in den sieben übrigen Punkten (*d* ... *k*) treffen, so lassen sich allemal drei siebenpunktige Geraden finden, die beziehlich den drei Strahlbüscheln *projektivisch* sind und von deren Punkten je drei entsprechende in gerader Linie liegen.

d) Wenn man, wie in *c*), drei der Punkte zu Mittelpunkten dreier Strahlbüschel von je sieben Strahlen macht, deren entsprechende Strahlen sich in den sieben übrigen Punkten treffen, so lassen sich stets drei andere Strahlbüschel von je sieben Strahlen finden, die den ersteren *projektivisch* sind und von deren Strahlen je drei entsprechende durch einen und denselben Punkt gehen.

e) Legt man durch die zehn Punkte zwei gesonderte (das heisst nicht ganz oder theilweise zusammenfallende) Linien *vierter* Ordnung, so schneiden sich diese ausserdem in sechs Punkten, durch welche sich ein Kegelschnitt legen lässt.

II. *Umgekehrt:* Wenn zehn Punkte eine der genannten fünf Eigenschaften besitzen, so liegen sie in einer Linie dritter Ordnung.

Von diesen fünf Eigenschaften habe ich die erste schon früher (Bd. 42, S. 208 {hier S. 103}) in entsprechender Weise für Kurven beliebiger Ordnung nachgewiesen, und namentlich auch auf Kurven vierter Ordnung angewandt (Bd. 44, S. 21 ff. {hier S. 131 f.}). Die folgenden drei Eigenschaften gehen aus den drei Hauptformen der linealen Gleichungen dritten Grades, wie sie an die Spitze dieses Auf- 275 satzes gestellt sind, † hervor. Die fünfte Eigenschaft, welche sich am leichtesten durch Funktionsverknüpfungen (vgl. Bd. 42, S. 204 ff. {hier S. 95 ff.}) ableiten lässt, erhält ein besonderes Interesse, wenn man als die betreffenden Kurven vierter Ordnung zwei Vereine von je zwei Kegelschnitten annimmt, von denen jeder Kegelschnitt durch fünf der gegebenen Punkte geht, der demselben Vereine angehörige also durch die fünf übrigen Punkte. Es zeigt sich diese Eigenschaft der des *Sechsecks*, welches einem Kegelschnitte eingeschrieben ist, ganz entsprechend, indem sich der Pascal'sche Satz zu folgendem Satze erweitern lässt:

Wenn man durch sechs Punkte eines Kegelschnitts zwei gesonderte Linien dritter Ordnung legt, so treffen sich diese ausserdem in drei Punkten, die in gerader Linie liegen. Und nimmt man hierbei als die betreffenden Kurven zwei Vereine von je drei Geraden an, so hat man den Pascal-schen Satz in der gewöhnlichen Form.

Stettin, den 15. April 1855.

XV.

Verschiedene mathematische Bemerkungen.

1

Von

Professor **H. Grassmann**,
am Gymnasium in Stettin.

Grunerts Archiv, Bd. 49, Heft 1, S. 1—3 (1868).

Bildung rationaler Dreiecke.

Es ist bekannt, dass, wenn in einem Dreiecke die drei Seiten unter sich und zu einer der Höhen in rationalem Verhältnisse stehen, sich aus diesen vier Stücken eine grosse Anzahl anderer Stücke ergiebt, welche gleichfalls zu jenen in rationalem Verhältnisse stehen. Man hat solche Dreiecke passend „rationale" genannt. Man pflegt sie durch Zusammensetzung zweier rationaler rechtwinkliger Dreiecke abzuleiten. Allein, es ist zweckmässiger, ihre Bildungsweise von dem rationalen rechtwinkligen Dreiecke unabhängig zu machen, und die Bildung des letzteren in jene als besonderen Fall einzuschliessen. Dies gelingt aufs leichteste vermittelst des folgenden Satzes, bei welchem die Seiten und Winkel mit a, b, c; α, β, γ; der halbe Umfang mit p, ferner $p - a$, $p - b$, $p - c$ mit p_1, p_2, p_3; die Radien des eingeschriebenen und der an die Seiten a, b, c angeschriebenen Kreise mit ϱ, ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 bezeichnet, und unter den letztgenannten acht Grössen die mit gleichem Index versehenen „entsprechende" genannt sind.

„Wenn man aus den zwei Gruppen p, p_1, p_2, p_3 und ϱ, ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 drei beliebige auswählt, die jedoch nicht alle derselben Gruppe angehören, und unter denen keine zwei sich entsprechen dürfen, so wird das Dreieck stets rational, sobald die drei so gewählten Grössen in rationalem Verhältnisse stehen."

Namentlich:

„Wenn für ein Dreieck ϱ, p_1, p_2 in rationalem Verhältnisse stehen, so ist das Dreieck rational, und umgekehrt jedes rationale Dreieck lässt sich auf diese Weise ableiten."

2 „Auch gilt dies noch in gleicher Allgemeinheit, wenn $\varrho = 1$ und $p_1 p_2 > 1$ angenommen wird.“

Der Beweis folgt auf ganz elementare Weise entweder aus den Formeln

$$\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho}{p_1}, \quad \operatorname{tang}\frac{\beta}{2} = \frac{\varrho}{p_2}, \quad \operatorname{tang}\frac{\gamma}{2} = \frac{\varrho}{p_3}$$

verbunden mit dem Satze, dass sich die Tangente der Summe rational durch die Tangenten der Stücke ausdrücken lässt, oder noch einfacher aus der bekannten Formel

$$p_1 p_2 p_3 = \varrho^2 p = \varrho^2 (p_1 + p_2 + p_3),$$

welche unmittelbar zum Beispiel p_3 aus ϱ, p_1, p_2 rational ausdrücken lehrt. Aus p_1, p_2, p_3 folgen dann aber die Seiten durch Addition je zweier, p durch Addition aller drei, und h dann $= 2 p \varrho : a$. Da man nun die entsprechenden Formeln auch für ϱ_1 u. s. w. hat, zum Beispiel

$$p p_2 p_3 = \varrho_1^2 p_1 = \varrho_1^2 (p - p_2 - p_3),$$

und sich die Grössen der einen Gruppe $(p, p_1, \ldots)$ umgekehrt wie die entsprechenden der zweiten $(\varrho, \varrho_1, \ldots)$ verhalten, so ist damit der erste Satz erwiesen. Die im zweiten enthaltene Umkehr folgt sogleich daraus, dass durch die Grössen a, b, c, h (Höhe) die Grössen p, p_1, p_2, p_3, ferner der Inhalt, und also auch die Grössen ϱ, ϱ_1, ... rational ausdrückbar sind. Dass die Einschränkung $p_1 p_2 > \varrho^2$ hinzugefügt werden kann, ist darin begründet, dass im entgegengesetzten Falle ϱ aufhört, Radius des eingeschriebenen Kreises zu sein. Auch kann man den Beweis des Satzes darauf gründen, dass sich $\sin x$ und $\cos x$ durch $\operatorname{tang}\frac{1}{2}x$ rational ausdrücken lassen.

Setzt man $\varrho = 1$, so wird

$$p_3 = \frac{p_1 + p_2}{p p_1 - 1},$$

und die Seiten, Höhen, Höhenabschnitte, ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, die Schwerlinien, der Radius des umschriebenen Kreises, Inhalt u. s. w. lassen sich dann aus p_1 und p_2 so leicht ausdrücken, dass man daraus treffliche Aufgaben für Schüler herleiten kann.

Ist β ein rechter Winkel, so wird $p_2 = \varrho = 1$, also

$$p_3 = \frac{p_1 + 1}{p_1 - 1}, \quad a = p_2 + p_3 = \frac{2p_1}{p_1 - 1}, \quad b = p_3 + p_1 = \frac{p_1^2 + 1}{p_1 - 1},$$

$$c = p_1 + p_2 = p_1 + 1,$$

also

$$a : b : c = 2p_1 : (p_1^2 + 1) : (p_1^2 - 1),$$

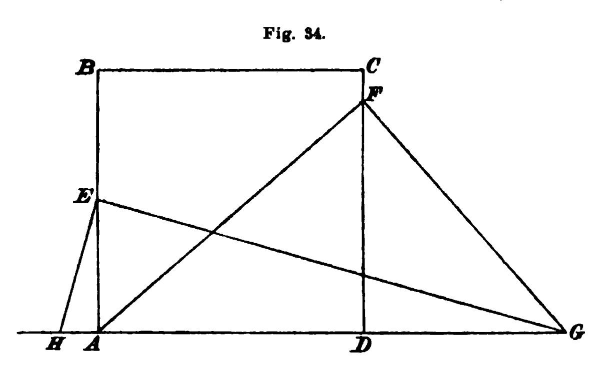
was die bekannten Formeln für die rationalen rechtwinkligen Dreiecke darbietet.

Leicht kann man die Rationalität der Dreiecke noch weiter treiben, und zum Beispiel dem Verlangen Genüge thun, dass ausser den vorher genannten Stücken auch die winkelhalbirenden Linien rational sein sollen. In der That, wenn ABC das verlangte Dreieck ist und M der Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises, so hat man nur das Dreieck MBC in der erst genannten Weise rational zu bestimmen, so ist ABC in der zuletzt genannten Weise † rational, wie sich am leichtesten 3 daraus ergiebt, dass $\sin x$ und $\cos x$ durch $\operatorname{tang} \frac{1}{2} x$ rational ausdrückbar sind. Und auf gleiche Weise könnte man die Rationalität auf noch höhere Grade treiben.

Angenäherte Konstruktion von π.

Entwickelt man π in einem Kettenbruche, so ist die zweite brauchbare Annäherung (wenn man als unbrauchbar diejenigen beseitigt, in denen der nächstfolgende Nenner des Kettenbruches gleich 1 ist) gleich $3\frac{16}{113} = 3{,}1415929\cdots$. Da nun $113 = 7^2 + 8^2$ ist, so erergiebt sich daraus folgende angenäherte Rektifikation des Kreisumfanges. Man umschreibe dem Kreise ein Quadrat $ABCD$ (siehe Fig. 34), und sei E der Punkt, in welchem AB vom Kreise berührt wird. Man schneide von CD ein Stück $CF = \frac{1}{8} CD$ ab, ziehe AF, errichte darauf in F ein Loth welches AD in G schneide; ziehe GE, errichte hierauf in E ein Loth, welches AD in H schneide, so ist die gebrochene Linie

Fig. 34.



$$BCDH = 3\tfrac{16}{113} = 3{,}1415929\ldots$$

des Durchmessers.

Denn $DG = \frac{49}{64}$, also $AG = 1 + \frac{49}{64} = \frac{113}{64}$, also

$$AH = \tfrac{1}{4} : \tfrac{113}{64} = \tfrac{16}{113},$$

also:

$$BCDH = 3 + \tfrac{16}{113} = 3{,}1415929\ldots$$

des Durchmessers.

(Werden fortgesetzt.)

XVI.

49 Lösung der Gleichung $x^3+y^3+z^3+u^3=0$ in ganzen Zahlen.

Von

Professor **H. Grassmann**,
am Gymnasium in Stettin.

Grunerts Archiv Bd. 49, Heft 1, S. 49—50 (1868).

Unter vier ganzen Zahlen müssen sich mindestens zwei angeben lassen, die in Bezug auf den Modul 2 kongruent sind. Es gelte dies für x und y, so gilt es nach der Gleichung

(1) $$x^3+y^3+z^3+u^3=0$$

auch für z und u. Man setze:

(2) $$x=a+c,\quad y=a-c,\quad z=-b+d,\quad u=-b-d,$$

so verwandelt sich die Gleichung (1) in $a^3+3ac^2-b^3-3bd^2=0$ oder

(3) $$\frac{a^3-b^3}{3}=bd^2-ac^2.$$

Man überzeugt sich leicht, dass a und b, abgesehen von einem gemeinschaftlichen Faktor, Quadratzahlen sein müssen. Man setze daher

(4) $$a=m\alpha^2,\quad b=m\beta^2,$$

so wird

(5) $$\tfrac{1}{3}m^2(\alpha^6-\beta^6)=(\beta d+\alpha c)(\beta d-\alpha c).$$

Hierin liegt die folgende Lösung:

„Man setze für α, β, m drei beliebige ganze Zahlen, zerlege $P=\frac{1}{3}m^2(\alpha^6-\beta^6)$ auf beliebige Art in zwei Faktoren p und q, und setze:

50 (6) $$d=\frac{p+q}{2\beta},\quad c=\frac{p-q}{2\alpha};$$

bestimme dann a und b durch die Gleichungen (4) und x, y, z, u durch die Gleichungen (2), wobei man die etwa vorhandenen Nenner durch

Multiplikation mit dem Generalnenner wegschafft: so ist die Gleichung (1) in ganzen Zahlen gelöst."

Man kann die Nenner auch dadurch entfernen, dass man für d und c (nach ihrer Reduktion) ihren Generalnenner g bestimmt, und für m, p, q ihr g-faches, also mg, pg, qg setzt. Man kann daher, unbeschadet der Allgemeinheit, die gebrochenen Werthe für c und d, ebenso aber auch die negativen für a, b, c, d, ausschliessen, und annehmen, dass die zwei Zahlen α und β, und ebenso die drei Zahlen m, p, q keinen gemeinsamen Faktor haben, indem ein solcher im ersten Falle zu m gezogen, im letzten ganz unterdrückt werden kann. Beispiele mögen das Verfahren erläutern.

Ist $\alpha = \beta = 1$, so erhält man die selbstverständliche Lösung $x^3 + y^3 - x^3 - y^3 = 0$. Ist $\alpha = 2$, $\beta = 1$, so wird $P = m^2 . 21 = pq$, was vier brauchbare Zerlegungen gestattet, nämlich

$$P = 21m^2 . 1 = 21 . m^2 = 7m^2 . 3 = 7 . 3m^2$$

(welche für $m = 1$ paarweise zusammenfallen). Die erste Zerlegung giebt stets brauchbare Lösungen, wenn m ungerade ist; zum Beispiel für $m = 1, 3, 5$ erhalten

x	y	z	u	die Werthe:
9	— 1	10	— 12	
59	— 35	92	— 98	
151	— 111	258	— 268;	

die zweite $(21 . m^2)$, wenn m ungerade, aber weder durch 3 noch durch 7 theilbar ist, zum Beispiel für $m = 5, 11, 13$:

21	19	18	— 28
69	19	60	— 82
89	15	82	— 108;

die dritte $(7m^2 . 3)$, wenn m ungerade, aber nicht durch 3 theilbar ist, zum Beispiel für $m = 1, 5, 7$:

5	3	4	— 6
63	— 23	84	— 94
113	— 57	166	— 180;

die vierte $(7 . 3m^2)$, wenn m ungerade, aber nicht durch 7 theilbar ist, zum Beispiel für $m = 3, 5, 9$:

17	7	14	— 20
37	3	36	— 46
95	— 23	116	— 134.

XVII.

93 Elementare Auflösung der allgemeinen Gleichung vierten Grades.

Von

Professor **H. Grassmann**,
am Gymnasium in Stettin.

Grunerts Archiv Bd. 51, Heft 1, S. 93—96 (1870).

Die folgende Auflösung der Gleichung vierten Grades ist einfacher als die mir bekannten, und eignet sich vorzüglich zur Darstellung in der Schule.

Die Gleichung sei (nach Wegschaffung des zweiten Gliedes)

$$x^4 + ax^2 + bx + c = 0. \tag{1}$$

Wenn es gelingt diese Gleichung auf die Form

$$(x^2 + d)^2 - e(x + f)^2 = 0 \tag{2}$$

94 zu bringen, so ist mit der Lösung der letzteren, auch die der ersteren gegeben. Nun giebt die Gleichung (2) nach Potenzen von x entwickelt

$$x^4 + (2d - e)x^2 - 2efx + d^2 - ef^2 = 0.$$

Diese wird der ersteren (1) identisch, wenn die Koefficienten gleich werden. Das giebt die Gleichungen

$$2d = e + a, \tag{3}$$

$$2ef = -b \tag{4}$$

und indem man die dritte $d^2 - ef^2 = c$ mit $4e$ multiplicirt und dann für $2d$ und $2ef$ ihre Werthe (aus (3) und (4)) einsetzt, erhält man $e(e + a)^2 - b^2 = 4ec$, das heisst

$$e^3 + 2ae^2 + (a^2 - 4c)e = b^2. \tag{5}$$

Da nun auch umgekehrt, wenn die drei letzten Gleichungen erfüllt sind, die beiden ersten identisch werden, so folgt:

„Man suche eine beliebige der drei Wurzeln (e) der Gleichung (5), führe diesen Werth e in (3) und (4) ein, so sind dadurch d und f ein-

deutig bestimmt. Die gefundenen drei Werthe in (2) eingesetzt, machen diese Gleichung mit (1) identisch (was eine gute Probe liefert). Jetzt bringe man die Gleichung (2) auf die Form $x^2 + d = \pm \sqrt{e}(x + f)$, so erhält man durch Auflösung dieser quadratischen Gleichung die vier Wurzeln der gegebenen Gleichung."

Uebrigens ergiebt die letztgenannte quadratische Gleichung, nachdem man sie mit 4 multiplicirt, und für d und f ihre Werthe aus (3) und (4) eingeführt hat,

$$(6) \qquad \begin{cases} 2x = \varepsilon \mp \sqrt{-\varepsilon^2 - 2a - \frac{2b}{\varepsilon}}, \\ \text{wo } \varepsilon = \mp \sqrt{e} \quad \text{ist.} \end{cases}$$

Wählt man aus der Gleichung (5) statt e eine der andern Wurzeln e_1, e_2 dieser Gleichung, so müssen nach dem erwiesenen Satze diese dieselben vier Wurzeln der Gleichung (1) liefern. Um dies anschaulicher zu übersehen, führen wir die drei Wurzeln e, e_1, e_2 ein. Nach der Gleichung (5) muss $e + e_1 + e_2 = -2a$ und $ee_1e_2 = b^2$ sein, oder wenn $e = \varepsilon^2$, $e_1 = \varepsilon_1^2$, $e_2 = \varepsilon_2^2$ ist, so muss $\varepsilon^2 + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 = -2a$, $\varepsilon\varepsilon_1\varepsilon_2 = \mp b$ sein; wir wählen die Vorzeichen für ε, ε_1, ε_2 im Uebrigen willkürlich, aber so dass $\varepsilon\varepsilon_1\varepsilon_2 = -b$ ist. Dann verwandelt sich die Gleichung (6) in

$$2x = \varepsilon \mp \sqrt{-\varepsilon^2 + (\varepsilon^2 + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) + 2\varepsilon_1\varepsilon_2} = \varepsilon \mp (\varepsilon_1 + \varepsilon_2). \qquad 95$$

Hier können wir das Minuszeichen weglassen, wenn wir die obige Zeichenbestimmung für ε, ε_1, ε_2 festhalten. Also:

„Wenn ε, ε_1, ε_2 drei Grössen sind, deren Quadrate die drei Wurzeln der Gleichung (5) sind, und welche alle möglichen Vorzeichen ($\mp$) aber mit der Einschränkung, dass $\varepsilon\varepsilon_1\varepsilon_2$ mit b entgegengesetzt bezeichnet sei, annehmen können, so liefert die Gleichung

$$(7) \qquad 2x = \varepsilon + \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

die vier Wurzeln der Gleichung (1)."

Aus dieser Gleichung tritt die Beziehung zwischen den aus den drei verschiedenen Wurzeln von Gleichung (5) hervorgehenden vier Wurzeln von (1) vollkommen in Evidenz; zum Beispiel wählen wir die Wurzel e_1 aus Gleichung (5), so tritt $2x$ in den Formen $2x = \varepsilon_1 \mp (\varepsilon + \varepsilon_2)$ und $2x = -\varepsilon_1 \mp (\varepsilon - \varepsilon_2)$ hervor u. s. w.

Es sei zum Beispiel

$$(1) \qquad x^4 - \tfrac{3}{2}x^2 + 2x - \tfrac{15}{16} = 0,$$

so erhält man

$$(5) \qquad e^3 - 3e^2 + 6e = 4.$$

Eine Wurzel dieser Gleichung ist $e = 1$ (welche sich nach der allgemeinen algebraischen Methode sogleich ergiebt). Dann wird also

(3) $$d = -\tfrac{1}{4},$$

(4) $$f = -1.$$

Also

(2) $$(x^2 - \tfrac{1}{4})^2 - (x-1)^2 = 0,$$

deren Identität mit (1) sofort hervortritt, also $x^2 - \frac{1}{4} = \mp(x-1)$, und somit

(6) $$2x = -1 \mp \sqrt{6} \quad \text{oder} \quad = 1 \mp i\sqrt{2}, \quad \text{wo} \quad i = \sqrt{-1}.$$

Ich füge noch zwei Bemerkungen hinzu.

Bemerkung 1. Es ist oft wünschenswerth, Gleichungen vierten Grades zu erhalten, bei welchen die Hülfsgleichung dritten Grades (5) sich durch die bekannte algebraische Methode rational lösen lässt. Dies 96 erreicht man, wenn man drei beliebige rationale † Grössen, α, u, v annimmt, und die Gleichung vierten Grades aufstellt:

$$x^4 + \tfrac{3}{2}\alpha x^2 + \sqrt{u^3 + v^3 - \alpha^3 + 3uv\alpha}\,.\,x + \tfrac{3}{16}(4uv - \alpha^2) = 0,$$

woraus dann $e = u + v - \alpha$ folgt u. s. w.; so zum Beispiel war in obigem Beispiele $\alpha = -1$, $u = 1$, $v = -1$.

Bemerkung 2. Es ist die Frage, in wie weit sich die obige Methode auch auf beliebige Gleichungen des $2n$-ten Grades anwenden lässt. Eine solche hat nach Wegschaffung des zweiten Gliedes (mit x^{2n-1}) noch $2n - 1$ Koefficienten. Ebenso viel bietet die Gleichung

$$(x^n + D)^2 - e(x^{n-1} + F)^2 = 0,$$

in welcher D und F ganze Funktionen des $(n-2)$-ten Grades sind. Denn D und F enthalten je $(n-1)$ Koefficienten, wozu dann noch der Koefficient e kommt. Man hat zur Bestimmung dieser $2n-1$ Koefficienten also ebensoviel Gleichungen. Wenn diese Bestimmung in irgend einer Weise gelingt, so verwandelt sich die gegebene Gleichung in die oben angegebene Form. Aus ihr folgt

$$x^n + D = \mp\sqrt{e}\,(x^{n-1} + F),$$

was dann durch Lösung einer Gleichung n-ten Grades die $2n$ Wurzeln der gegebenen Gleichung liefert. Bis dahin ist also alles, wie bei der Gleichung vierten Grades. Allein die Hülfsgleichungen, durch welche die Umwandlung in die verlangte Form gelingt, steigen im Allgemeinen zu höheren Graden an, und lassen sich nur unter besonderen Bedingungen auf Gleichungen des $(2n-1)$-ten Grades zurückführen.

XVIII.

Zur Theorie der Kurven dritter Ordnung. 505

Von

H. Grassmann,
Korrespond. Mitgliede. Aus einem Schreiben an A. Clebsch.

Göttinger Nachrichten 1872, Nr. 26 vom 13. November, S. 505—509.

— Der Satz, den Sie in Bd. 5 Ihrer Annalen (S. 425) über das einer Kurve dritter Ordnung † eingeschriebene Dreieck, dessen Seiten durch 506 drei gegebene Punkte dieser Kurve gehen, aufgestellt haben und der dem von mir in Crelles Journal (Bd. 52, S. 261 {hier S. 225}) mitgetheilten Satze entspricht, lässt sich leicht auf beliebige Vielecke mit ungerader Seitenzahl ausdehnen.

Zu dem Ende gehe ich auf folgende sogleich einleuchtende Sätze zurück (vgl. Crelles Journal a. a. O., S. 258f. {hier S. 222f.}):

1. Die Ebene wird durch eine in ihr liegende algebraische Kurve in Theile zerlegt, von denen man je zwei (lineal) aneinandergrenzende als *entgegengesetzt* bezeichnet betrachten darf, sodass also, wenn einer dieser Theile als positiv angenommen wird, auch für jeden andern Theil unzweideutig feststeht, ob er positiv oder negativ sei.

Nachdem diese Bestimmung getroffen ist, kann man ferner festsetzen, ein Punkt, welcher sich auf der Kurve bewegt, bewege sich nach *rechts* hin, wenn der positive Flächenraum, an dessen Grenze er sich hinbewegt, dem mit ihm Gehenden rechter Hand liegt. Dies festgestellt, ergiebt sich sogleich:

2. Wenn eine Gerade um einen einfachen festen Punkt einer Kurve n-ter Ordnung sich bewegt, so bewegen sich die $n - 1$ übrigen Durchschnittspunkte der Geraden und der Kurve abwechselnd nach entgegengesetzten Seiten (rechts und links).

Da man ferner unendlich entfernte Punkte, welche vom Endlichen aus betrachtet (in derselben oder) in parallelen Linien liegen, als *einen* einzigen Punkt betrachten kann, so darf man sagen, ein Punkt durch-

laufe einen *Zug* der Kurve *einfach*, wenn er sich so auf ihm fortbewegt, 507 dass er zuletzt wieder zu dem Ausgangspunkte † zurückkehrt, ohne aber inzwischen irgend einen Punkt seiner früheren Bahn wieder berührt zu haben, wobei jedesmal, wenn der Punkt ins Unendliche vorgerückt ist, er dann sogleich in entgegengesetzter Richtung (aber auf neuer Bahn) wieder aus dem Unendlichen dem Endlichen zustrebt.

3. Hiernach besteht die Kurve dritter Ordnung aus zwei Zügen, von denen der eine durch jede Gerade in einer ungeraden, der andere (der also auch imaginär werden kann) in einer geraden Anzahl von Punkten geschnitten wird. Ich will den ersteren den *Hauptzug*, den anderen den *Nebenzug* nennen.

4. Wenn eine Gerade sich um einen einfachen Punkt einer Kurve dritter Ordnung bewegt und einer der beiden anderen Durchschnittspunkte der Geraden und der Kurve einen Zug derselben einfach durchläuft, so thut es auch der andere (weil die Rückkehr des einen auch die des andern bedingt).

Um nun zu dem allgemeinen Satze zu gelangen, nehme ich in der Kurve dritter Ordnung eine ungerade Anzahl n von einfachen festen Punkten $a_1, a_2, \ldots a_n$ und eine bewegliche gebrochene Linie $x_1, x_2, \ldots x_{n+1}$ an, deren $n+1$ Ecken auf der Kurve liegen und deren n Seiten nach der Reihe durch die n festen Punkte gehen, das heisst, ich ziehe von a_1 durch den auf der Kurve sich bewegenden Punkt x_1 eine Gerade, welche die Kurve zum dritten Male in x_2 schneidet, ziehe $x_2 a_2$, welche die Kurve zum dritten Male in x_3 508 schneidet u. s. w., zuletzt $x_n a_n$, welche die Kurve † noch in x_{n+1} schneidet. Durchläuft nun x_1 einen Zug der Kurve einfach, so thut das (nach 4.) auch x_2, also auch x_3 u. s. w., zuletzt x_{n+1}. Ferner müssen (nach 2.) die Endpunkte jeder Seite der Figur nach entgegengesetzten Seiten (links und rechts) sich bewegen, also, da die Seitenzahl n ungerade ist, auch x_1 und x_{n+1}. Ferner, wenn einer der Punkte $a_1, \ldots a_n$ auf dem Hauptzuge liegt, so müssen (nach 3.) die Ecken der durch diesen Punkt gehenden Seite auf ein und demselben Zuge sich bewegen, wenn hingegen einer jener Punkte auf dem Nebenzuge liegt, so bewegen sich die Ecken der durch diesen Punkt gehenden Seite in verschiedenen Zügen; wenn also m jener Punkte $a_1, \ldots a_n$ auf dem Nebenzuge liegen, so wechseln die Punkte $x_1, \ldots x_{n+1}$ nach der Reihe m-mal den Zug, in welchem sie sich bewegen; ist also m eine ungerade Zahl, so bewegen sich x_1 und x_{n+1} in verschiedenen Zügen, können sich also nie begegnen; ist aber m gerade, so bewegen sich x_1 und x_{n+1} auf demselben Zuge und durchlaufen ihn nach dem Obigen einfach und nach entgegengesetzter Seite, begegnen sich also

auf ihm zweimal. Da dies auf jedem der beiden Züge geschehen kann, so folgt:

Wenn auf einer Kurve dritter Ordnung eine ungerade Anzahl n von Punkten gegeben ist, von denen eine gerade Anzahl auf dem Nebenzuge, die übrigen auf dem Hauptzuge liegen, so giebt es vier n-Ecke, deren Ecken † auf der Kurve liegen und deren Seiten einzeln durch die n ge- 509 *gebenen Punkte gehen.*

Von diesen vier n-Ecken werden nur dann zwei imaginär, wenn der Nebenzug selbst imaginär wird. Wenn aber eine ungerade Anzahl der n Punkte auf dem Nebenzuge liegt, so ist kein Vieleck der genannten Art möglich.

Es liegt hierin (für $n = 1$) der Satz, dass man von jedem Punkte des Hauptzuges vier und, wenn der Nebenzug imaginär ist, zwei reelle Tangenten an die Kurve ziehen kann, von einem Punkte des Nebenzuges keine.

Ferner kann man den Satz dahin erweitern, dass man statt jeder beliebigen Seite, zum Beispiel statt der Seite $x_1 x_2$, die durch a_1 geht, einen Bogen $x_1 x_2$ setzt, der einem durch vier gegebene Punkte a_1, b_1, c_1, d_1 der Kurve gehenden veränderlichen Kegelschnitte angehört. Auch hier muss von den sämtlichen gegebenen Punkten eine gerade Anzahl auf dem Nebenzuge liegen. Der Beweis dieses allgemeinen Satzes ist ganz derselbe wie der oben für geradseitige n-Ecke mitgetheilte, indem sich die Hülfssätze unmittelbar auf diesen allgemeinen Fall übertragen lassen, wobei Satz 3 dann aussagt, dass jeder Zug durch einen Kegelschnitt in einer geraden Anzahl von Punkten geschnitten wird.

XIX.

567 Ueber zusammengehörige Pole und ihre Darstellung durch Produkte.

Von

H. Grassmann in Stettin.

Göttinger Nachrichten 1872, Nr. 28 vom 25. December, S. 567—576.

An die Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.

Unter dem erschütternden Eindrucke, welchen der für die Wissenschaft unersetzliche Verlust eines der hervorragendsten Meister auf fast allen Gebieten der Mathematik auf mich, wie gewiss auf alle gemacht hat, welche seine bahnbrechenden Leistungen zu schätzen wissen, versuche ich einige der Gedanken niederzuschreiben, welche die letzten Arbeiten, die das unerschöpfliche Genie des Dahingeschiedenen hervorbrachte, und die er im letzten Hefte seiner Annalen sowie der Nachrichten unserer Gesellschaft niederlegte, in mir erregt haben. Nichts davon ahnend, dass A. Clebsch mitten aus seiner glänzenden Laufbahn, 568 die er mit rüstiger Jugendkraft durchschritt, † herausgerissen werden sollte, hatte ich ihm noch nicht zwei Wochen vor seinem Tode einen kurzen Aufsatz, der an eine jener Arbeiten (Annalen Bd. 5, S. 424) anknüpfte, übersandt*), ihm die Art seiner Veröffentlichung anheimstellend, und ihm zugleich für die nächsten Wochen einen Aufsatz zugesagt, welcher sich auf eine mit jener ersteren eng verbundene Arbeit (ebendaselbst S. 422) beziehen sollte. Ich nehme mir die Freiheit, diese letztere der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaft hiermit vorzulegen.

Clebsch hat in dem letzten Hefte seiner Annalen (S. 422—424) die von Hesse gefundene Eigenschaft der Polenpaare einer Kurve dritter Ordnung und die daraus abgeleitete Schröter'sche Konstruktion dieser

*) {Nr. XVIII der vorliegenden Ausgabe.}

Kurve durch drei gegebene Polenpaare behandelt und in gewohnter Weise durch wenige tief in das Wesen der Sache einschneidende Sätze und Bemerkungen die ganze Betrachtungsweise wesentlich gefördert. Indem ich den von ihm eingeschlagenen Weg verfolgte, gelang es mir, der Betrachtung noch eine andere Seite abzugewinnen, welche auch eine unmittelbare Anwendung auf Kurven höherer Ordnungen gestattete, und für diese eine Reciprocität erkennen lässt, wie sie zwischen Pol und Polare eines Kegelschnittes herrscht.

Zu dem Ende wende ich eine Bezeichnung der Kurve n-ter Ordnung an, welche der von Clebsch mit dem glücklichsten Erfolge gebrauchten symbolischen Darstellung einer solchen Kurve nahe verwandt ist. Sind nämlich x_1, x_2, x_3 Dreieckskoordinaten, bezogen auf ein Dreieck, dessen Ecken e_1, e_2, e_3 seien, und bildet man die Potenz $(x_1 + x_2 + x_3)^n$ und multiplicirt jedes Glied in der Entwickelung dieser Potenz mit † einem Koefficienten, so nenne ich mit Clebsch diese 569 Koefficienten zugleich Koefficienten der so entstandenen Funktion φ. Aber statt nun die Potenz $(x_1 + x_2 + x_3)^n$ als Symbol dieser Funktion zu gebrauchen, wende ich, gemäss meiner Darstellung in der Ausdehnungslehre (von 1862, Nr. 358 {diese Ausgabe I, 2, S. 230}), ein beliebiges Zeichen α oder α_n in der Weise als Symbol derselben an, dass dies Zeichen mit beliebigen Potenzen jener Ecken e_1, e_2, e_3 multiplicirt denjenigen Koefficienten jener Funktion φ bezeichnet, welcher zu dem Produkte der entstehenden Potenzen von x_1, x_2, x_3 gehört. Also wenn

$$c_{ikl}\,\alpha_{ikl}\,x_1{}^i x_2{}^k x_3{}^l$$

irgend ein Glied der Funktion φ ist, c_{ikl} der Koefficient von $x_1{}^i x_2{}^k x_3{}^l$ in der Entwickelung der Potenz $(x_1 + x_2 + x_3)^n$, α_{ikl} also nach dem Obigen der zugehörige Koefficient von φ, und α_n das Symbol von φ ist, so ist stets

$$\alpha_{ikl} = \alpha_n e_1{}^i e_2{}^k e_3{}^l.$$

Wird nun endlich der Punkt x, dessen auf das Dreieck e_1, e_2, e_3 bezogene Koordinaten x_1, x_2, x_3 sind, $= x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$ gesetzt (Ausdehnungslehre von 1844, § 116 und 117 {diese Ausgabe I, 1, S. 191—193}, Möbius barycentrischer Calcül), so leuchtet unmittelbar ein, dass die obige Funktion φ genau dargestellt wird durch $\alpha_n x^n$; zum Beispiel wird die Funktion

$$\alpha_{11} x_1{}^2 + \alpha_{22} x_2{}^2 + \alpha_{33} x_3{}^2 + 2\alpha_{23} x_2 x_3 + 2\alpha_{31} x_3 x_1 + 2\alpha_{12} x_1 x_2 = \alpha_2 x^2$$

sein. Wird $\alpha_n x^n = 0$, so ist der Ort für x eine Kurve n-ter Ordnung, und wir können daher α_n † auch als Symbol dieser Kurve auffassen. 570

Sind nun a und b zwei beliebige Punkte und λ eine veränderliche Zahl, so stellt $a + \lambda b$ bekanntlich jeden beliebigen Punkt der Geraden

ab dar, und die Gleichung $\alpha_n(a + \lambda b)^n = 0$ liefert die n Durchschnittspunkte dieser Geraden mit der Kurve α_n. Die Entwickelung giebt

$$(1) \qquad \alpha_n a^n + n \,.\, \alpha_n a^{n-1} b \,.\, \lambda + \frac{n(n-1)}{2} \alpha_n a^{n-2} b^2 \,.\, \lambda^2 + \cdots = 0.$$

Diese Gleichung zeigt, dass, wenn die m ersten Glieder derselben null sind, auch m Werthe von λ null sind, also die Gerade ab die Kurve α_n in a m-punktig berührt, ferner dass, wenn die m ersten Glieder für jeden Werth von b verschwinden, auch jede durch a gezogene Gerade die Kurve in a m-punktig trifft, das heisst, a ein m-facher Punkt ist. Setzen wir nun ein Symbol α_m nur dann gleich Null, wenn es mit beliebigen m Punkten multiplicirt Null giebt, oder, anders ausgedrückt, wenn seine sämmtlichen Koefficienten null sind, so können wir sagen $\alpha_n a^{n-m} = 0$ drücke aus, dass der Punkt a ein $(m + 1)$-facher Punkt der Kurve α_n sei; namentlich $\alpha_n a^{n-1} = 0$, dass a ein Doppelpunkt derselben sei.

Die Glieder in der obigen Gleichung (1) stellen, wenn man b veränderlich setzt, die zu der Kurve α_n gehörigen Polaren von a dar. Namentlich ist $\alpha_n a$ Symbol der ersten Polare von a, welche ich schlechthin 271 die Polare von a † nennen will, $\alpha_n a^2$ Symbol der zweiten Polare von a, welche ich die Polare von a^2 nennen will, u. s. w. Ferner werde ich die durch das Symbol $\alpha_n a_1 a_2 \ldots a_m$ dargestellte Kurve $(n - m)$-ter Ordnung die zu der Kurve α_n gehörige Polare des Vereins der Punkte $a_1, a_2 \ldots, a_m$ oder kurz die Polare von $a_1 a_2 \ldots a_m$ nennen.

Diese Bestimmungen genügen, um die Polenpaare einer Kurve dritter Ordnung und die zusammengehörigen Pole von Kurven höherer Ordnung auf die einfachste Weise abzuleiten. In der That bestimmt die Gleichung

$$(2) \qquad \alpha_3 ab = 0$$

a und b als Polenpaar der Kurve α_3. Setzt man die Polare von a, also $\alpha_3 a, = \alpha_2$, so sagt die Gleichung $\alpha_2 b = 0$ aus, dass b ein Doppelpunkt des Kegelschnittes α_2 ist, das heisst, dass die Polare von a in zwei gerade Linien zerfällt, die sich in b schneiden. Diese Eigenschaft haben aber die Punkte a der Hessiana von α_3, das heisst a (und also auch b) liegt in dieser Hessiana, und jeder Punkt a der letzteren hat die Eigenschaft, dass $\alpha_3 ab = 0$ ist, wenn b den Doppelpunkt der Polare von a bezeichnet. Auch leuchtet sogleich ein, dass (falls nicht α_3 in drei durch einen Punkt gehende Gerade ausartet) zu jedem Punkte a der zugepaarte b genau und eindeutig bestimmt ist.

Die Gleichung (2) lehrt alle hierher gehörigen Aufgaben aufs einfachste lösen. So liefert sie sogleich die Gleichung der Hessiana. Denn sie

sagt aus, dass $\alpha_3 ab$ mit jedem Punkte multiplicirt Null giebt, {und} dies wird erfüllt, wenn $\alpha_3 ab$ mit dreien ein Dreieck bildenden Punkten e_1, e_2, e_3 † einzeln multiplicirt Null giebt, also wenn 572

$$\alpha_3 a e_1 b = \alpha_3 a e_2 b = \alpha_3 a e_3 b = 0$$

ist, das heisst, wenn b der Durchschnitt der drei Geraden $\alpha_3 a e_1$, $\alpha_3 a e_2$, $\alpha_3 a e_3$ ist; die einzige Bedingung für die Hessiana ist also, dass diese drei Geraden sich in einem Punkte schneiden. Nun habe ich gezeigt (Ausdehnungslehre von 1844 § 144, von 1862 Nr. 295 {diese Ausgabe I, 1, S. 243, I, 2, S. 187}, dass die Bedingung, dass drei Gerade A, B, C sich in einem Punkte schneiden, durch die Gleichung $[ABC] = 0$ dargestellt werden kann. Also ist die Gleichung der Hessiana

$$[\alpha_3 a e_1 \,.\, \alpha_3 a e_2 \,.\, \alpha_3 a e_3] = 0,$$

wo a der diese Kurve beschreibende Punkt ist; ich werde die Hessiana von α_3 symbolisch mit β_3 bezeichnen. Es liegen also a und b in β_3, und zwar einer derselben darin ganz willkürlich; dann ist aber, vorausgesetzt, dass die Curve α_3 gegeben ist, der andere eindeutig bestimmt.

Die Aufgabe, welche der Schröter'schen Konstruktion zu Grunde liegt, nämlich aus zwei Polenpaaren (ab und cd) ein drittes abzuleiten, führt hiernach auf die einfache Aufgabe zurück, aus zwei verschwindenden Produkten je zweier Punkte ein drittes solches abzuleiten, und zwar unter Anwendung der gewöhnlichen Multiplikationsgesetze. Hierbei ist vorauszusetzen, dass keine drei der vier Punkte a, b, c, d in gerader Linie liegen. Wir können a, b, c, d als vielfache Punkte (Punkte mit {je} einem Koefficienten versehen) setzen; dann lässt sich d als Summe der drei andern darstellen, also $d = a + b + c$. Die gesuchten Punkte seien

$$x = x_1 a + x_2 b + c, \quad y = y_1 a + y_2 b + c,$$

so hat man, wenn $0 = ab = cd = xy$ sein soll, erstens $c(a + b + c) = 0$, das heisst $c^2 = -ab - bc$; und mit Benutzung dieser Gleichung erhält man

$$xy = x_1 y_1 a^2 + x_2 y_2 b^2 + (y_1 + x_1 - 1) ac + (y_2 + x_2 - 1) bc = 0,$$

wo die einzelnen Koefficienten null † sein müssen. Aus $x_1 y_1 = 0$ 573 folgt beispielsweise $x_1 = 0$, dann darf aber nicht x_2 verschwinden, weil sonst x mit c identisch wäre; also folgt dann aus $x_2 y_2 = 0$ nothwendig $y_2 = 0$, und aus den beiden andern $x_2 = 1$, $y_1 = 1$, das heisst, einer der beiden gesuchten Punkte ist $c + b$, der andere $c + a$; der Punkt $c + b$ liegt aber erstens in der Geraden cb und zweitens, da $c + b = d - a$ ist, in der Geraden ad, also im Durchschnitt beider, und aus gleichem Grunde der andere in dem Durchschnitte der Geraden ca und db, was

die Schröter'sche (schon von Hesse augedeutete) Konstruktion ist. Fallen a und c in der Tangente t (an β_3) zusammen und d und b in der Tangente t_1, so ist der eine jener abgeleiteten Punkte der Durchschnittspunkt dieser Tangenten, also liegt auch dieser Durchschnittspunkt stets auf der Kurve β_3.

Aus dieser Darstellung ergiebt sich die Eigenschaft zusammengehöriger Pole für Kurven höherer Grade von selbst. Ist zum Beispiel α_4 Symbol eine Kurve vierter Ordnung, so stellt

$$\alpha_4 abc = 0 \tag{3}$$

die Eigenschaft von drei zusammengehörigen Polen a, b, c einer Kurve vierter Ordnung α_4 dar. Einer dieser Pole, zum Beispiel a, ist ganz willkürlich; dann ist aber, wenn die Polare $\alpha_4 a$ von a gleich α_3 gesetzt wird, $\alpha_3 bc = 0$, das heisst, b liegt willkürlich in der Hessiana β_3 von α_3. Dann ist aber (falls nicht die Polare α_3 in drei durch einen Punkt gehende Gerade zerfällt, was nur bei besonderen Arten von Kurven vierter Ordnung und auch hier nur für bestimmte Punkte a gilt) der dritte Punkt c eindeutig bestimmt. Ich will diese Kurve β_3, 574 da sie durch die Wendepunkte † von α_3 geht, der Kürze wegen die (zu α_4 gehörige) *Wendelinie* des Poles a nennen; das heisst, Wendelinie des Punktes a nenne ich die Hessiana der Polare von a. Da man also die Faktoren a, b, c vertauschen kann, so haben jede drei in Bezug auf eine Kurve vierter Ordnung zusammengehörige Punkte die Eigenschaft, dass die Wendelinie jedes der drei Punkte durch die beiden andern geht, oder, anders ausgedrückt: Bestimmt man zu einem beliebigen Pole a die Wendelinie, und nimmt auf dieser einen beliebigen Punkt b an, so geht dessen Wendelinie durch a, und beide Wendelinien gehen durch den Punkt c, welcher mit a und b einen Verein dreier zusammengehöriger Punkte bildet.

Um die entsprechenden Beziehungen für Kurven höherer Ordnungen darzustellen, wird es genügen, sie noch für Kurven fünfter Ordnung zur Anschauung zu bringen. Hier stellt die Gleichung

$$\alpha_5 abcd = 0 \tag{4}$$

die Eigenschaft von vier zusammengehörigen Punkten dar. Die Hessiana β_3 zu der Polare $\alpha_3 = \alpha_5 ab$ des Punktenpaares ab heisse auch hier die Wendelinie des Punktenpaares ab (in Bezug auf die Kurve α_5). Es haben also jede vier in Bezug auf eine Kurve 5. Ordnung zusammengehörige Punkte die Eigenschaft, dass die Wendelinie je zweier unter ihnen durch die beiden andern geht, oder, anders ausgedrückt:

Bestimmt man die Wendelinie zu zwei beliebigen Punkten a und b der Ebene, und nimmt auf dieser Wendelinie einen beliebigen Punkt c

an und sucht dann zu a, b, c den dadurch bestimmten Punkt d, welcher mit ihnen einen Verein von vier zusammengehörigen Punkten bildet, so geht jede Wendelinie † von zweien dieser Punkte durch die beiden 575 andern. Hierbei ist vorausgesetzt, dass die zu zweien dieser Punkte gehörige Polare nicht in drei durch einen Punkt gehende Linien zerfällt, was nur für eine begränzte Anzahl von Punktenpaaren der Fall sein kann.

Es sind hier überall nur diejenigen Gleichungen in Betracht gezogen, wo das Symbol der Kurven n-ter Ordnung mit $n-1$ Punkten multiplicirt war, so dass überall nur *eine* der Faktorstellen unausgefüllt bleibt. Sollen mehr, zum Beispiel m der Faktorstellen unausgefüllt bleiben, so muss man, um zu einfachen Resultaten zu gelangen, zunächst einen andern Weg einschlagen, den ich hier nur andeuten will. Man hat nämlich dann eine Grösse P_m einzuführen, welche nicht unmittelbar aus m Punktfaktoren besteht, sondern vielmehr aus solchen Produkten numerisch abgeleitet ist; {man hat} also zum Beispiel

$$P_2 = a_{11}e_1^2 + a_{22}e_2^2 + a_{33}e_3^2 + a_{23}e_2e_3 + a_{31}e_3e_1 + a_{12}e_1e_2$$

zu setzen, wo a_{11}, a_{22}, ... Zahlen sind. Hat man zum Beispiel $\alpha_5 a P_2 = 0$, wo α_5 wieder ein Symbol einer Kurve 5. Ordnung ist, so hat man als Ort für a eine Kurve 6. Ordnung, welche die gleich Null gesetzte Determinante der sechs Gleichungen

$$\alpha_5 a P_2 e_1^2 = 0, \quad \alpha_5 a P_2 e_2^2 = 0, \ \ldots, \ \alpha_5 a P_2 e_1 e_2 = 0, \ \ldots$$

in Bezug auf die sechs Unbekannten a_{11}, a_{22}, ..., a_{12} ist. Man sieht sogleich, dass diese Determinantengleichung für $\alpha_n a^{n-4} P_2 = 0$ vom $6(n-4)$-ten Grade ist. Die durch sie dargestellte Kurve entspricht genau der Hessiana. Man kann sie die zweite Determinantencurve nennen, wenn die Hessiana als die erste bezeichnet wird. Ganz auf dieselbe Weise ergiebt sich zu $\alpha_n a^{n-2m} P_m = 0$ † eine m-te Determi- 576 nantencurve, deren Ordnung $\frac{1}{2}(m+1)(m+2)(n-2m)$ ist, und welche für $m=1$ in die Hessiana übergeht.

Stettin, den 15. November 1872.

XX.

538 Die neuere Algebra und die Ausdehnungslehre.

Von

Hermann Grassmann in Stettin.

Mathematische Annalen Bd. 7, Heft 4, S. 538—548, ausgegeben am 30. 6. 1874, Leipzig.

Die neuere Algebra hat durch die vereinten Bemühungen der hervorragendsten Mathematiker gegenwärtig eine Ausbildung erlangt, welche sie fast mit allen Zweigen der Mathematik in die engste Beziehung setzt und auch diese mit ihren Ideen befruchtet. Und in dem Mittelpunkte aller dieser Bestrebungen stand seit einer Reihe von Jahren der seinen zahlreichen Freunden und der gesamten Wissenschaft so früh entrissene Clebsch, der fast nach allen Seiten hin diese Bestrebungen anregte und förderte, und die vereinzelten hier und dort gewonnenen Resultate zu verweben und durch neue und umfassende Gedanken zu beleben und auf neue vielverheissende Bahnen zu lenken verstand. Durch ihn bin auch ich wieder auf das Gebiet der neueren Algebra zurückgeführt und zu dem Versuche angeregt worden, dasselbe mit dem nahe angrenzenden Gebiete der Ausdehnungslehre in näheren Zusammenhang zu setzen. Indem ich die Principien dieser Wissenschaft, wie ich sie in meinen Werken von den Jahren 1844 und 1862 bearbeitet habe, auf die Probleme der Invariantentheorie anwandte, gelangte ich zu einem Satze, der, wie ich glaube, als ein Fundamentalsatz dieser Theorie angesehen werden muss, und den ich seinem wesentlichen Inhalte nach hier sogleich aufstelle.

§ 1.

Fundamentalsatz.

In diesem Satze bedeutet m die Anzahl der Einheiten (in der geraden Linie zwei, in der Ebene drei u. s. w.), aus denen die der Betrachtung unterworfenen extensiven Grössen numerisch abgeleitet werden,

k die Anzahl sämtlicher Zahlkoefficienten, welche in dem zu Grunde liegenden Vereine algebraischer Formen vorkommen und welche sämtlich als von einander unabhängig betrachtet werden.

Alle Formen (Invarianten, Kovarianten, Zwischenformen u. s. w.), *welche einer gegebenen algebraischen Form oder einem Vereine solcher Formen entspriessen, lassen sich aus $k - m + 1$ von einander unab-* 539 *hängigen Stammformen als rationale Funktionen ableiten, und zwar als ganze Funktionen, wenn man eine gewisse ganze Funktion u dieser Stammformen gleich Eins setzt. Man erhält diese Stammformen, indem man in den gegebenen Formen statt der extensiven Variabeln x m extensive Variabeln $x_1, \ldots, x_m$* (statt jedes einzelnen Faktors eine beliebige derselben) *einführt, von denen eine, etwa x_1, mit x gleich, und eine andere, etwa x_m, durch die übrigen und durch eine der gegebenen Formen in der Art bestimmt ist, dass sie in Bezug auf diese Form Centrum erster Ordnung zu den Polen $x_1, \ldots x_{m-1}$ wird und ausserdem $u = [x_1 x_2 \ldots x_m] = 1$ ist. Wenn dann eine beliebige dem gegebenen Vereine entsprossene Form Π als ganze Funktion der Stammformen dargestellt werden soll, so gelingt dies unmittelbar, indem man in Π statt der Einheiten $e_1, \ldots, e_m$, von denen die k Koefficienten abhängen, $x_1, \ldots, x_m$ einführt, eine der veränderlichen Zahlen, von denen x $(= x_1)$ abhängt* (etwa x_{11}) *gleich Eins und die übrigen {gleich} Null setzt.*

Auch wenn diese invarianten Bildungen Π nur symbolisch gegeben sind, lässt sich die Reduktion auf die Stammformen aufs leichteste ausführen.

Dadurch, dass man $u = 1$ setzt, kann die Homogenität aufhören, aber man kann sie stets sofort wieder herbeiführen, wenn man u so oft (statt 1) als Faktor hinzufügt, bis die Homogenität erreicht ist.

Ferner gilt dieser Satz nicht nur, wenn die gegebenen Formen einfach-algebraische, sondern auch, wenn sie alle oder einige unter ihnen Konnexe oder Komplexe, oder aus beiden beliebig zusammengesetzte Formen sind, zum Beispiel Formen, welche in der Ebene von Punkten und Linien (Annalen VI, 203), im Raume von Punkten, Linien (oder Summen derselben) und Ebenen, überhaupt in einem Gebiete m-ter Stufe von Grössen erster, zweiter bis $(m - 1)$-ter Stufe abhängen (Annalen VII, 43).

In allen diesen Fällen kann man statt der $k - m + 1$ Stammformen auch beliebige andere aber von einander unabhängige invariante Bildungen (Invarianten, Kovarianten u. s. w.) einführen, welche dem gegebenen Vereine entsprossen sind; aber es hört dann, wenn man statt aller Stammformen die üblichen invarianten Bildungen einführen will, schon bei ternären Formen die Rationalität auf und man muss

dann zu einer grösseren Zahl jener Bildungen seine Zuflucht nehmen, wenn man die Rationalität bewahren will.

Diese Bemerkungen werden genügen, um die Bedeutung und die Anwendbarkeit des neuen Fundamentalsatzes vorläufig festzustellen. Für das nähere Verständniss ist es erforderlich, einige Grundbegriffe aus der Ausdehnungslehre aufzunehmen und sie mit der üblichen Symbolik (die ich unverändert beibehalte) in Beziehung zu setzen; doch 540 beschränke ich mich auf das für den vorliegenden Zweck Unentbehrlichste, indem ich im Uebrigen auf die Paragraphen meiner Ausdehnungslehre von 1844 (A_1) und auf die Nummern der Bearbeitung derselben von 1862 (A_2) verweise.

§ 2.

Grundbegriffe der Ausdehnungslehre und ihre Anwendung auf die neuere Algebra.

Den extensiven Grössen, welche die Ausdehnungslehre behandelt, liegt eine Reihe von Grössen zu Grunde, welche in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, das heisst, von denen sich keine aus den übrigen numerisch ableiten oder, anders ausgedrückt, keine sich als lineare Funktion der übrigen mit Zahlkoefficienten darstellen lässt, und die ich, sofern sie als ursprünglich zu Grunde liegend betrachtet werden, *Einheiten* erster Stufe genannt habe. Als solche können zum Beispiel im Raume vier beliebige Punkte betrachtet werden, die nicht in einer Ebene liegen. Es seien $e_1, \ldots, e_m$ diese Einheiten, so nenne ich Grösse erster *Stufe* jede Grösse $x_1 e_1 + \cdots + x_m e_m$, wo $x_1, \ldots, x_m$ Zahlgrössen sind, und die Gesamtheit dieser Grössen nenne ich ein Gebiet m-ter Stufe (A_1 § 13; A_2 Nr. 1 ff., {d. Ausg. I, 1, S. 46 ff., I, 2, S. 11 ff.}).

Das *Produkt* zweier Grössen erster Stufe nenne ich ein *kombinatorisches*, wenn für dasselbe die Gesetze $[aa] = 0$, $[ab] = -[ba]$ gelten, und nenne diese Produkte und die aus ihnen numerisch ableitbaren Grössen Grössen zweiter Stufe. Entsprechend bei drei und mehr Faktoren erster Stufe, bei denen gleichfalls das Produkt Null wird, wenn zwei Faktoren gleich werden, und entgegengesetzten Werth annimmt, wenn man zwei derselben vertauscht. (A_1 § 33; A_2 Nr. 52 ff. {d. Ausg. I, 1, S. 83 ff., I, 2, S. 38 ff.}.)

Man erhält so Grössen erster bis m-ter Stufe, während die Zahlen als Grössen nullter Stufe erscheinen. Grössen von höherer als m-ter Stufe kann es in einem Gebiete m-ter Stufe nicht geben, da das kombinatorische Produkt von $m + 1$ Grössen erster Stufe schon ersichtlich Null wird. Aber auch die Grössen m-ter Stufe liefern keine

eigenthümlichen neuen Grössen. Denn sie verhalten sich wie blosse Zahlen, indem $[a_1 a_2 \ldots a_m] = [e_1 e_2 \ldots e_m] \Delta$ ist, wenn Δ die Determinante der Zahlenreihen bezeichnet, durch welche $a_1, \ldots, a_m$ aus $e_1, \ldots, e_m$ abgeleitet sind (A_1 § 45, A_2 Nr. 62 ff. {d. Ausg. I, 1, S. 100, I, 2, S. 43 ff.}). Schon hieraus ist ersichtlich, dass die Bezeichnung eines kombinatorischen Produktes von m Faktoren mit der der symbolischen Produkte in der Invariantentheorie im Wesen übereinstimmt. Um diese Produkte (von m Faktoren) als wirkliche Zahlen darzustellen, genügt es, das kombinatorische Produkt der m Einheiten erster Stufe $[e_1 e_2 \ldots e_m]$ gleich Eins zu setzen.

Jede Grösse p-ter Stufe ist offenbar aus Einheiten p-ter Stufe, welche † die Kombinationen ohne Wiederholung aus den m Einheiten erster Stufe zur p-ten Klasse darstellen, numerisch ableitbar. So wie aber die Grössen m-ter Stufe vermöge obiger Gleichung $[e_1 e_2 \ldots e_m] = 1$ als Grössen nullter Stufe sich darstellen, so entsprechen sich überhaupt die Grössen p-ter und $(m - p)$-ter Stufe (immer im Ganzen m Einheiten erster Stufe vorausgesetzt). Um dies Entsprechen klar hervortreten zu lassen, setze ich einem kombinatorischen Produkte von Einheiten erster Stufe das kombinatorische Produkt der übrigen Einheiten erster Stufe reciprok und zwar mit der Zeichenbestimmung, dass, wenn an jenes Produkt dies *reciproke* (ergänzende A_1 § 138, A_2 Nr. 89 ff. {d. Ausg. I, 1, S. 227, I, 2, S. 62 ff.}) angeschlossen wird, und dadurch beide zu *einem* Produkte von m Einheiten verbunden werden, dies gesamte Produkt gleich $+1$ wird. Dadurch ist dann zu jeder Grösse ihre reciproke, die aus den reciproken Einheiten durch dieselben Zahlen abgeleitet ist, wie jene aus den ihrigen, genau bestimmt. Alle Gesetze der Ausdehnungslehre lassen sich dann unmittelbar auf die reciproken Grössen übertragen. Als Beispiel wähle ich die Grössen in einem Gebiete vierter Stufe, im Raume. Hier treten hervor die Grössen erster Stufe als Punkte, die Grössen zweiter Stufe als Linien und Summen von Linien (A_1 § 113, 122; A_2 Nr. 285 {d. Ausg. I, 1, S. 188, 201, I, 2, S. 185}), die Grössen dritter Stufe als Ebenen; während die Grössen vierter Stufe, da sie Raumtheile darstellen, sich in Zahlen verwandeln, wenn man einen Raumtheil $[e_1 e_2 e_3 e_4] = 1$ setzt. Die Grössen erster Stufe sind aus den vier Einheiten e_1, e_2, e_3, e_4, die Grössen dritter Stufe aus den vier zu jenen reciproken Einheiten r_1, r_2, r_3, r_4, die Grössen zweiter Stufe aus sechs Einheiten, nämlich $[e_2 e_3]$, $[e_3 e_1]$, $[e_1 e_2]$ und den reciproken $[e_1 e_4]$, $[e_2 e_4]$, $[e_3 e_4]$ ableitbar; und ist X aus diesen sechs Einheiten durch die Zahlen $x_1, \ldots, x_6$ abgeleitet, so stellt eine Funktion dieser Zahlen einen von X beschriebenen Komplex dar, welcher ein specieller Komplex wird, wenn $[XX] = 0$ ist (A_1 § 124;

A_2 Nr. 286, vgl. Nr. 393 {d. Ausg. I, 1, S. 205, I, 2, S. 185, 264}) und vor allem Klein's gedankenreiche Arbeiten im zweiten und fünften Bande der Annalen).

Für die Invariantentheorie sind von besonderem Interesse die kombinatorischen Produkte von einer Grösse $(m-1)$-ter und einer Grösse erster Stufe, welche wieder, da die Gesamtzahl der Faktoren erster Stufe, die in ihnen enthalten sind, m beträgt, als Zahlen erscheinen. Ist x eine Grösse erster Stufe $x_1 e_1 + \cdots + x_m e_m$ (wo $x_1, \ldots, x_m$ Zahlen sind) und a eine Grösse $(m-1)$-ter Stufe $= a_1 r_1 + \cdots + a_m r_m$, wo $r_1, \ldots, r_m$ die zu $e_1, \ldots e_m$ reciproken Einheiten und $a_1, \ldots a_m$ Zahlen sind, so ist nach obigem $[e_i r_i] = 1$, hingegen $[e_i r_k] = 0$, wenn i von k verschieden ist, also

$$[xa] = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_m x_m = a_x,$$

letzteres, wie unten gezeigt wird, nach der üblichen symbolischen Bezeichnung.

542 Ferner ist für den Begriff der invarianten Bildungen noch der Begriff der *linealen Aenderung* (A_2 Nr. 71—76 {d. Ausg. I, 2, S. 49—56}) von Wichtigkeit. Ich sage nämlich, eine Grösse einer Reihe von Grössen ändere sich lineal, wenn sie in eine andere Grösse übergeht, welche sich von jener nur dadurch unterscheidet, dass zu ihr eine mit einem beliebigen Zahlfaktor (μ) versehene andere Grösse der Reihe hinzutritt, also zum Beispiel A sich in $A + \mu B$ verwandelt, wenn A und B beliebige Grössen jener Reihe sind, und ich sage, die Grössenreihe sei lineal geändert, wenn sie beliebigen und beliebig wiederholten linealen Aenderungen der darin enthaltenen Grössen unterworfen ist. Es leuchtet sogleich ein, dass ein kombinatorisches Produkt von Grössen erster Stufe sich nicht ändert, wenn seine Faktorenreihe lineal geändert wird; aber ich habe auch (A_2 Nr. 76) gezeigt, dass von zwei gleichen kombinatorischen Produkten jedes in das andere durch lineale Aenderung seiner Faktorenreihe übergeführt werden kann (die Faktoren als Grössen erster oder auch $(m-1)$-ter Stufe vorausgesetzt).

Hiernach kann man *alle invarianten Bildungen* (Invarianten, Kovarianten u. s. w.) als *solche* definiren, *die bei linealer Aenderung der Einheiten ungeändert bleiben*, eine Definition, die ihrer Einfachheit wegen wohl vor der gewöhnlichen den Vorzug verdient, zumal da sie ohne weiteres auch alle symbolischen Bildungen als invariant nachweist.

Wenn sich nun die Einheiten $e_1, \ldots, e_m$ in beliebige aus ihnen numerisch ableitbare Grössen $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$ verwandeln, aber so, dass $[\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_m] = [e_1 e_2 \ldots e_m] = 1$ ist, und

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= a_{11}e_1 + \cdots + a_{1m}e_m, \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdots \quad \cdot \\ \varepsilon_m &= a_{m1}e_1 + \cdots + a_{mm}e_m, \end{aligned}$$

$$x = x_1 e_1 + \cdots + x_m e_m = \xi_1 \varepsilon_1 + \cdots + \xi_m \varepsilon_m$$

ist, so wird, wie man sogleich durch Einführung der Werthe der ε in die letzte Gleichung sieht,

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}\xi_1 + \cdots + a_{m1}\xi_m, \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdots \quad \cdot \\ x_m &= a_{1m}\xi_1 + \cdots + a_{mm}\xi_m; \end{aligned}$$

das heisst, die Substitutionen, durch welche die neuen Einheiten aus den alten, und die, durch welche die alten Variabeln aus den neuen hervorgehen, sind zu einander transponirt, und es lassen sich daher die invarianten Eigenschaften ebenso gut auf die Einheiten als auf die veränderlichen Zahlgrössen gründen; die Substitutionsdeterminante ist in beiden Fällen gleich und zwar unter obiger Voraussetzung gleich Eins. Die extensive Variable x bleibt dabei dieselbe und kann also als *Kovariante erster Stufe* aufgefasst werden.

Schon diese nahe liegende Betrachtungsweise führt vermöge der 543 durch Hermite eingeführten typischen Darstellung unmittelbar zu einem dem obigen Fundamentalsatze entsprechenden Satze, während für die Ableitung des Fundamentalsatzes selbst noch die Idee der Polaren (Centralen) zu Hülfe genommen werden muss.

Ausser der kombinatorischen Multiplikation ist nun für die neuere Algebra von gleicher Wichtigkeit diejenige Multiplikation, welche in ihren Gesetzen vollkommen mit der algebraischen Multiplikation der Zahlgrössen übereinstimmt, und welche ich daher, auch wenn die Faktoren Grössen höherer Stufen sind, die *algebraische* genannt und auch wie diese bezeichnet habe. Ihr Begriff und die Anwendung desselben auf Funktionen findet sich ausführlich entwickelt in Nr. 348—427 der Ausdehnungslehre von 1862, und dem wesentlichen Grundgedanken nach dargelegt auf S. *266 ff.* der Ausdehnungslehre von 1844 {d. Ausg. I, 2, S. 224—288, I, 1, S. 284 ff.}. Ist nämlich $f = f(x_1, \ldots, x_m)$ eine beliebige Funktion der m veränderlichen Zahlgrössen $x_1, \ldots, x_m$, und ist

$$x = x_1 e_1 + \cdots + x_m e_m,$$

wo $e_1, \ldots, e_m$ Einheiten von erster oder auch höherer Stufe sind, $r_1, \ldots, r_m$ die reciproken Einheiten, so ist nach dem Obigen $[e_i r_i] = 1$, hingegen $[e_i r_k] = 0$, wenn i von k verschieden ist; also ist $[x r_1] = x_1$, $[x r_2] = x_2$, u. s. w., also:

$$f(x_1, x_2, \dots x_m) = f([xr_1], [xr_2], \dots [xr_m]),$$

also eine Funktion einer einzigen, aber extensiven Variablen (A_2 Nr. 350). Ist insbesondere f eine homogene Funktion n-ten Grades, so kommt in $f([xr_1], \dots, [xr_m])$ die extensive Variable x in jedem Gliede n-mal als Faktor vor.

Entfernt man daher x aus diesen Verbindungen $[xr_i]$, und setzt an die Stelle, wo x gestanden hat, irgend ein Zeichen, welches die dadurch entstandene Lücke darstellt, und setzt nun den so aus

$$f([xr_1], \dots, [xr_m])$$

hervorgehenden Ausdruck $= a$, so wird

$$f = ax^n$$

(A_2 Nr. 358 {d. Ausg. I, 2, S. 230}). Ich habe diese Lücke Anfangs (A_1 Seite *266ff.* {d. Ausg. I, 1, S. 284ff.}) durch leer gelassene Klammern, später (A_2 Nr. 353ff. {d. Ausg. I, 2, S. 228ff.}) durch l bezeichnet; das Bequemste ist, sie durch irgend eine bestimmt gewählte extensive Variable zu bezeichnen, und ich werde dazu allemal x selbst wählen, so dass also $a = ax^n$ ist und ay^n aus ax^n (oder a) dadurch hervorgeht, dass man überall y statt x setzt. Sollen nun zu diesem Ausdrucke $a = ax^n = f([xr_1], \dots, [xr_m])$ verschiedene extensive Faktoren, die jedoch mit x von gleicher Stufe sein müssen, und deren Anzahl p nicht grösser als n sein darf, hinzutreten, so hat man (nach A_2 Nr. 353 544 {d. Ausg. I, 2, S. 228}) diese auf alle möglichen Arten † in p der Lücken (also hier statt x) einzuführen, und die Summe der so erhaltenen Ausdrücke durch ihre Anzahl, die hier $n(n-1)\dots(n-p+1)$ beträgt, zu dividiren. Nachdem dies festgesetzt ist, ergiebt sich leicht, (A_2 Nr. 360ff. {d. Ausg. I, 2, S. 231ff.}), dass für diese hinzutretenden Faktoren die Gesetze der gewöhnlichen algebraischen Multiplikation gelten, namentlich auch, dass

$$ax^n = a(x_1e_1 + \cdots + x_me_m)^n = x_1^n \,.\, ae_1^n + \frac{n}{1}\, x_1^{n-1}x_2 \,.\, ae_1^{n-1}e_2 + \cdots,$$

{dass} insbesondere, wenn {zum Beispiel} $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ ist,

$$\begin{aligned} ax^2 &= x_1^2ae_1^2 + x_2^2ae_2^2 + x_3^2ae_3^2 + 2x_1x_2ae_1e_2 + 2x_1x_3ae_1e_3 + 2x_2x_3ae_2e_3 \\ &= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{23}x_2x_3 \end{aligned}$$

ist (wenn ae_1^2 mit a_{11}, ae_1e_2 mit a_{12} u. s. w. bezeichnet wird); kurz ax^n ist dasselbe, was symbolisch durch a_x^n bezeichnet wird, während

$$\frac{d^p ax^n}{dx_1^\alpha dx_2^\beta \dots} = n(n-1)\cdots(n-p+1)\, ae_1^\alpha e_2^\beta \cdots$$

ist.

Ist x ein Punkt in der Ebene, so wird $ax^n = 0$ die Gleichung einer Kurve n-ter Ordnung; dann drückt die Gleichung $ax^{n-1}y = 0$ aus, dass (nach der Poncelet'schen Benennung) y harmonisches Centrum (erster Ordnung) zu der Kurve $ax^n = 0$ (nach der ursprünglichen Benennung zu den n Durchschnitten der Geraden xy mit dieser Kurve) in Bezug auf den Pol x ist; daher habe ich (Theorie der Centralen, in Crelle's Journal Band 24 und 25 {hier S. 3—48}) den Ort von x bei festem y die erste Polare von y und den Ort von y bei festem x die erste *Centrale* von x genannt*), und diese erste Centrale, die ich schlechthin Centrale nenne, spielt in der Invariantentheorie eine schon in dem Fundamentalsatze erkennbare Hauptrolle.

Im Allgemeinen werde ich $ax^{n-p}y^p$, als Funktion von y betrachtet, die p-te Centrale von x und, als Funktion von y betrachtet, die p-te Polare von y in Bezug auf die Funktion ax^n nennen, so dass also die p-te Polare {mit} der $(n-p)$-ten Centrale identisch ist. Endlich bemerke ich noch, dass auch die Komplexe durch eine Funktion der Form $ax^n x'^{n'} x''^{n''} \ldots$ dargestellt werden können, wo x eine Grösse erster Stufe, x' zweiter, x'' dritter Stufe ist u. s. w.

§ 3.

Symbolik.

Die angestellten Betrachtungen führen uns hinüber zu der symbolischen Bezeichnung, wie sie zuerst von Aronhold (Borch. J. Bd. 55) in die neuere Algebra eingeführt, und von Clebsch und in Anschluss 545 an ihn von Gordan zu der hohen Stufe von Vollkommenheit gebracht ist, welche sie gegenwärtig zu einer unentbehrlichen oder doch äusserst bequemen Waffe gemacht hat, um neue Gebiete mathematischen Wissens zu erobern. Die Bezeichnungen, die ich im vorhergehenden § angewandt habe, und die sich aus dem Wesen der Ausdehnungsgrössen mit unabweislicher Nothwendigkeit ergaben, und die ich daher kurz die organischen Bezeichnungen nennen will, sollen daher keineswegs jene vortreffliche Symbolik verdrängen oder ersetzen, sondern nur sie ergänzen, indem sie einerseits jener Symbolik stets eine reale, anschauliche Bedeutung unterlegen, andrerseits da eintreten, wo jene nicht ausreicht.

Es sei zuerst die reale Bedeutung der symbolischen Produkte

*) Vgl. Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen von 1872, S. 567 ff. {hier S. 250 ff.}. Gelegentlich bemerke ich, dass, was ich dort Wendelinie genannt habe, mit der von Clebsch so genannten Polardeterminante (Borch. Journ. 59, S. 125) zusammenfällt, was mir entgangen war.

$(abc\ldots)$ betrachtet, wo $a, b, \ldots$ sich auf die Funktionen ax^α, bx^β, u. s. w. beziehen, von denen aber auch mehrere einander gleich sein können. Dann bedeutet $(abc\ldots)$ zunächst die gleichfalls symbolische Determinante $\Sigma \pm a_1 b_2 c_3 \ldots$, und der ganze Ausdruck, sofern er nur solche symbolische Produkte enthält, gewinnt erst dadurch eine reale Bedeutung, dass man ihn nach Potenzen der $a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ entwickelt und die Potenzen der a zusammenordnet, ebenso die der b u. s. w.; alsdann hat man statt $a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \ldots$ zuletzt den Koefficienten $a_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots}$ von ax^n zu setzen. Dieser ist nach dem obigen $ae_1^{\alpha_1} e_2^{\alpha_2} \ldots$; also kann man $(abc\ldots) = \Sigma \pm ae_1 . be_2 . ce_3 \ldots$ setzen, das heisst $(abc\ldots)$ bedeutet, dass man in die zu $a, b, c, \ldots$ gehörigen Funktionen die Schaar der Einheiten $e_1, \ldots, e_m$ in allen möglichen Folgen (jede Einheit statt *eines* Faktors x der Funktion) eintreten lässt, dem so erhaltenen Produkt das $+$ oder $-$ Zeichen vorsetzt, je nachdem das kombinatorische Produkt der Einheiten in dieser Folge $+1$ oder -1 ist, und diese Produkte addirt; ich will dies so ausdrücken, dass ich sage, man habe dann in $abc\ldots$ die Schaar der Einheiten *harmonisch* eingeführt. Diese Einführung wird dann bei den folgenden symbolischen Produkten, die in dem ganzen Ausdrucke als Faktoren vorkommen, als schon vollzogen vorausgesetzt, so dass also in jeder Funktion nur noch die Faktoren x übrig bleiben, welche nicht schon früher durch Einheiten verdrängt waren.

Kommen ausser jenen symbolischen Produkten $(abc\ldots)$ noch die symbolischen Faktoren a_x^p u. s. w. vor, so bedeuten diese weiter nichts, als dass die noch übrig gebliebenen x in den betreffenden Funktionen ungeändert stehen bleiben sollen; sie können also alle weggelassen werden; nur wenn noch eine zweite Reihe von Veränderlichen (oder mehrere solche), die durch die extensive Grösse y bezeichnet sei, hinzukommt, so sind die Faktoren a_y^p u. s. w. nicht mehr zu unterdrücken; aber ihre Bedeutung ist aus dem Vorigen ohne weiteres ersichtlich.

Man kann aber die Bedeutung der symbolischen Produkte $(abc\ldots)$ 546 noch konkreter fassen. Nämlich setzen wir $r_1, r_2, \ldots, r_m$ als † die zu $e_1, e_2, \ldots, e_m$ reciproken Einheiten und bezeichnen mit $\bar{a}$ die Grösse $a_1 r_1 + a_2 r_2 + \cdots + a_m r_m$, wo $a_1, \ldots, a_m$ die Zahlgrössen sind, welche aus a durch Einführung von $e_1, e_2, \ldots, e_m$ statt eines x entstehen, so ergiebt sich $(abc\ldots) = (\bar{a}\bar{b}\bar{c}\ldots)$, wo das Produkt rechts als kombinatorisches zu fassen und zugleich $a_x = [x\bar{a}]$ ist; die Grössen $\bar{a}$ sind dann als (erste) Centralen von x in Bezug auf die Funktion ax^n zu fassen, oder in Bezug auf die Funktion, welche daraus durch Einführung der Einheiten, die durch die früheren symbolischen Produkte bedingt war, hervorging.

Diese Andeutungen mögen genügen, um die reale Bedeutung der Symbole festzustellen; es wird die Auffassung dieser Bedeutung überall da von wesentlichem Nutzen sein, wo man gezwungen ist, die symbolische Darstellung zu verlassen.

§ 4.

Theorie binärer Formen.

Es wird hinreichend sein, wenn ich den Fundamentalsatz für binäre Formen erweise und seine Bedeutung für dieselben darlege, indem dadurch schon auf gewisse Weise der Weg vorgezeichnet ist, den man bei Formen, die aus mehr als zwei Einheiten entspringen, einzuschlagen hat. Ich werde dabei der Bequemlichkeit wegen x und y statt der im Fundamentalsatze mit x_1 und x_2 bezeichneten extensiven Grössen einführen und zunächst die Aufgabe stellen, die aus einer binären Form ax^n entspringenden invarianten Bildungen, wenn sie als Funktionen der Koefficienten

$$a_1 = ae_1^n, \quad a_2 = ae_1^{n-1}e_2, \ldots, a_k = ae_2^n$$

und der veränderlichen Zahlgrössen x_1 und x_2 gegeben sind, als Funktionen der $k - 1$ Stammformen darzustellen. Es sei $x = x_1 e_1 + x_2 e_2$. Da nun alle jene Bildungen unverändert bleiben, wenn man statt e_1 und e_2 zwei aus ihnen numerisch abgeleitete Grössen setzt, deren kombinatorisches Produkt $= 1$ ist, so kann man x und y dafür einführen mit der vorläufigen Bedingung, dass $[xy]$, was wir mit u bezeichnen wollen, $= 1$ sei. Jede aus den Einheiten numerisch ableitbare Grösse p lässt sich dann auch aus x und y ableiten. Es sei $p = p_1 e_1 + p_2 e_2 = \pi_1 x + \pi_2 y$, so wird nun die invariante Bildung

$$\Pi(a_1, \ldots, a_k; p_1, p_2) = \Pi(\varphi_0, \ldots, \varphi_n; \pi_1, \pi_2),$$

wo die φ aus den a hervorgehen, indem man x und y statt e_1 und e_2 setzt, nämlich $\varphi_0 = ax^n$, $\varphi_1 = ax^{n-1}y, \ldots, \varphi_n = ay^n$. Setzt man nun $\pi_1 = 1$, $\pi_2 = 0$, so wird $p = x = x_1 e_1 + x_2 e_2$, und es wird

$$\Pi = \Pi(a_1, \ldots, a_k; x_1, x_2) = \Pi(\varphi_0, \ldots, \varphi_n; 1, 0),$$

oder wenn

$$\Pi(a_1, \ldots, a_k; x_1, x_2) = F(a_1, \ldots, a_k) \,.\, x_1^q + \cdots$$

ist, wo q den Grad der invarianten Bildung bezeichnet, so ist 547

$$\Pi = F(\varphi_0, \ldots, \varphi_n),$$

also als ganze Funktion der k Formen $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ dargestellt. Aber eine dieser Formen, nämlich $\varphi_1 = ax^{n-1}y$ ist Null, wenn y harmonisches Centrum erster Ordnung zu dem Pole x in Bezug auf die durch die Gleichung $ax^n = 0$ dargestellten n Punkte ist; und es ist also

dann Π als ganze Funktion der $k-1=n$ Stammformen $\varphi_0, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ dargestellt. Hierbei war $u=[xy]$ vorläufig gleich Eins gesetzt; es ist y durch die Gleichung $ax^{n-1}y=0$ bedingt, das heisst y ist, abgesehen von einem Zahlfaktor gleich ax^{n-1}, das heisst $y \equiv ax^{n-1}$, also

$$u \equiv ax^{n-1}x \equiv ax^n \equiv a,$$

{gleich} der ursprünglichen Funktion. Ist also die erhaltene Gleichung nicht homogen, so macht man sie nun homogen durch Hinzufügung von Faktoren a.

Diese Entwickelung stimmt im Resultate, wie auch dem Wesen nach in der Art der typischen Darstellung mit Clebsch Theorie der binären algebraischen Formen, S. 321—328 {Leipzig, bei Teubner 1871} überein (vgl. auch Gundelfinger in Borch. J. Bd. 74 {S. 87ff.}); sie gilt auch unmittelbar für (simultane) Bildungen, die einem Vereine binärer Formen entsprossen sind, indem man nur für $a_1, a_2, \ldots, a_k$ die sämtlichen Zahlkoefficienten der Formen dieses Vereines zu setzen hat.

Viel wichtiger als diese Zurückführung der explicite gegebenen Bildungen auf die Stammformen ist die der symbolisch gegebenen, die aber ganz nach denselben Principien erfolgt. Das symbolische Produkt (ab) ist $=a_{e_1}b_{e_2}-a_{e_2}b_{e_1}$; ersetzt man also wie oben e_1 und e_2 durch y und x (ich habe beide der einfacheren Zeichenbestimmung wegen vertauscht), wo $[yx]$ vorläufig $=1$ gesetzt wird, so wird nun

$$(ab)=a_y b_x - a_x b_y$$

oder, da, wie oben gezeigt, die Faktoren a_x, b_x entbehrlich sind, $=a_y-b_y$, also

$$(ab)^n=(a_y-b_y)^n=a_y^n-\frac{n}{1}a_y^{n-1}b_y+\frac{n(n-1)}{1.2}a_y^{n-2}b_y^2-\cdots,$$

oder, wenn a und b dieselbe Funktion darstellen

$$=ay^n.ax^n-\frac{n}{1}axy^{n-1}.ax^{n-1}y+\frac{n(n-1)}{1.2}ax^2y^{n-2}.ax^{n-2}y^2-\cdots,$$

$$(ab)^n=\varphi_0\varphi_n+\frac{n(n-1)}{1.2}\varphi_2\varphi_{n-1}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\varphi_3\varphi_{n-3}+\cdots,$$

wenn man, wie oben, y so bestimmt, dass $\varphi_1=ax^{n-1}y=0$ wird.

Dies ist der Satz, den Clebsch in seiner Theorie der binären Formen S. 334 als einer schriftlichen Mittheilung Brioschi's entnommen darstellt.

Derselbe lässt sich aber vermöge der von mir angegebenen Methode 548 unmittelbar zu folgendem Satze erweitern, welcher fast alle Beziehungen, die zwischen binären Formen herrschen, zur Evidenz bringt.

Wenn $(ab)^p(ac)^q\ldots$ *eine beliebige symbolische Invariantenbildung* (Invariante oder Kovariante) *einer algebraischen Form* $a_x^n=b_x^n=c_x^n=\cdots$

ist, so setze man $a - b$ *für* (ab), $a - c$ *für* (ac) *u. s. w., entwickele nach Potenzen von* $a, b, c, \ldots$, *schreibe dann* φ_r *statt* $a^r, b^r, \ldots$ *und setze* $\varphi_1 = 0$, *so ist der so hervorgehende Ausdruck gleich* $(ab)^p(ac)^q \ldots$

Man erhält so, abgesehen von dem Faktor φ_0, der die ursprüngliche Funktion darstellt, und erst zuletzt zur Herstellung der Homogenität hinzugefügt zu werden braucht,

$$c_2 = \tfrac{1}{2}(ab)^2 \equiv \varphi_2, \quad c_3 = (ab)^2(ac) \equiv \varphi_3, \quad c_4 = \tfrac{1}{2}(ab)^4 \equiv \varphi_4 + 3\varphi_2^2;$$
$$c_5 = (ab)^4(ac) \equiv \varphi_5 + 2\varphi_2\varphi_3; \quad c_6 = \varphi_6 + 15\varphi_2\varphi_4 - 10\varphi_3^2, \ldots$$

Also

$$\varphi_2 = c_2 \qquad \varphi_5 = c_5 - 2c_2c_3$$
$$\varphi_3 = c_3 \qquad \varphi_6 = c_6 - 15c_2c_4 + 45c_2^3 + 10c_3^2$$
$$\varphi_4 = c_4 - 3c_2^2$$

(vgl. Clebsch, Binäre Formen S. 337).

Als Beispiel mögen die von Clebsch mit R und j bezeichneten Bildungen dienen:

$$R = (ab)^2(cd)^2(ac)(bd) \equiv (a-b)^2(c-d)^2(a-c)(b-d)$$
$$\equiv (a^2 - 2ab + b^2)(c^2 - 2cd + d^2)(ab - bc - ad + cd),$$

oder mit Weglassung der Glieder, die zuletzt nur eine erste Potenz erhalten, und die nach dem Obigen null sind,

$$- b^3c^3 - a^3d^3 - 2a^2b^2c^2 - 2a^2c^2d^2 - 2a^2b^2d^2 - 2b^2c^2d^2$$
$$- 2\varphi_3^2 - 8\varphi_2^3 \equiv - 2c_3^2 - 8c_2^3.$$

Um sie durch Hinzufügung der Faktoren $\varphi_0 = f$ (bei Clebsch) homogen zu machen, ist zu bedenken, dass die Funktionen φ in jedem Gliede so oft vorkommen müssen, als die Anzahl der symbolischen Elemente beträgt, also in $c_2, c_4, c_6, \ldots$ je zweimal, in $c_3, c_5, c_6, \ldots$ je dreimal, in R viermal, also

$$\tfrac{1}{2}R = -\frac{c_3^2 + 4c_2^3}{f^2}$$

in Uebereinstimmung mit Clebsch S. 337.

Ferner $j = (ab)^2(ac)^2(bc)^2 = (a-b)^2(a-c)^2(b-c)^2$, was sich mit Weglassung der Glieder, welche eine erste Potenz enthalten, verwandelt in

$$6(\varphi_2\varphi_4 - \varphi_3^2 - \varphi_2^3) \equiv 6(c_2c_4 - 4c_2^3 - c_3^2),$$

also homogen gemacht, da j nur drei symbolische Elemente enthält,

$$\tfrac{1}{6}j = \frac{f^2c_2c_4 - 4c_2^3 - c_3^2}{f^3}$$

in Uebereinstimmung mit Clebsch S. 338.

Wie sich alles dies für ternäre und höhere Formen gestaltet, denke ich späterhin zu zeigen.

Stettin, den 21. Februar 1874.

XXI.

375 Der Ort der Hamilton'schen Quaternionen in der Ausdehnungslehre.

Von

H. Grassmann in Stettin.

Mathematische Annalen Bd. 12, Heft 3, S. 375—386, ausgegeben am 18. 10. 1877, Leipzig.

Da die Ausdehnungslehre nur die *eine* willkürliche Annahme macht, dass es nämlich Grössen gebe, die sich aus mehr als einer Einheit numerisch ableiten lassen, und sie von da aus in ganz objektiver Weise fortschreitet, so müssen alle Ausdrücke, die aus einer Anzahl unabhängiger Einheiten numerisch ableitbar sind, und also auch die Hamilton'schen Quaternionen, in der Ausdehnungslehre ihren bestimmten Ort haben und erst in ihr ihre wissenschaftliche Grundlage finden. Dies ist bisher nicht erkannt und Göran Dillner in seiner lehrreichen Abhandlung über die Quaternionen (Math. Annalen XI, 168 ff.) thut der Ausdehnungslehre nicht einmal Erwähnung, obgleich er eine ganze Reihe von Sätzen aus der Theorie der Quaternionen ableitet, welche schon in meiner Ausdehnungslehre von 1844 (A_1), und ebenso in der späteren Bearbeitung von 1862 (A_2) ihre viel einfachere und aus der Natur der Sache entspringende Begründung gefunden haben. Auch ist es verwerflich und der Lehre von den Quaternionen wenig förderlich gewesen, dass man nach Hamilton's Vorgang einfache und längst bekannte Begriffe mit neuen, oft recht unpassenden Namen bezeichnet hat, wie „Vektor“ statt „Strecke“, „Tensor“ statt „Länge“ oder „numerischer Werth“ (A_2 Nr. 414 {d. Ausg. I, 2, S. 281}), u. s. w.

Die Hamilton'schen Quaternionen entspringen aus einer der Multiplikationen, welche ich (in meiner Abhandlung „Sur les différents genres

de multiplication“ in Crelle's Journal Bd. 49 S. 136 ff. {hier S. 212 ff.})
dargestellt und an die drei Gleichungsgruppen

$$(1)\qquad e_r e_s = e_s e_r$$

$$(2)\qquad e_r e_s + e_s e_r = 0, \quad e_1^2 = e_2^2 = \cdots = e_n^2$$

$$(3)\qquad e_1^2 + e_2^2 + \cdots + e_n^2 = 0$$

geknüpft habe, wo $e_1, e_2, \ldots, e_n$ die von einander unabhängigen Einheiten und e_r und e_s zwei beliebige von einander verschiedene dieser Einheiten bezeichnen, und zwar knüpfen sich die Quaternionen für den Fall, dass $n = 3$ ist, an die Multiplikation, deren Bedingungsgleichungen die mittlere jener drei Gruppen bilden. Ich will diese Art der Multi- 376
plikation die *mittlere* nennen, und zwar hauptsächlich deshalb, weil sie, wie sich sogleich zeigen wird, zwischen den beiden Hauptarten der Multiplikation, die ich die „äussere“ und die „innere“ genannt habe, die Mittelstufe bildet. Die äussere Multiplikation hat nämlich zu Bedingungsgleichungen die zwei Gruppen (2) und (3) und die innere die zwei Gruppen (1) und (2). Ich habe das äussere Produkt zweier Strecken a und b mit $[ab]$, das innere Produkt derselben mit $[a|b]$ bezeichnet und werde in dieser Abhandlung unter ab (ohne scharfe Klammern) stets das mittlere Produkt der Strecken a und b verstehen. Dann ergiebt sich sogleich, dass das mittlere Produkt ab zweier Strecken sich darstellen lässt in der Form

$$(4)\qquad ab = \lambda[a|b] + \mu'[ab],$$

wo λ und μ' konstant und zunächst willkürlich, jedoch nicht null sind.

Aus den Bedingungsgleichungen (2) ergiebt sich, dass es für das mittlere Produkt zweier Strecken $\frac{1}{2}n(n-1)+1$ von einander unabhängige Einheitsprodukte giebt, von denen eins (etwa e_1^2) dem inneren Produkte $[a|b]$, die andern (e_1e_2, e_1e_3, e_2e_3, u. s. w.) dem äusseren Produkte $[ab]$ zu Grunde liegen. Im Raume, wo die Anzahl der von einander unabhängigen Strecken drei beträgt, also $n = 3$ ist, ist also die Zahl der Einheitsprodukte, auf die die mittlere Multiplikation zurückführt, gleich *vier*. Die Bedingungsgleichungen der mittleren Multiplikation werden dann

$$(a)\qquad e_3e_2 = -e_2e_3, \quad e_1e_3 = -e_3e_1, \quad e_2e_1 = -e_1e_2$$

$$(b)\qquad e_1^2 = e_2^2 = e_3^2.$$

Aber das wesentlich Eigenthümliche der mittleren Multiplikation im Raume als einem Gebiete dritter Stufe ist, dass die Anzahl der von einander unabhängigen Einheitsprodukte in (a) gleich der Anzahl der

Einheiten ist, und man daher jene auf diese zurückführen kann. So bleiben also dann die Einheiten des Produktes, wenn man noch die in (*b*) zu Grunde liegende Zahleinheit hinzunimmt, dieselben wie die ursprünglichen. Diese einfache Beziehung verschwindet bei den Gebieten höherer Stufe, so dass die mittlere Multiplikation in der Ausdehnungslehre, welche Gebiete beliebiger Stufe behandelt, keine einfache Bedeutung behält. Ich beschränke mich daher auf den Raum und nehme an, dass die drei zu Grunde gelegten Einheiten e_1, e_2, e_3 drei gleich lange zu einander senkrechte Strecken sind, deren Länge Eins beträgt.

Nun habe ich in der Ausdehnungslehre (A_2 Nr. 50, 51 {d. Ausg. I, 2, S. 34}) nachgewiesen, dass die Bedingungsgleichungen der äusseren Multiplikation noch bestehen bleiben, wenn man statt der ursprünglichen Einheiten beliebige andere einführt, und (A_2 Nr. 330 ff. {d. 377 Ausg. I, 2, S. 207 ff.}), dass, wenn e_1, e_2, e_3 einen † Normalverein bilden, das heisst, sie auf einander senkrecht stehen und die Länge Eins haben, das heisst $[e_r|e_r] = 1$ ist, die Bedingungsgleichungen der inneren Multiplikation auch dann noch bestehen bleiben, wenn man statt der ursprünglichen Einheiten die Einheiten eines beliebigen Normalvereins setzt. Da also bei dieser Aenderung der Einheiten auch die Bedingungsgleichungen der äusseren Multiplikation bestehen bleiben, so bleibt auch das mittlere Produkt, als aus dem äusseren und inneren zusammengesetzt, bei dieser Aenderung des Normalvereins in einen andern ungeändert.

In der angeführten Abhandlung (Crelle Bd. 49, S. 131 ff. {hier S. 207 ff.}) habe ich diese Unveränderlichkeit für alle aus den drei Gleichungsgruppen (1), (2), (3) ableitbaren Multiplikationen, also auch unmittelbar für die mittlere nachgewiesen.

Es kommt nun darauf an, die drei Produkte e_2e_3, e_3e_1, e_1e_2 auf die ursprünglichen Einheiten zurückzuführen.

Auch dies ist schon in der Ausdehnungslehre (A_2) vollendet, wo e_1, e_2, e_3 als Ergänzungen von e_2e_3, e_3e_1, e_1e_2 aufgefasst und

$$(5)\qquad \begin{aligned} e_1 &= |[e_2e_3], & e_2 &= |[e_3e_1], & e_3 &= |[e_1e_2], \\ [e_2e_3] &= |e_1, & [e_3e_1] &= |e_2, & [e_1e_2] &= |e_3 \end{aligned}$$

gesetzt sind, und wo der Strich | das Zeichen der Ergänzung ist und vorausgesetzt wird, dass e_1, e_2, e_3 einen Normalverein bilden. Dort wird ferner für eine beliebige Strecke a, die aus den ursprünglichen Einheiten durch die Zahlen α_1, α_2, α_3 abgeleitet ist, festgesetzt, dass ihre Ergänzung aus den Ergänzungen jener Einheiten durch dieselben Zahlen abgeleitet sei, also

$$(6)\qquad \begin{cases} |(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3) = \alpha_1 [e_2 e_3] + \alpha_2 [e_3 e_1] + \alpha_3 [e_1 e_2] \\ |(\alpha_1 [e_2 e_3] + \alpha_2 [e_3 e_1] + \alpha_3 [e_1 e_2]) = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 \end{cases}$$

sei, und es ist nachgewiesen (A_2 Nr. 37 ff. {d. Ausg. I, 2, S. 28 ff.}), dass dieselben Beziehungen bestehen bleiben, wenn man statt der ursprünglichen Einheiten die Einheiten eines beliebigen andern Normalvereins setzt. Mit Hilfe dieser Begriffe können wir nun die Fundamentalgleichung (4) in der Form schreiben

$$(4\text{b})\qquad ab = \lambda[a|b] + \mu\,|[ab],$$

wo λ und μ konstante Zahlen sind. Aendern sich λ und μ in gleichem Verhältnisse, zum Beispiel um den Faktor ν, so ändert sich das Produkt nur um denselben Zahlfaktor, bleibt also seinem Wesen nach unverändert. Wir können daher ohne wesentliche Aenderung eine dieser Zahlen gleich Eins setzen. Wir setzen $\mu = 1$. Dann bestimmen wir λ dadurch, dass jedes mittlere Produkt aus drei Faktoren dem Gesetz der Vereinbarkeit (dem associativen Princip) unterliegen, das heisst $abc = a(bc)$ sein soll. Dies wird erfüllt sein, wenn es für die Einheitsprodukte der mittleren † Multiplikation gilt. Diese Einheitsprodukte lassen sich nach der Formel $ab = \lambda[a|b] + |[ab]$ auf die der inneren und äusseren Multiplikation zurückführen. Für diese beiden sind nach dem Obigen die Einheitsprodukte an die Formeln 378

$$[e_r|e_r] = 1, \quad [e_r|e_s] = 0; \quad [e_r e_r] = 0, \quad [e_r e_s] = -[e_s e_r]$$

geknüpft, wo r und s zwei verschiedene der Indices 1, 2, 3 sind. Dazu kommen noch vermöge des obigen Begriffes der Ergänzung die Formeln

$$|[e_r e_s] = e_t,$$

wenn r, s, t dem Cyklus 1, 2, 3 angehören, das heisst r, s, t entweder $= 1, 2, 3$ oder $= 2, 3, 1$ oder $= 3, 1, 2$ sind. Hieraus folgen für die mittlere Multiplikation der Einheiten e_1, e_2, e_3 die bedingenden Gesetze

$$(7)\qquad e_r e_r = \lambda, \quad e_r e_s = e_t, \quad e_s e_r = -e_r e_s,$$

wenn r, s, t dem Cyklus 1, 2, 3 angehören.

Dann ergiebt sich für die mittlere Multiplikation dreier Einheiten, wenn man die cyklische Bedeutung von r, s, t festhält,

$$(e_r e_s) e_t = e_t e_t = \lambda = e_r e_r = e_r (e_s e_t),$$

ebenso

$$(e_t e_s) e_r = -e_r e_r = -\lambda = -e_t e_t = e_t (e_s e_r);$$

das heisst, für drei verschiedene Einheitsfaktoren gilt Vereinbarkeit. Ebenso für drei gleiche. So auch für zwei gleiche, die durch einen ungleichen getrennt sind. Denn

$$e_r (e_s e_r) = -(e_s e_r) e_r = (e_r e_s) e_r.$$

Dagegen ist $(e_r e_r) e_s = \lambda e_s$, und $e_r (e_r e_s) = e_r e_t = - e_s$. Soll also auch für diesen Fall Vereinbarkeit gelten, so muss nothwendig $\lambda = -1$ sein. Umgekehrt, wenn $\lambda = -1$ ist, so ergiebt sich auch für die noch übrigen Produkte aus drei Einheiten Vereinbarkeit der Faktoren. Denn dann ist

$$(e_s e_s) e_r = \lambda e_r = - e_r = - e_s e_t = e_s (e_s e_r);$$

ferner

$$(e_r e_s) e_s = e_t e_s = - e_r = \lambda e_r = e_r (e_s e_s)$$

und

$$(e_s e_r) e_r = - e_t e_r = - e_s = \lambda e_s = e_s (e_r e_r).$$

Es folgt also dann Vereinbarbeit für je drei Einheitsfaktoren, also auch für je drei Faktoren, also auch für beliebig viele (A_1 § 3 {d. Ausg. I, 1, S. 35}). Wir setzen daher für die mittlere Multiplikation $\lambda = -1$, während $\mu = 1$ gesetzt war, also

$$\text{(I)} \qquad ab = - [a|b] + |[ab].$$

Aus dieser Fundamentalgleichung folgen alle Gesetze der Quaternionen, und zwar fast alle mit der grössten Leichtigkeit. Auch die naturgemässe Benennung ergiebt sich hiernach von selbst. Wir werden $-[a|b]$ den inneren, $|[ab]$ den äusseren Theil der Quaternion nennen können. Sind a und b parallel, so wird der äussere Theil null, und die Faktoren {werden} wie bei jedem inneren Produkt vertauschbar. Werden a und b zu einander senkrecht, so wird der innere Theil null und die Faktoren wie bei jedem äusseren Produkt mit Zeichenwechsel vertauschbar. Vertauscht man die Faktoren eines mittleren Produkts, so bleibt der innere Theil unverändert, der äussere ändert sein Zeichen ($\mp$).

Ich werde auch im Folgenden die Zahlen stets mit griechischen, die Strecken stets mit lateinischen Buchstaben bezeichnen, nur den 379 Buchstaben q werde ich für die Bezeichnung der Quaternionen aufbewahren.

Ist $\alpha + a$ eine Quaternion, so bezeichnet man bekanntlich die Quaternion $\alpha - a$ als die zu jener *konjugirte.* Von fundamentaler Bedeutung ist das Gesetz:

$$\text{(II)} \qquad \begin{array}{l} \textit{Wenn} \quad (\alpha + a)(\beta + b) = \gamma + c \quad \textit{ist,} \\ \textit{so ist auch} \ (\beta - b)(\alpha - a) = \gamma - c. \end{array}$$

In der That ist der innere Theil des ersten Produktes $\alpha\beta - [a|b]$, also dies $= \gamma$, aber $\alpha\beta - [a|b]$ ist auch der innere Theil des zweiten Produktes. Hingegen der äussere Theil des ersten Produktes ist $\alpha b + \beta a + |[ab] = c$, der äussere Theil des zweiten ist $- \alpha b - \beta a + |[ba]$, das heisst, da $[ba] = - [ab]$ ist, gleich $-c$, also das zweite

Produkt $= \gamma - c$. Es ist unmittelbar klar, dass sich dies auf beliebig viele Faktoren ausdehnen lässt. Also

(II) *Das Produkt beliebig vieler Quaternionen ist konjugirt dem umgekehrt geordneten Produkte der konjugirten Quaternionen.*

Es stellt dieser Satz die Formel (14) bei Dillner dar, aus welcher seine Formel (13) hervorgeht, wenn man die inneren Theile $(\alpha, \beta, \ldots)$ null setzt.

Wenn die Strecke $a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$ ist, so wird $[a|a]$, was ich der Kürze wegen mit $a^{\underline{2}}$ bezeichnet habe, gleich $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2$ und stellt das Quadrat der Länge jener Strecke dar. Nach dieser Analogie nenne ich, wenn $q = \alpha + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 = \alpha + a$ ist,

$$\sqrt{\alpha^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}, \text{ das heisst } \sqrt{\alpha^2 + a^{\underline{2}}} = \sqrt{\alpha^2 - a^2}$$

die *Länge* der Quaternion q (nach Hamilton der Tensor). — Multiplicirt man nun die erste Formel in II mit der zweiten, so erhält man

$$(\alpha + a)(\beta + b)(\beta - b)(\alpha - a) = (\gamma + c)(\gamma - c),$$

das heisst

$$(\alpha + a)(\beta^2 - b^2)(\alpha - a) = \gamma^2 - c^2.$$

Da $\beta^2 - b^2 = \beta^2 + b^{\underline{2}}$ eine Zahl ist, so ist ihre Stellung gleichgültig, wir können also die Faktoren $\alpha + a$ und $\alpha - a$ zusammenrücken, und erhalten $(\alpha^2 - a^2)(\beta^2 - b^2) = \gamma^2 - c^2$ oder

$$\text{(III)} \qquad \sqrt{\alpha^2 - a^2}\sqrt{\beta^2 - b^2} = \sqrt{\gamma^2 - c^2};$$

das heisst, da sich dies auf beliebig viele Faktoren ausdehnen lässt,

(III) *Die Länge eines Produkts von Quaternionen ist das Produkt aus den Längen der Faktoren.*

Es kommt also nur auf die Multiplikation der quaternen Einheiten, das heisst der Quaternionen, deren Länge Eins ist, an.

Es sei nun ϱ die Länge einer Quaternion $q = \alpha + \beta a$, wo a eine Strecke von der Länge Eins ist, so ist $\varrho^2 = \alpha^2 + \beta^2$. Nun sei $\alpha = \varrho \cos \gamma$, so ist $\beta = \varrho \sin \gamma$, also

$$q = \varrho(\cos \gamma + a \sin \gamma).$$

Es heisse a das *Mass* und γ der *Winkel* der Quaternion, während 380 $\cos \gamma + a \sin \gamma$ nach dem Obigen die quaterne Einheit ist. Das Produkt gleichmassiger quaterner Einheiten führt zu sehr einfachen Resultaten. In der That, es sei a das Mass zweier quaterner Einheiten und α und β ihre Winkel, so findet man

$$\text{(IV)}\quad \begin{cases} (\cos\alpha + a\sin\alpha)(\cos\beta + a\sin\beta) = \\ = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta + a(\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta) = \\ = \cos(\alpha+\beta) + a\sin(\alpha+\beta), \end{cases}$$

da $a^2 = -a^{\underline{2}} = -1$ ist; das heisst

Gleichmassige quaterne Einheiten multiplicirt man, indem man ihre Winkel addirt.

Hierin liegt eingeschlossen, dass man eine quaterne Einheit mit einer ganzen positiven Zahl potenzirt, indem man ihren Winkel mit dieser Zahl multiplicirt. Auch für das Potenziren mit einer gebrochenen und negativen Zahl können wir dieselbe Bestimmung festhalten, aber mit der Beschränkung, dass der Winkel der zu potenzirenden Quaternion innerhalb der Grenzen einer ganzen Umrollung bleibe, zum Beispiel zwischen π und $-\pi$ liege (vergl. meine Arithmetik Stettin 1860, Nr. 426—433).

Eine Definition für diese Verknüpfungen ist nothwendig, und ebenso die oben angegebene Beschränkung, weil man sonst gegen die logische Regel verstösst, dass man dieselbe Sache nicht auf zwei verschiedene Arten definiren darf, namentlich wenn die beiden Definitionen sich widersprechen. Letzteres würde aber bei der Potenzirung mit gebrochenem Exponenten der Fall sein, wenn man jene Beschränkung nicht eintreten liesse. So zum Beispiel ist $\cos 0 + a\sin 0 = \cos(2\pi) + a\sin(2\pi)$. Beide würden mit $\frac{1}{2}$ potenzirt, wenn man festsetzte, die quaterne Einheit mit $\frac{1}{2}$ potenziren, hiesse ihren Winkel mit $\frac{1}{2}$ multipliciren, verschiedenes liefern; denn ersteres würde danach 1 liefern, letzteres aber $\cos\pi + a\sin\pi$, das heisst -1. Obige Definition festgesetzt, erhält man, wenn α zwischen π und $-\pi$ liegt und μ reell ist,

$$\text{(V)}\qquad (\cos\alpha + a\sin\alpha)^{\mu} = \cos(\alpha\mu) + a\sin(\alpha\mu),$$

das heisst: *Eine quaterne Einheit, deren Winkel zwischen π und $-\pi$ liegt, potenzirt man mit einer reellen Zahl, indem man ihren Winkel mit dieser Zahl multiplicirt.*

Hier ist die Darstellung Dillner's (Nr. 30) ungenügend. Ebenso vermisse ich bei der Division (Nr. 12) den Beweis der Eindeutigkeit des Quotienten. Dieser sei hier ergänzt. Wenn q eine von Null verschiedene Quaternion ist, so gilt als Definition von $1:q$ die Gleichung $(1:q)q = 1$. Wenn nun e_1 eine beliebige Strecke von der Länge 1 ist, so lässt sich q in der Form darstellen $q = \alpha_0 + \alpha_1 e_1$; nun sei

$$\frac{1}{q} = \beta_0 + \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3,$$

wo e_1, e_2, e_3 einen Normalverein bilden; dann erhält man zur Bestimmung von $\beta_0, \ldots, \beta_3$ die Gleichung

$$(\beta_0 + \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3)(\alpha_0 + \alpha_1 e_1) = 1, \qquad 38$$

welche die vier Gleichungen einschliesst

$$\begin{aligned} \beta_0\alpha_0 - \beta_1\alpha_1 &= 1 \\ \beta_0\alpha_1 + \beta_1\alpha_0 &= 0 \\ -\beta_2\alpha_1 + \beta_3\alpha_0 &= 0 \\ \beta_2\alpha_0 + \beta_3\alpha_1 &= 0. \end{aligned}$$

Aus den zwei ersten folgt

$$\beta_0 = \frac{\alpha_0}{\alpha_0^2 + \alpha_1^2}, \quad \beta_1 = \frac{-\alpha_1}{\alpha_0^2 + \alpha_1^2},$$

wo $\alpha_0^2 + \alpha_1^2 = \varrho^2$, ϱ die Länge von q ist; aus den zwei letzten folgt $\beta_2 = 0$, $\beta_3 = 0$, also

$$\frac{1}{\alpha_0 + \alpha_1 e_1} = \frac{\alpha_0 - \alpha_1 e_1}{\varrho^2}.$$

Namentlich wenn $q = \alpha_0 + \alpha_1 e_1$ eine quaterne Einheit, also $\alpha_0^2 + \alpha_1^2 = \varrho^2 = 1$ ist, so wird

$$1 : (\alpha_0 + \alpha_1 e_1) = \alpha_0 - \alpha_1 e_1.$$

Hieraus ergiebt sich dann leicht $1 : q^\mu = q^{-\mu}$, in Uebereinstimmung mit der Algebra.

Die von Dillner behandelten Abschnitte über die Rechnung in doppeltem Axensysteme, so wie über das distributive Gesetz (Nr. 14 bis 23) werden durch die von mir zu Grunde gelegte Definition I überflüssig.

Unter den üblichen Anwendungen der Quaternionen sind zu verwerfen die auf die Zusammensetzung der Kräfte (Dilln. Nr. 4), auf das Drehungsmoment und die mechanische Arbeit (Dilln. Nr. 24), da die Verknüpfung der Strecken diese Begriffe aufs einfachste liefert, während die Quaternionen Ungehöriges hineinmischen. In der That ist $a + b$ die aus a und b zusammengesetzte Kraft, $[ab]$ das Moment der Kraft b am Hebelarm a, $[abc]$ das Moment der Kraft c am Hebelarm b, der an der festen Axe a angebracht ist, $[a|b]$ die Arbeit der Kraft b in Bezug auf den Weg a. Aus gleichem Grunde ist die Rechnung mit Quaternionen zu verbannen bei der Drehung eines räumlichen Gebildes um eine Axe (Dilln. Nr. 39—42) und bei der Transformation rechtwinkliger Koordinaten (Dilln. Nr. 44—48, Hankel*) § 58). Die

*) {Gemeint sind Hermann Hankels Vorlesungen über die komplexen Zahlen, Leipzig, bei Voss 1867.}

letztere Aufgabe wird für senkrechte Koordinatensysteme aufs leichteste und unmittelbarste durch innere Multiplikation gelöst; ich verweise in dieser Beziehung auf meine Abhandlung über „die Mechanik nach den Principien der Ausdehnungslehre“ in diesen Annalen Bd. XII, S. 222 {hier S. 46—72}.

Die erstere Aufgabe wird am leichtesten gelöst durch die vollständigen *Quotienten* der Strecken (A_2 Nr. 377—390 {d. Ausg. I, 2, S. 240—257}). Unter einem solchen Quotienten verstehe ich einen Ausdruck, welcher jede Strecke durch Multiplikation (mit diesem Aus-382 druck) in eine bestimmte Strecke † verwandelt. Es genügt zu dem Ende, festzusetzen, in welche drei Strecken sich drei nicht einer Ebene parallele Strecken im Raume durch jene Multiplikation verwandeln sollen. Sollen zum Beispiel durch einen solchen Quotienten Q die Strecken e_1, e_2, e_3 (die in keiner Zahlbeziehung stehen, das heisst nicht derselben Ebene parallel sind) in die Strecken a_1, a_2, a_3 durch Multiplikation mit Q verwandelt werden, das heisst, ist $e_1 Q = a_1$, $e_2 Q = a_2$, $e_3 Q = a_3$, so ist nach dem allgemeinen Multiplikationsgesetze

$$(8) \qquad (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3) Q = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3,$$

und das Produkt jeder Strecke im Raume mit Q ist dann genau bestimmt. Ich schreibe dann

$$(9) \qquad Q = \frac{a_1,\, a_2,\, a_3}{e_1,\, e_2,\, e_3}$$

und nenne e_1, e_2, e_3 die Nenner, a_1, a_2, a_3 die entsprechenden Zähler.

Von fundamentaler Bedeutung ist die Aufgabe, die Strecken x (ihrer Richtung nach) zu suchen, welche sich dabei in ihr Vielfaches verwandeln, so dass also $xQ = \varrho x$ wird. Diese Aufgabe wird (A_2 Nr. 388 ff. {d. Ausg. I, 2, S. 249 ff.}) durch die äussere Multiplikation vermittelst einer Gleichung dritten Grades aufs einfachste gelöst. Hat nämlich Q den obigen Werth und ist $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$, so verwandelt sich die Gleichung

$$xQ - \varrho x = 0$$

in die Gleichung

$$(10) \qquad x_1(a_1 - \varrho e_1) + x_2(a_2 - \varrho e_2) + x_3(a_3 - \varrho e_3) = 0.$$

Hier können nicht x_1, x_2, x_3 zugleich null sein, weil sonst x null wäre, was natürlich ausgeschlossen ist. Ist nun zum Beispiel x_1 von Null verschieden, so multiplicire man die Gleichung äusserlich mit $a_2 - \varrho e_2$ und $a_3 - \varrho e_3$; so erhält man nach Division mit x_1 die Gleichung

$$(11) \qquad [(a_1 - \varrho e_1)(a_2 - \varrho e_2)(a_3 - \varrho e_3)] = 0,$$

indem nämlich das äussere Produkt dreier Strecken stets null wird, wenn zwei Strecken einander gleich werden (siehe unten).

Dies ist eine kubische Gleichung in Bezug auf ϱ. Ich nehme an, dass die drei Wurzeln $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ dieser Gleichung von einander verschieden seien, da der Fall gleicher Wurzeln sich als Uebergangsfall leicht aus jenem allgemeineren Falle der ungleichen Wurzeln ableiten lässt. Zu jedem dieser Werthe $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ sind dann vermöge der ersteren Gleichung (10) die Verhältnisse $x_1 : x_2 : x_3$ genau bestimmt und können durch äussere Multiplikation mit je einer der Grössen $a_1 - \varrho e_1$, $a_2 - \varrho e_2$, $a_3 - \varrho e_3$ unmittelbar gefunden werden. Man erhält also drei ihrer Richtung nach bestimmte Axen c_1, c_2, c_3, die zu den drei Wurzeln $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ gehören, und, wie man unmittelbar sieht, in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen.

So wird nun Q in der normalen Form

$$Q = \frac{\varrho_1 c_1,\ \varrho_2 c_2,\ \varrho_3 c_3}{c_1,\ c_2,\ c_3} \tag{12}$$

dargestellt. Ich nenne c_1, c_2, c_3 die *Axen* des Quotienten und $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ 383 die zugehörigen *Hauptzahlen*. Diese Darstellung ist für die Theorie der lineären Verwandtschaften, und für eine Menge algebraischer Probleme, zum Beispiel für die, welche Dr. Gottlob Frege in seiner Dissertation zur Erlangung der venia docendi Jena 1874, S. 20—23 behandelt hat, von fundamentaler Bedeutung.

Soll der Quotient Q, worauf es bei der angeregten Aufgabe ankommt, nur eine *Drehung* bewirken, so werden zwei der drei Axen imaginär, eine wird reell und ihre zugehörige Hauptzahl $= 1$. Es sei a diese reelle Axe, alsdann sind die imaginären von der Form $b + ci$ und $b - ci$, wo a, b, c zu einander senkrecht sind. Die beiden zu diesen imaginären Axen gehörigen Hauptzahlen haben den numerischen Werth Eins, sind also von den Formen $\cos\alpha - i\sin\alpha$ und $\cos\alpha + i\sin\alpha$; also wird dann

$$aQ = a, \tag{13}$$

$$(14)\begin{cases}(b+ci)Q = (b+ci)(\cos\alpha - i\sin\alpha) = b\cos\alpha + c\sin\alpha + i(c\cos\alpha - b\sin\alpha),\\ (b-ci)Q = (b-ci)(\cos\alpha + i\sin\alpha) = b\cos\alpha + c\sin\alpha - i(c\cos\alpha - b\sin\alpha).\end{cases}$$

Diese beide Gleichungen (14) addirt und mit 2 dividirt geben

$$bQ = b\cos\alpha + c\sin\alpha \tag{15}$$

und die zweite von der ersten subtrahirt und mit $2i$ dividirt giebt

$$cQ = c\cos\alpha - b\sin\alpha, \tag{15}$$

das heisst, b dreht sich durch Multiplikation mit Q in der Ebene bc

um den Winkel α nach c zu, und c dreht sich um denselben Winkel. Dann dreht sich offenbar jede Vielfachensumme von b und c, das heisst jede Strecke der Ebene bc um denselben Winkel.

Es ist sehr zweckmässig, für diesen Quotienten folgende zwei symbolische Ausdrücke festzustellen, zwischen denen man je nach Bedürfniss wählen kann,

(16) $$Q = a^{\alpha} = e^{\angle bb'},$$

wo a die Drehungsaxe von der Länge Eins, α der Drehungswinkel, b' aber die Strecke ist, in die sich b, was gegen die Axe senkrecht ist, durch die Drehung verwandelt. Es unterscheiden sich hier α und $\angle bb'$ nur dadurch, dass jenes den Winkel als Zahl, dieses aber denselben Winkel als Theil der Drehungsebene betrachtet darstellt. Dann bedeutet xa^{π} die Strecke x', welche mit a denselben Winkel bildet wie x, aber nach der entgegengesetzten Seite hin, so dass also $\angle xx' = 2\angle ax'$ ist; ebenso stellt $x'b^{\pi}$ die Strecke x'' dar, welche wieder so liegt, dass $\angle x'x'' = 2\angle x'b$ ist; dann ist also

(17) $$xa^{\pi}b^{\pi} = xe^{2ax' + 2x'b} = xe^{2\angle ab}.$$

So erhält man

(18) $$a^{\pi}b^{\pi} = e^{2\angle ab}.$$

Dieser Satz ist für die Fortsetzung der Drehungen von Bedeutung. In der That ergiebt sich

384 (19) $$e^{2\angle ab}\,.\,e^{2\angle bc} = a^{\pi}b^{\pi}b^{\pi}c^{\pi} = a^{\pi}c^{\pi} = e^{2\angle ac},$$

also

(20) $$e^{2\angle ab}\,.\,e^{\angle bc} = e^{2\angle ac},$$

eine Formel, die statt der verwickelten und mit fremdartigen Bestandtheilen vermischten Formel (81) von Dillner eintreten muss.

Die schönste Anwendung der Quaternionen ist die auf die *sphärische Trigonometrie*. Doch glaube ich, dass auch hier die Verknüpfung der Strecken der Rechnung mit Quaternionen überlegen ist. Hierzu ist noch der in dem Obigen schon implicite enthaltene Begriff des Produktes $[abc]$ dreier Strecken a, b, c erforderlich. In der That, wenn $[bc]$ die Ergänzung der Strecke a_1 ist, also $[bc] = |a_1$, so wird $[abc] = [a|a_1]$, also gleich dem inneren Produkte der Strecken a und a_1. Ich nenne $[abc]$ das äussere Produkt der drei Strecken a, b, c (A_1 § 31 u. ff., A_2 Nr. 262 {d. Ausg. I, 1, S. 80ff., I, 2, S. 173}). Es ergeben sich leicht aus dem Obigen die Formeln

$$[abc] = [bca] = [cab] = -[acb] = -[bac] = -[cba],$$

ferner das Gesetz, dass $[abc] = 0$ ist, wenn zwei der Faktoren gleich sind, und begrifflich, dass $[abc]$ gleich dem Parallelepipedon (Spat) ist, in welchem drei sich aneinander schliessende Kanten gleich a, b und c sind.

Nun setze ich statt eines sphärischen Polygons $ABCD\ldots$ die Reihe der Strecken $a, b, c, d, \ldots$ welche vom Mittelpunkt der Kugel nach den Ecken $A, B, C, D, \ldots$ gezogen sind, und setze die Länge des Kugelradius gleich Eins. Setzt man dann statt $ab, bc, cd, \ldots$ die Radien, welche auf $ab, bc, cd, \ldots$ nach derselben Seite hin (zum Beispiel nach links hin) senkrecht stehen, so erhält man das zugehörige Polareck. Es seien namentlich a, b, c die nach den Ecken eines sphärischen Dreiecks gezogenen Radien und sei c' der auf a, b senkrechte Radius, doch so, dass $[abc']$ positiv ist, und ebenso sei b' auf c, a senkrecht, a' auf b, c, und $[cab']$ $[bca']$ positiv. Dann ist $a'b'c'$ die Polarecke, aber auch a auf b', c'; b auf c', a'; c auf a', b' senkrecht, nach gleicher Seite hin, also auch abc die Polarecke von $a'b'c'$. Nun seien die Winkel $bc, ca, ab, b'c', c'a', a'b'$ mit $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ bezeichnet, und zwar so, dass diese sechs Winkel als positive Zahlen betrachtet werden. Um die Beziehungen zwischen diesen Grössen auf die einfachste Weise ableiten zu können, mache ich noch von dem Produkt zweier Flächenräume im Raume Gebrauch, indem ich (nach A_1 § 132, A_2 Nr. 103 {d. Ausg. I, 1, S. 217, I, 2, S. 72}

$$[ab\,.\,bc] = [abc]\,.\,b$$

setze. Dann ergiebt sich (A_2 Nr. 97), dass das Produkt der Ergänzungen zweier Strecken a, b im Raume die Ergänzung des Produktes dieser Strecken ist, das heisst:

$$[|a|b] = |[ab].$$

Hieraus folgt für die obigen sechs Radien a, b, c, a', b', c', zunächst $a' \sin\alpha = |[bc]$. Denn ist $\angle\, bc_1$ in der Ebene bc gleich 90^0 und c_1 385 gleichfalls Radius, so bilden a', b, c_1 einen Normalverein und es ist also

$$a' = |[bc_1] = |[bc] : \sin\alpha.$$

Auf gleiche Weise ist

$$b' \sin\beta = |[ca], \quad c' \sin\gamma = |[ab];$$
$$a \sin\alpha' = |[b'c'], \quad b \sin\beta' = |[c'a'], \quad c \sin\gamma' = |[a'b'].$$

Also ist

$$(21) \qquad a = \frac{|[b'c']}{\sin\alpha'} = \frac{[|b'|c']}{\sin\alpha'} = \frac{[ca\,.\,ab]}{\sin\alpha' \sin\beta \sin\gamma} = \frac{[abc]a}{\sin\alpha' \sin\beta \sin\gamma},$$

also

$$[abc] = \sin\alpha' \sin\beta \sin\gamma = \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma \cdot \frac{\sin\alpha'}{\sin\alpha}.$$

Da nun $[abc] = [bca] = [cab]$ ist, so kann man auch $\sin\beta' : \sin\beta$ und $\sin\gamma' : \sin\gamma$ statt $\sin\alpha' : \sin\alpha$ setzen. Es sei $\sin\alpha' : \sin\alpha = \varkappa$ gesetzt, so wird

$$(22) \quad \begin{cases} [a\,b\,c] \ = \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma \,.\, \varkappa, \\ [a'b'c'] = \sin\alpha' \sin\beta' \sin\gamma' \cdot \frac{1}{\varkappa}, \\ \varkappa = \frac{\sin\alpha'}{\sin\alpha} = \frac{\sin\beta'}{\sin\beta} = \frac{\sin\gamma'}{\sin\gamma}. \end{cases}$$ und ebenso

Ferner, da $|a' \sin\alpha = [bc]$ ist, so hat man $[a'bc] = [a'|a'] \sin\alpha = \sin\alpha$, und so

$$(23) \quad \begin{cases} [a'bc] = \sin\alpha, \quad [b'ca] = \sin\beta, \quad [c'ab] = \sin\gamma, \\ [ab'c'] = \sin\alpha', \ [bc'a'] = \sin\beta', \ [ca'b'] = \sin\gamma'. \end{cases}$$

Ferner $[b'bc] = [b'|a'] \sin\alpha = \sin\alpha \cos\gamma'$, und so überhaupt

$$(24) \quad \begin{cases} [b'bc] = \sin\alpha \cos\gamma', \quad [c'bc] = \sin\alpha \cos\beta' \ \text{ u. s. w.,} \\ [bb'c'] = \sin\alpha' \cos\gamma, \quad [cb'c'] = \sin\alpha' \cos\beta \ \text{ u. s. w.} \end{cases}$$

Nun seien a, b, c drei beliebige Strecken, die nicht einer Ebene angehören, so lässt sich jede andere Strecke d aus ihnen numerisch ableiten. Es sei

$$d = xa + yb + zc,$$

so erhält man durch äussere Multiplikation mit $[bc]$, da $[bbc]$ und $[cbc]$ null sind, $[dbc] = x[abc]$, also $x = [dbc] : [abc]$ und entsprechend für die übrigen, also

$$(25) \qquad d[abc] = a[dbc] + b[adc] + c[abd]$$

oder symmetrischer

$$(25) \qquad a[bcd] - b[cda] + c[dab] - d[abc] = 0$$

für beliebige vier Strecken a, b, c, d.

Diese Gleichung können wir benutzen, um unmittelbar die Hauptaufgabe zu lösen: „*Die Gleichung aufzustellen zwischen je vier der Radien* a, b, c, a', b', c'."

Man findet zuerst für a, b, c, a' die Gleichung

$$a[bca'] - b[ca'a] + c[a'ab] - a'[abc] = 0,$$

das heisst

$$(\text{VI}) \qquad a \sin\alpha + b \sin\beta \cos\gamma' + c \sin\gamma \cos\beta' = a'[abc],$$

386 oder, indem man mit beliebigem Radius r innerlich multiplicirt und statt $[abc]$ seinen Werth setzt

$$(26) \quad \begin{cases} \cos ra \,.\, \sin\alpha + \cos rb \,.\, \sin\beta \cos\gamma' + \cos rc \,.\, \sin\gamma \cos\beta' = \\ \qquad = \cos ra' \,.\, \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma'. \end{cases}$$

Solcher Formeln erhält man sechs. Es sind dies die Formeln, welche Dillner unter Formel (17) andeutet.

Ferner findet man für a, b, a', b' die Gleichung

$$a[ba'b'] - b[a'b'a] + a'[b'ab] - b'[aba'] = 0,$$

das heisst

$$\text{(VII)} \quad \sin\gamma'(a\cos\alpha - b\cos\beta) + \sin\gamma(a'\cos\alpha' - b'\cos\beta') = 0$$

oder

$$(27) \sin\gamma'(\cos ra\cos\alpha - \cos rb\cos\beta) + \sin\gamma(\cos ra'\cos\alpha' - \cos rb'\cos\beta') = 0.$$

Setzt man insbesondere $r = a$, so erhält man, da

$$\cos aa' = [a|a'] = \frac{[abc]}{\sin\alpha} = \sin\beta\sin\gamma'$$

ist, nach Division mit $\sin\gamma'$ die bekannte Formel

$$(28) \qquad \cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos\alpha' = 0.$$

Solcher Formeln wie (VII) erhält man drei.

Endlich findet man für a, b, c', a'

$$a[bc'a'] - b[c'a'a] + c'[a'ab] - a'[abc'] = 0,$$

das heisst

$$\text{(VIII)} \qquad \sin\beta'(a - b\cos\gamma) = \sin\gamma(a' - c'\cos\beta')$$

oder

$$(29) \quad \sin\beta'(\cos ra - \cos rb\cos\gamma) = \sin\gamma(\cos ra' - \cos rc'\cos\beta').$$

Solcher Formeln giebt es sechs.

Man erkennt hieraus den grossen Reichthum der Beziehungen, die durch diese Methode hervortreten. Jede geometrische Gleichung lässt sich auf diese Weise in Sätze der Sphärik umwandeln.

Ich führe als Beispiel an den von Hankel S. 193 citirten Gaussschen Satz für das sphärische Viereck, nämlich

$$\sin AB\sin CD\cos(AB, CD) = \cos AC\cos BD - \cos AD\cos BC,$$

welcher eine Umwandlung der Formel (A_2 Nr. 176 {d. Ausg. I, 1, S. 136}) ist, nämlich der Formel

$$[ab|cd] = [a|c][b|d] - [a|d][b|c].$$

Als zweites Beispiel führe ich an die Umwandlung der Gleichung $a_1 + b_1 + c_1 + \cdots = s_1$, wo $a_1, b_1, c_1, \ldots s_1$ Strecken sind. Es sei $a_1 = \mathfrak{a}a$, $b_1 = \mathfrak{b}b$, $c_1 = \mathfrak{c}c$, $s_1 = \mathfrak{s}s$, wo $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots \mathfrak{s}$ die Längen sind, $a, b, c, \ldots s$ also Radien einer Kugel von der Länge Eins, so hat man durch innere Multiplikation mit einem beliebigen Radius r

$$\mathfrak{a}\cos ra + \mathfrak{b}\cos rb + \cdots = \mathfrak{s}\cos rs.$$

Setzt man hier $r = s$, so hat man

$$\mathfrak{a} \cos sa + \mathfrak{b} \cos sb + \cdots = \mathfrak{s},$$

also:

$$\frac{\mathfrak{a} \cos ra + \mathfrak{b} \cos rb + \cdots}{\mathfrak{a} \cos sa + \mathfrak{b} \cos sb + \cdots} = \cos rs, \tag{30}$$

eine Formel von der d'Arrest in den Berichten der sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften von 1852 (S. 37 ff.) einen speciellen Fall entwickelt hat.

Stettin, den 25. April 1877.

XXII.

Verwendung der Ausdehnungslehre für die allgemeine 273 Theorie der Polaren und den Zusammenhang algebraischer Gebilde.

Von

Hermann Günther Grassmann in Stettin.

Crelles Journal Bd. 84, Heft 4, S. 273—283 (1877).

Herr Reye hat in einer Reihe von Aufsätzen, die in diesem Journal veröffentlicht sind, und unter denen ich besonders Bd. 78, S. 97 ff. „Erweiterung der Polarentheorie algebraischer Flächen", Bd. 79, S. 159 ff. „Ueber algebraische Flächen, die zu einander apolar sind", Bd. 82, S. 1 ff. „Ueber Systeme und Gewebe von algebraischen Flächen" nebst den Anwendungen auf Flächen zweiten Grades Bd. 82, S. 54 ff., S. 173 ff. hervorhebe, die Theorie der algebraischen Gebilde in sehr fruchtreicher Weise erweitert. Die Methoden, die er angewandt hat, werden durch die Principien der Ausdehnungslehre ausserordentlich vereinfacht, und neue Bahnen eröffnen sich von da aus in dies noch immer schwer zugängliche und doch so reichhaltige Gebiet.

Die Principien der Ausdehnungslehre, auf die ich zurückgehe, finden sich zuerst andeutungsweise in meiner Ausdehnungslehre von 1844 und in der von 1862. In der letzteren, Nr. 350, {d. Ausg. I, 2, S. 225} ist gezeigt, wie man jede Funktion von m veränderlichen Zahlgrössen $x_1, \ldots, x_m$ in eine Funktion einer einzigen extensiven Grösse x verwandeln kann, welche aus m Einheiten $e_1, \ldots, e_m$ durch die Zahlgrössen $x_1, \ldots, x_m$ abgeleitet ist, so nämlich, dass

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_m e_m$$

ist. Diese Verwandlung wird durch den Begriff der kombinatorischen Multiplikation vermittelt.

Das Produkt der Einheiten $e_1, \ldots, e_m$ wird als kombinatorisches dadurch charakterisirt, dass dasselbe Null gesetzt wird, sobald eine Einheit mehr als einmal darin als Faktor erscheint, und dass durch gegenseitige Vertauschung zweier Faktoren das kombinatorische Produkt der Einheiten entgegengesetzten Werth annimmt. Ich bezeichne, der Ausdehnungslehre von 1862 gemäss, das kombinatorische Produkt durch eine eckige Klammer, mit der ich es umschliesse; ferner setze ich das kombinatorische Produkt der sämtlichen ursprünglichen Einheiten in der gegebenen Reihenfolge $e_1, \ldots, e_m$ gleich 1, also $[e_1 e_2 \ldots e_m] = 1$, 274 so dass als die kombinatorischen Produkte aus den m Einheiten stets, je nach ihrer Ordnung, gleich $+1$ oder -1 sind.

Ergänzung einer Einheit nenne ich das kombinatorische Produkt aller übrigen Einheiten und zwar in der Anordnung der Faktoren, dass, wenn auf jene Einheit die Einheiten, die in ihrer Ergänzung als Faktoren enthalten sind, der Reihe nach folgen, das gesamte kombinatorische Produkt $+1$ ist. Ist also ε_r die Ergänzung der Einheit e_r und bedeutet $[e_r \varepsilon_r]$ das kombinatorische Produkt, in welchem auf e_r nach der Reihe die Einheiten von ε_r als Faktoren folgen, so hat man $[e_r \varepsilon_r] = 1$; dagegen $[e_r \varepsilon_s] = 0$, wenn r nicht gleich s ist, weil dann ε_s nothwendig e_r als Faktor enthält, das gesamte kombinatorische Produkt also nach dem oben festgestellten Begriffe desselben Null ist. Ich nenne ein solches Produkt $[e_r \varepsilon_r]$, sofern e_r und ε_r als dessen Faktoren betrachtet werden, ein äusseres Produkt (Ausdehnungslehre von 1844 § 34, die von 1862 Nr. 78 {d. Ausg. I, 1, S. 85f., I, 2, S. 56}). Hieraus folgt aber sogleich, da $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_m e_m$ gesetzt war, $[x \varepsilon_1] = x_1$, $[x \varepsilon_2] = x_2$ u. s. w., also

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = f([x\varepsilon_1], [x\varepsilon_2], \ldots, [x\varepsilon_m]);$$

das heisst, die Funktion von m veränderlichen Zahlgrössen $x_1, \ldots, x_m$ ist in eine Funktion einer einzigen extensiven Grösse x verwandelt.

Hieraus habe ich weiter in Nr. 358 {d. Ausg. I, 2, S. 230} die Folgerung abgeleitet, dass sich jede homogene Funktion n-ten Grades der Veränderlichen $x_1, \ldots x_m$ in der Form $\alpha_n x^n$ darstellen lasse, wo α_n einen Ausdruck mit n Lücken in jedem Gliede darstellt. In der That, wenn f eine homogene Funktion n-ten Grades von $x_1, \ldots, x_m$ ist, so kommt in $f = f([x\varepsilon_1], [x\varepsilon_2], \ldots, [x\varepsilon_m])$ die extensive Variable x in jedem Gliede n-mal als Faktor vor. Entfernt man daher x aus diesen Verbindungen $[x\varepsilon_i]$ und setzt an die Stelle, wo x gestanden hat, irgend ein Zeichen, welches die dadurch entstandene Lücke darstellt, und setzt nun den so aus $f([x\varepsilon_1], \ldots, [x\varepsilon_m])$ hervorgehenden Ausdruck $= \alpha_n$, so wird $f = \alpha_n x^n$. Das Zeichen, welches man für die entstandene Lücke

wählt, ist an sich gleichgültig, kann aber hier füglich ganz entbehrt werden, da der Ausdruck $\alpha_n x^n$ sonst keine Bedeutung hat, wenn nicht α_n ein Ausdruck ist, der in jedem Gliede n Lücken enthält, in die x eintreten soll. Doch ist hierdurch der Begriff des Lückenausdruckes α_n noch nicht erschöpft. Es muss nämlich festgestellt werden, welche Bedeutung α_n erlangt, wenn beliebige n extensive Grössen, zum Beispiel $y_1, y_2, \ldots y_p, y^{n-p}$ in die Lücken jedes in α_n enthaltenen Gliedes eintreten sollen. Es ist in der Ausdehnungslehre von 1862, Nr. 353 {d. Ausg. I, 2, S. 228} festgesetzt, dass $\alpha_n y_1 y_2 \ldots y_p y^{n-p}$ den Ausdruck † bezeichnet, welcher hervorgeht, wenn man die Faktoren 275 $y_1 y_2 \ldots y_p y^{n-p}$ nach und nach in allen möglichen verschiedenen Folgen in die Lücken von α_n eintreten lässt und die Summe der so erhaltenen Ausdrücke durch ihre Anzahl dividirt, und in Nr. 360—363 {d. Ausg. I, 2, S. 231—233} ist nachgewiesen, dass für diese hinzutretenden Faktoren die Gesetze der gewöhnlichen algebraischen Multiplikation gelten. Auch kann y hier möglicher Weise die Lücke selbst bezeichnen.

Ich beschränke mich, im Anschlusse an die Arbeiten von Herrn Reye, auf die quaternären Formen im Raume. Die Grössen erster Stufe im Raume sind Punktgrössen, das heisst einfache oder vielfache (mit Koefficienten versehene) Punkte, oder Strecken von bestimmter Länge und Richtung, die als unendlich entfernte Punktgrössen aufzufassen sind. Ich bezeichne diese Grössen erster Stufe mit lateinischen Buchstaben, und verstehe also auch unter den Einheiten e_1, e_2, e_3, e_4, sowie unter ihren Vielfachensummen, Grössen erster Stufe, also, abgesehen von dem Koefficienten, Punkte. Die Ergänzung von e_1, das heisst das kombinatorische Produkt $[e_2 e_3 e_4]$ bezeichne ich wie oben mit ε_1 und nenne diese Ergänzungen Einheiten dritter Stufe. In der Ausdehnungslehre ist nachgewiesen, dass das kombinatorische Produkt $[e_2 e_3 e_4]$ ein Theil der Ebene ist, die durch die drei Punkte e_2, e_3, e_4 geht, und zwar, wenn e_2, e_3, e_4 einfache Punkte sind, das Doppelte des Dreiecks $e_2 e_3 e_4$. Ebenso nenne ich jede Vielfachensumme dieser ergänzenden Einheiten eine Grösse dritter Stufe. Sie stellt nach der Ausdehnungslehre (von 1862) Nr. 257, 258 {d. Ausg. I, 2, S. 172} wiederum einen Theil einer Ebene dar, und es gelten für sie im Raume genau dieselben Gesetze wie für die Grössen erster Stufe, wenn man nämlich überall den Begriff der ersten Stufe mit dem der dritten vertauscht. Namentlich ist das kombinatorische Produkt dreier Ebenen, abgesehen von dem metrischen Werthe, der Durchschnittspunkt der drei Ebenen. Ich bezeichne im Folgenden überall die Ebenen oder Theile der Ebenen mit griechischen Buchstaben. Hiernach wird nun,

wenn $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4$, und $\xi = \xi_1 \varepsilon_1 + \xi_2 \varepsilon_2 + \xi_3 \varepsilon_3 + \xi_4 \varepsilon_4$ ist, wo $x_1, \ldots, x_4, \xi_1, \ldots, \xi_4$ veränderliche Zahlgrössen bedeuten,

$\alpha_n x^n = 0$ die Gleichung einer Fläche n-ter Ordnung,

$a_n \xi^n = 0$ die Gleichung einer Fläche n-ter Klasse.

Der Kürze wegen will ich diese Flächen die Flächen α_n oder a_n nennen.

Aus den hier dargelegten, schon in meiner Ausdehnungslehre von 1862 enthaltenen Principien habe ich in den Göttinger Nachrichten von 1872, S. 570 {hier S. 251 f.} die Theorie der Polaren auf die einfachste 276 Weise abgeleitet, und es bedarf † nur einer geringen Nachhülfe, um die dort niedergelegte Methode so zu erweitern, dass sie zugleich die von Herrn Reye ausgeführte erweiterte Theorie der Polaren und die Theorie der Apolaren in sich schliesst.

Es knüpft sich jene Methode an die Aufgabe, die Durchschnittspunkte einer geraden Linie bc mit einem Gebilde n-ter Ordnung zu finden. Die Aufgabe ist dort für den Fall behandelt, dass dieses Gebilde eine Curve n-ter Ordnung in der Ebene sei. Es lässt sich dies aber ohne irgend eine Aenderung auf den Fall übertragen, wo das Gebilde eine Fläche n-ter Ordnung im Raume ist. Jeder Punkt der geraden Linie bc lässt sich in der Form $b + \lambda c$ darstellen, wo b und c Punkte und λ eine veränderliche Zahl ist. Ist nun $\alpha_n x^n = 0$ eine Fläche n-ter Ordnung, so liefert die Gleichung $\alpha_n (b + \lambda c)^n = 0$ nach λ gelöst die n Durchschnittspunkte der geraden Linie bc und der Fläche $\alpha_n x^n = 0$. Die Entwickelung giebt

$$(1) \qquad \alpha_n b^n + n\alpha_n b^{n-1} c \,.\, \lambda + \frac{n(n-1)}{1 \,.\, 2} \alpha_n b^{n-2} c^2 \,.\, \lambda^2 + \cdots = 0.$$

Sind die k ersten Glieder dieser Gleichung Null, so sind auch k Werthe von λ Null, das heisst, die Gerade bc berührt die genannte Fläche k-punktig in b. Sind also die k ersten Glieder der Gleichung (1) für jeden Werth von c gleich Null, so muss jede durch b gezogene gerade Linie die Fläche α_n k-punktig treffen, das heisst, der Punkt b ist ein k-facher Punkt der Fläche α_n. Setzen wir nun einen Ausdruck α_k mit k Lücken, die durch Punkte ausgefüllt werden sollen, nur dann selbst gleich Null, wenn er mit beliebigen k Punkten multiplicirt Null giebt, oder, anders ausgedrückt, wenn die sämtlichen Koefficienten der Form $\alpha_k x^k$ Null sind, so können wir sagen, $\alpha_n b^{n-k} = 0$ drücke aus, dass b ein $(k+1)$-facher Punkt der Fläche α_n sei, namentlich drücke dann $\alpha_n b^{n-1} = 0$ aus, dass b ein Doppelpunkt der Fläche α_n sei. Die Glieder in der obigen Gleichung (1) sind, wenn man c veränderlich etwa gleich x setzt, die Polaren von b, nämlich die Fläche $\alpha_n b$, das heisst die Fläche, deren Gleichung $\alpha_n b x^{n-1} = 0$ ist, die sogenannte erste Polare, $\alpha_n b^2$ die zweite u. s. w.

Ich habe in dem angeführten Aufsatze die Benennung dahin geändert, dass ich $\alpha_n b$ die Polare von b, $\alpha_n b^2$ die Polare von b^2 u. s. w., $\alpha_n b_1 b_2 \ldots b_k$ die Polare von $b_1 b_2 \ldots b_k$ genannt habe. Da man nun das algebraische Produkt $b_1 b_2 \ldots b_k$ als Fläche k-ter Klasse betrachten kann, die in die Punkte $b_1, b_2, \ldots, b_k$ zerfällt, und jede Fläche k-ter Klasse als Vielfachensumme solcher Flächen darstellen kann, so lag es nahe, die Theorie der Polaren in dieser Weise † zu erweitern. Aber 278 ich habe diesen wichtigen Schritt nicht selbständig gethan, sondern erst, nachdem ich Reyes oben citirte Abhandlung in diesem Journal Bd. 78 gelesen hatte. Aber die angedeutete Idee ist für die Auffassung der allgemeinen Polarentheorie von fundamentaler Wichtigkeit, und ich werde sie daher hier noch nach einer etwas veränderten {Methode} darlegen.

Ich habe gesagt, dass man das algebraische Produkt $b_1 b_2 \ldots b_k$ als Fläche k-ter Klasse betrachten kann; die Gleichung dieser Fläche ist $[b_1 \xi][b_2 \xi] \ldots [b_k \xi] = 0$, wo $[b_1 \xi]$ das äussere Produkt des Punktes b_1 und der Ebene ξ ist, und gleich Null gesetzt, aussagt, dass die Ebene ξ durch den Punkt b_1 geht. Nun bezeichne ich mit $a^{(k)}$ die Vielfachensumme der algebraischen Produkte von je k Punkten und nenne sie eine Form k-ter Klasse. Es verwandelt sich $a^{(k)}$ in a_k, wenn man jedem dieser Punkte noch eine Lücke dritter Stufe als zweiten Faktor des äusseren Produktes hinzufügt; es sind also $a^{(k)}$ und a_k nur formell verschieden, und beide stellen dieselbe Fläche k-ter Klasse dar. Ich bezeichne das obige Produkt $[b_1 \xi][b_2 \xi] \ldots [b_k \xi]$ mit $[b_1 b_2 \ldots b_k . \xi^k]$ und verstehe allgemeiner unter dem äusseren Produkte zweier Faktoren, von denen der erste ein algebraisches Produkt von m Punkten, der andere ein algebraisches Produkt von n Ebenen ist, also unter $[b_1 \ldots b_m . \beta_1 \ldots \beta_n]$, wenn m kleiner oder ebenso gross als n ist, den Ausdruck, welcher hervorgeht, wenn man zuerst jeden der Punkte $b_1 \ldots b_m$ mit einer beliebigen der Ebenen $\beta_1 \ldots \beta_n$ zu einem äusseren Produkte verbindet, und die sämtlichen möglichen verschiedenen Glieder, die auf diese Weise aus $b_1 \ldots b_m . \beta_1 \ldots \beta_n$ entspringen, addirt und die Summe durch die Anzahl der Glieder dividirt. So zum Beispiel ist

$$[b_1 b_2 \cdot \beta_1 \beta_2] = \frac{[b_1 \beta_1] . [b_2 \beta_2] + [b_1 \beta_2] . [b_2 \beta_1]}{2}, \quad [b_1 \cdot \beta_1 \beta_2] = \frac{[b_1 \beta_1] . \beta_2 + [b_1 \beta_2] . \beta_1}{2}.$$

Man sieht, dass jener Ausdruck $[b_1 \ldots b_m . \beta_1 \ldots \beta_n]$ nur formell verschieden ist von dem oben definirten Ausdrucke $[x\beta_1] \ldots [x\beta_n] b_1 \ldots b_m$, wenn x das Zeichen der Lücke ist, und dass $a_n \xi^n$ identisch ist mit $[a^{(n)} \xi^n]$ und daher auch die oben nachgewiesenen Gesetze für diese neuen Formen gelten. Es versteht sich von selbst, dass, wenn m grösser ist als n, man $\beta_1, \ldots, \beta_n$ auf alle möglichen Arten mit n der

Punkte $b_1, \ldots, b_m$ zu äusseren Produkten $[b_r \beta_s]$ zu verbinden und im übrigen ebenso zu verfahren hat, und dass man ferner auch $[\beta_1 \ldots \beta_m . b_1 \ldots b_n]$ auf entsprechende Weise zu definiren hat. Ich ziehe diese Formen als für die Anwendung bequemer den früheren vor. Ist nun $\alpha^{(n)}$ eine Form n-ter Ordnung und $a^{(m)}$ eine Form m-ter 278 Klasse, so wird nach † dem Obigen $[\alpha^{(n)} . a^{(m)}]$ die *Polare* zu jenen zwei Formen. Diese Polare ist eine Form von $(n-m)$-ter Ordnung oder $(m-n)$-ter Klasse, je nachdem $n > m$ oder $m > n$ ist. Um diesen doppelten Ausdruck zu vermeiden, setze ich fest, dass zum Beispiel eine Form (-3)-ter Ordnung nichts anders bedeuten soll als eine Form dritter Klasse und umgekehrt. Wenn $m = n$ ist, so wird die Polare eine blosse Zahl.

Der so gewonnene Begriff der Polare gestattet die freieste und mannigfachste Anwendung, und schliesst den von Herrn Reye aufgestellten Begriff in sich. Um dazu zu gelangen, benutzt man am besten den bekannten Satz: Jede Fläche n-ter Klasse lässt sich, wenn man

$$\nu = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1 . 2 . 3}$$

beliebige Punkte $b_1, \ldots, b_\nu$ annimmt, welche nicht in einer und derselben Fläche n-ter Ordnung liegen, als Vielfachensumme von ν Flächen n-ter Klasse darstellen, welche sich auf die n-fachen Punkte $b_1, \ldots, b_\nu$ reduciren, oder anders ausgedrückt, jede Form n-ter Klasse $a^{(n)}$ lässt sich in der Form

$$a^{(n)} = \mathfrak{a}_1 b_1^n + \cdots + \mathfrak{a}_\nu b_\nu^n$$

darstellen. Dieser Satz, so wie der reciproke, soll weiter unten auf sehr einfache Art bewiesen werden. Sucht man nun zu der Fläche $\{n$-ter Klasse$\}$ $a^{(n)}$, deren Gleichung $\mathfrak{a}_1[b_1\xi]^n + \cdots + \mathfrak{a}_\nu[b_\nu\xi]^n = 0$, und zu der Fläche k-ter Ordnung $\alpha^{(k)}$, deren Gleichung $\mathfrak{b}_1[\beta_1 x]^k + \cdots + \mathfrak{b}_\varkappa[\beta_\varkappa x]^k = 0$ ist, wo

$$\varkappa = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{1 . 2 . 3}$$

und $k < n$ ist, die Polare, so wird diese nach dem Obigen eine Fläche $(n-k)$-ter Klasse, deren Gleichung $[a^{(n)}\alpha^{(k)}\xi^{n-k}] = 0$, das heisst $\sum_{q,r} \mathfrak{a}_q \mathfrak{b}_r b_q{}^n \beta_r{}^k \xi^{n-k} = 0$ oder $\sum_{q,r} \mathfrak{a}_q \mathfrak{b}_r [b_q \beta_r]^k [b_q \xi]^{n-k} = 0$ ist.

Diese Bestimmung stimmt mit der von Herrn Reye dem Resultate nach überein. Aber auch Reyes Apolaren sind aus dem obigen Princip aufs einfachste abzuleiten. Nämlich zwei Formen $a^{(n)}$ und $\alpha^{(m)}$ von n-ter Klasse und m-ter Ordnung heissen apolar zu einander, wenn die zu ihnen gehörige Polare Null ist, das heisst, wenn $[a^{(n)} . \alpha^{(m)}] = 0$ ist.

Wenn m kleiner als n ist, so heisst das, es muss $[a^{(n)} \,.\, \alpha^{(m)} \xi^{n-m}]$ gleich Null sein für jede Ebene ξ; das giebt so viel Bedingungsgleichungen als die Zahl der Koefficienten einer quaternären Form $(n-m)$-ten Grades beträgt, also

$$\frac{(n-m+1)(n-m+2)(n-m+3)}{1\,.\,2\,.\,3}$$

Bedingungsgleichungen. Diese Bedingungsgleichungen erhält man unmittelbar, indem man statt ξ^{n-m} nach und nach die Kombinationen mit Wiederholung aus ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 zur $(n-m)$-ten Klasse setzt. Der interessanteste Fall ist der, wo $n=m$ ist, also $[a^{(n)} \,.\, \alpha^{(n)}] = 0$ ist. Wenn sich $a^{(n)}$ auf die Potenz eines Punktes reducirt, so sagt die 279 Gleichung aus, dass dieser Punkt auf der Fläche n-ter Ordnung $\alpha^{(n)}$ liege. Wir werden im allgemeinen Falle mit Herrn Reye sagen können, dass die Fläche n-ter Klasse $a^{(n)}$ auf der Fläche n-ter Ordnung $\alpha^{(n)}$ ruhe, oder nach der in der Ausdehnungslehre gewählten Benennung, dass $a^{(n)}$ und $\alpha^{(n)}$ incident sind. Sind e_1, e_2, e_3, e_4 die ursprünglichen Einheiten und ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 ihre Ergänzungen, so kann man $a^{(n)}$ und $\alpha^{(n)}$ in den Formen darstellen

$$a^{(n)} = \mathfrak{a}_1 e_1^{\,n} + \mathfrak{a}_2 e_1^{n-1} e_2 + \cdots + \mathfrak{a}_\nu e_4^{\,n},$$
$$\alpha^{(n)} = \mathfrak{b}_1 \varepsilon_1^{\,n} + \mathfrak{b}_2 \varepsilon_1^{n-1} \varepsilon_2 + \cdots + \mathfrak{b}_\nu \varepsilon_4^{\,n}.$$

Dann ergiebt sich, da $[e_r \varepsilon_r] = 1$, $[e_r \varepsilon_s] = 0$ ist, wenn r und s verschieden sind, auch $[e_1^{\,n} \,.\, \varepsilon_1^{\,n}] = [e_1 \varepsilon_1]^n = 1$, $[e_1^{n-1} e_2 \,.\, \varepsilon_1^{n-1} \varepsilon_2] = [e_1 \varepsilon_1]^{n-1} [e_2 \varepsilon_2] = 1$, und so werden überhaupt die äusseren Produkte der entsprechenden Glieder gleich Eins, während die der nicht entsprechenden verschwinden, also

$$[a^{(n)} \alpha^{(n)}] = \mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_1 + \mathfrak{a}_2 \mathfrak{b}_2 + \cdots + \mathfrak{a}_\nu \mathfrak{b}_\nu$$

und dies gleich Null im Falle der Incidenz, also ganz wie bei der Incidenz eines Punktes und einer Ebene.

Da sich die Folgerungen, welche Herr Reye aus seiner Polarentheorie zieht, aufs leichteste aus den oben aufgestellten Principien ergeben, so glaube ich auf ihre Ableitung hier verzichten zu dürfen, und gehe jetzt auf die Systeme und Gewebe algebraischer Flächen über. Die wesentliche Idee dieser Gebilde findet sich in der Ausdehnungslehre von 1862, Nr. 392 und 393 {d. Ausg. I, 2, S. 263f.}. Es seien $f_1, f_2, \ldots, f_\nu$ beliebige Funktionen, und zwar setze ich sie dem vorliegenden Zwecke gemäss als quaternäre Funktionen von Punkten oder Ebenen im Raume, so lassen sich diese Funktionen nach Nr. 392 als Einheiten auffassen und die daraus numerisch abgeleiteten Funktionen als extensive Grössen, welche allen Verknüpfungen extensiver Grössen unterworfen werden können, und den Gesetzen derselben unterliegen. Es sei

$$f = x_1 f_1 + x_2 f_2 + \cdots + x_\nu f_\nu$$

eine solche abgeleitete Funktion, $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ also ihre Ableitungszahlen, die aber von den Veränderlichen, die in $f_1, f_2, \ldots$ enthalten sind, gänzlich unabhängig sind. Wenn nun zwischen diesen Ableitungszahlen, die man mit Herrn Reye die Flächenkoordinaten nennen kann, eine Gleichung m-ten Grades

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_\nu) = 0$$

herrscht, so habe ich die Gesamtheit der Flächen $f = 0$, die dieser Gleichung genügen, in Nr. 393 ein ***Flächengebilde*** m-ten Grades ge- 280 nannt, was † mit Reyes Darstellung wesentlich übereinstimmt. Allgemeiner würde $f = x_1 f_1 + \cdots + x_\nu f_\nu$, wenn $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$ eine Gleichung m-ten Grades ist, ein ***Formgebilde*** m-ten Grades genannt werden können. Ich habe diese Idee in Nr. 394—400 {d. Ausg. I, 2, S. 265—270} weiter ausgeführt für den Fall, wo f_1, f_2, f_3, f_4 Kreisfunktionen in der Ebene sind, und davon ist der Fall, wo $f_1, \ldots, f_5$ Kugelfunktionen im Raume sind, nicht wesentlich verschieden (vergl. Reye in diesem Journal, Bd. 82, S. 7 unten).

Aber in Betreff der Stufenzahl der Gebilde befinde ich mich mit Herrn Reye im Widerspruch. Ich nenne die Gesamtheit aller aus q Einheiten numerisch ableitbaren Grössen, der neueren Algebra entsprechend, ein Gebiet (lineares Gebilde) q-ter Stufe, während Herr Reye dafür die Stufenzahl $q - 1$ annimmt, die aber überall zu verwickelteren Formeln führt. Die allgemein theoretischen Sätze, welche Herr Reye S. 1—13 in der citirten Abhandlung „Ueber Systeme u. s. w." aufstellt, werden einfacher, allgemeiner und leichter beweisbar, wenn man wie oben $f_1, \ldots, f_\nu$ als beliebige Einheiten, also die f als einem Gebiete ν-ter Stufe angehörig auffasst. In diesem Sinne findet sich der Hauptsatz über die Stufenzahlen der Gebiete (Reye a. a. O. S. 12) in Nr. 25 der citirten Ausdehnungslehre, wobei auf die Erklärung Nr. 15 zurückgegangen ist {d. Ausg. I, 2, S. 21, 16}. Hier wird die Gesamtheit der Grössen, welche zweien (oder mehreren) Gebieten zugleich angehören, ihr gemeinschaftliches Gebiet und die Gesamtheit der Grössen, welche sich aus den Grössen zweier (oder mehrerer) Grössen numerisch (linear) ableiten lassen, ihr verbindendes Gebiet genannt und der Satz aufgestellt, dass die Summe der Stufenzahlen zweier Gebiete gleich der Summe der Stufenzahlen des ihnen gemeinschaftlichen und des sie verbindenden Gebietes sei. Ich verweise in Bezug auf den Beweis dieses Fundamentalsatzes auf die citirte Nummer meiner Ausdehnungslehre von 1862, und bemerke, dass er auch schon in der Ausdehnungslehre von 1844 S. *185* {d. Ausg. I, 1, S. 209} wenn gleich in anderer Ausdrucksweise vorkommt.

Auch die meisten der übrigen Sätze in jenem Abschnitte sind der Ausdehnungslehre zu entnehmen, dagegen findet sich in beiden Bearbeitungen der Ausdehnungslehre nicht der für die Ausdehnungslehre wichtige Satz in Nr. 14 jener Abhandlung. Derselbe würde für die Ausdehnungslehre so lauten: Ein Gebiet q-ter Stufe, welches einem Gebiete $(q+s)$-ter Stufe untergeordnet sein soll, hängt von qs Parametern ab, das heisst es giebt qs-fach unendlich viele Gebiete q-ter Stufe, die einem gegebenen Gebiete $(q+s)$-ter Stufe untergeordnet sind. Der Beweis, den Herr Reye giebt, lässt sich † unmittelbar auf 281 die Ausdehnungslehre übertragen. Sind nämlich wie oben $f_1, \ldots, f_\nu$, wo $\nu = q + s$ ist, als Einheiten gefasst, und ist $f = x_1 f_1 + \cdots + x_{q+s} f_{q+s}$, so müssen zwischen $x_1, \ldots, x_{q+s}$, damit f aus q Einheiten numerisch ableitbar sein soll, s Zahlbeziehungen (lineare homogene Gleichungen) herrschen. Diese lassen sich, wenn sie von einander unabhängig sind, in der Form darstellen, dass aus q jener Grössen die übrigen numerisch ableitbar sind, vorausgesetzt, dass auch unendlich grosse Koefficienten gestattet sind. Jede dieser s Zahlbeziehungen enthält q Koefficienten, also alle zusammen qs Koefficienten, die man als die Parameter, von denen die untergeordneten Gebiete q-ter Stufe abhängen, ansehen kann.

Es ergiebt sich hieraus zum Beispiel der für die Ausdehnungslehre sehr bedeutungsvolle Satz: Die Anzahl der Bedingungsgleichungen dafür, dass eine Grösse q-ter Stufe, die einem Hauptgebiete $(q+s)$-ter Stufe angehört, eine einfache sei, das heisst sich als kombinatorisches Produkt von q Grössen erster Stufe darstellen lasse (vgl. Ausdehnungsvon 1862, Nr. 77, die von 1844, § 51 {d. Ausg. I, 2, S. 56, I, 1, S. 108}), ist $(q+s)^{\cdot q} - qs - 1$, das heisst

$$\frac{(q+s)(q+s-1)\ldots(s+1)}{1.2\ldots q} - qs - 1.$$

Also zum Beispiel für Grössen q-ter Stufe in einem Gebiete $(q+1)$-ter Stufe giebt es keine Bedingungsgleichung (gemäss der Ausdehnungslehre von 1862, Nr. 88 und der von 1844, § 50 {d. Ausg. I, 2, S. 61, I, 1, S. 106}).

Aber auch jene Bedingungsgleichungen lassen sich auf dem angedeuteten Wege finden. In der That wenn

$$\begin{aligned} x_{q+1} &= y_{11} x_1 + \cdots + y_{1q} x_q \\ &\;\;\cdot\quad\;\; \cdot\;\;\cdots\;\; \cdot \\ &\;\;\cdot\quad\;\; \cdot\;\;\cdots\;\; \cdot \\ x_{q+s} &= y_{s1} x_1 + \cdots + y_{sq} x_q \end{aligned}$$

die oben angedeuteten Zahlbeziehungen sind, und man die Werthe von $x_{q+1}, \ldots, x_{q+s}$ in $f = x_1 f_1 + \cdots + x_{q+s} f_{q+s}$ einsetzt und nach den x ordnet, so erscheint f als Vielfachensumme von q Grössen, die keine

der Grössen x mehr enthalten; das so bestimmte Gebiet q-ter Stufe, dem f angehört, wird dann dargestellt durch das kombinatorische Produkt jener q Grössen, nämlich

$$= [(f_1 + y_{11} f_{q+1} + \cdots + y_{s1} f_{q+s}) \cdots (f_q + y_{1q} f_{q+1} + \cdots + y_{sq} f_{q+s})].$$

Als allgemeine Grösse q-ter Stufe erscheint sie aber in der Form $z_1 E_1 + z_2 E_2 + \cdots$, wo $E_1, E_2, \ldots$ die Einheiten q-ter Stufe, das heisst (nach A_2, Nr. 77 {d. Ausg. I, 2, S. 56}) die multiplikativen Kombinationen aus den Einheiten $f_1, \ldots, f_{q+s}$ zur q-ten Klasse sind. Wir denken uns dieselben wohlgeordnet $= E_1, E_2, \ldots$, so dass also $E_1 = [f_1 f_2 \ldots f_q]$ ist. Setzt man nun die entsprechenden zu diesen Einheiten q-ter Stufe gehörigen Koefficienten auf beiden Seiten gleich, 282 so erhält man zuerst $z_1 = 1$. Man wird † also die noch nicht homogenen Gleichungen durch Zufügung des Faktors z_1 homogen machen können. Ferner ergiebt sich leicht, dass die qs unbekannten Grössen y sich unmittelbar durch je eine der Grössen z ausdrücken, so dass man die verlangten Bedingungsgleichungen zwischen den z erhält. Bezeichnet man allgemein die Anzahl der Kombinationen ohne Wiederholung aus a Elementen zur p-ten Klasse mit $\dot{a}^{p}$, so ergeben sich $\dot{q}^{2} \dot{s}^{2}$ Gleichungen, deren Glieder Produkte von je zwei der Grössen z, $\dot{q}^{3} \dot{s}^{3}$ Gleichungen, deren Glieder Produkte von je drei der Grössen z, u. s. w., endlich $\dot{q}^{q} \dot{s}^{q} = \dot{s}^{q}$ Gleichungen, deren Glieder Produkte von je q der Grössen z sind.

So zum Beispiel erhält man, wenn eine Grösse zweiter Stufe in einem Gebiete vierter Stufe eine einfache Grösse (im Raume ein Linientheil) sein soll, nur Eine Bedingungsgleichung, nämlich bei der oben festgesetzten Benennung

$$z_1 z_6 - z_2 z_5 + z_3 z_4 = 0,$$

welche mit der aus der Liniengeometrie bekannten Bedingungsgleichung zusammenfällt.

Ich kehre jetzt zu den Flächengebilden zurück. Es ist gezeigt, dass die algebraischen Formen, besonders die im Raume, und die sie vertretenden algebraischen Produkte von Punkten oder Ebenen als extensive Grössen aufgefasst und den Verknüpfungen dieser Grössen unterworfen werden können. Namentlich hebe ich jetzt die kombinatorischen Produkte derselben hervor. Unmittelbar aus dem Begriffe ergiebt sich, dass ein kombinatorisches Produkt von m Grössen repräsentirt wird durch das aus diesen Grössen ableitbare Gebiet und einen durch die Beziehung zur Addition bedingten metrischen Werth, ferner

dass jenes Produkt dann und nur dann Null ist, wenn die m Faktoren desselben in einer Zahlbeziehung zu einander stehen. Aus dieser Betrachtung ergiebt sich sogleich die Gleichung einer Fläche n-ter Ordnung, die durch $\nu - 1$ Punkte geht, wo

$$\nu = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3}$$

ist, so wie die Gleichung einer Fläche n-ter Klasse, die von $\nu - 1$ Ebenen berührt wird. In der That, sind $b_1, \ldots, b_{\nu-1}$ im ersten Falle Punkte, deren n-te Potenzen in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, so ist die Fläche n-ter Ordnung durch diese Punkte bestimmt und ihre Gleichung ist

$$[b_1^n . b_2^n \ldots b_{\nu-1}^n . x^n] = 0.$$

Dass sie eine Fläche n-ter Ordnung darstellt, zeigt ihre Form unmittelbar, dass sie die Punkte $b_1, \ldots, b_{\nu-1}$ enthält, folgt sogleich; denn wird zum Beispiel $x = b_1$, so wird auch $x_n = b_1^n$, also werden zwei der Faktoren des kombinatorischen † Produktes gleich, also das kombinatorische Produkt nach seinem ursprünglichen Begriffe Null. 283

Aber diese Gleichung enthält auch die Lösung der Aufgabe in gewöhnlichen Koordinaten. Denn wenn $e_1, \ldots, e_4$ vier nicht in einer Ebene liegende Punkte und

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4, \quad b_r = b_{r1} e_1 + b_{r2} e_2 + b_{r3} e_3 + b_{r4} e_4$$

für $r = 1$ bis $\nu - 1$ sind, so erhält man jede der n-ten Potenzen als Vielfachensumme der multiplikativen Kombinationen mit Wiederholung aus e_1, e_2, e_3, e_4. Es seien $E_1, E_2, \ldots, E_\nu$ diese Kombinationen und zwar in wohlgeordneter Reihe, so reducirt sich die linke Seite obiger Gleichung auf eine Vielfachensumme der kombinatorischen Produkte von $E_1, \ldots, E_\nu$ zu ν Faktoren. Setzt man $[E_1 E_2 \ldots E_\nu] = 1$, so erhält man unmittelbar die verlangte Gleichung.

Auch erhellt (nach Ausdehnungslehre von 1862 Nr. 24, von 1844 § 20 {d. Ausg. I, 2, S. 21; I, 1, S. 61}), dass man statt der ν Einheiten $E_1, \ldots, E_\nu$ auch ν aus ihnen ableitbare Grössen, die in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, namentlich auch ν in keiner Zahlbeziehung zu einander stehende n-te Potenzen von Punkten setzen und aus ihnen alle n-ten Potenzen von Punkten, also auch alle Flächen n-ter Klasse ableiten kann. Endlich kann man statt $b_1^n, \ldots, b_{\nu-1}^n$ auch beliebige Flächen n-ter Klasse, $a_1^{(n)}, \ldots, b_{\nu-1}^{(n)}$, die in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, einsetzen und erhält dann

$$[a_1^{(n)} . a_2^{(n)} \ldots a_{\nu-1}^{(n)} x^n] = 0.$$

Es stellt also das kombinatorische Produkt von $\nu - 1$ unabhängigen Flächen n-ter Klasse eine Fläche n-ter Ordnung dar. Diese sei $\alpha^{(n)}$, also

$$[a_1^{(n)} a_2^{(n)} \dots a_{\nu-1}^{(n)}] = \alpha^{(n)},$$

so wird

$$[\alpha^{(n)} x^n] = 0$$

die Gleichung dieser Fläche. In dieser kann man wieder statt x^n eine Fläche n-ter Klasse $a^{(n)}$ setzen und erhält

$$[a_1^{(n)} a_2^{(n)} \dots a_{\nu-1}^{(n)} a^{(n)}] = [\alpha^{(n)} a^{(n)}] \quad \text{und dies} \quad = 0,$$

wenn $\alpha^{(n)}$ und $a^{(n)}$ incident sind (vergl. Reye, Ueber Systeme u. s. w. Nr. 21).

Es mag an diesen Andeutungen genügen, um die Fruchtbarkeit der in der Ausdehnungslehre entwickelten Methoden auch für das von Herrn Reye neu eröffnete Forschungsgebiet nachzuweisen.

Stettin, den 28. Juli 1877.

XXIII.

Stücke aus dem Lehrbuche der Arithmetik.

Lehrbuch | der | Arithmetik | für | höhere Lehranstalten | von |
Hermann Grassmann, | Professor am Gymnasium zu Stettin. | Berlin, 1861. |
Verlag von Th. Chr. Fr. Enslin. | (Adolph Enslin.)
Auch unter dem Titel: Lehrbuch | der | Mathematik | für | höhere Lehranstalten | etc.
Erster Theil: | Arithmetik.

Vorrede. V

Die vorliegende Bearbeitung der Arithmetik, welche in ihren wesentlichen Grundzügen das gemeinschaftliche Werk von mir und meinem Bruder Robert ist, tritt mit dem Anspruche auf, die erste streng wissenschaftliche Bearbeitung jener Disciplin zu sein, und mit dem noch weiter gehenden Anspruche, dass die darin befolgte Methode, wie sehr sie auch von der üblichen abweichen mag, dennoch, in allen ihren wesentlichen Momenten, nicht eine unter vielen möglichen, sondern die einzig mögliche Methode einer streng folgerichtigen und naturgemässen Behandlung jener Wissenschaft sei.

Ob diese Ansprüche, welche zugleich gegen die früheren Bearbeitungen den Vorwurf eines Mangels an wissenschaftlicher Strenge und Folgerichtigkeit einschliessen, berechtigt seien oder nicht, muss das Werk selbst thatsächlich ausweisen, da eine polemische oder apologetische Begründung dieser Ansprüche dem speziellen Zwecke des Werkes widerspricht. Wir hoffen diesem Mangel späterhin durch eine Bearbeitung der Mathematik abzuhelfen, welche, wissenschaftlich durchgebildete Leser voraussetzend, überall die leitenden Gedanken hervorheben und die Nothwendigkeit der befolgten Methode im Einzelnen nachweisen soll. Doch bin ich überzeugt, dass auch jetzt schon jeder, welcher das vorliegende Werk gründlich und vorurteilsfrei durchmacht, jene Ansprüche als gerechtfertigt anerkennen wird. Es bleibt also nur die pädagogische Seite des Buches und seine praktische Handhabung zu besprechen.

Dass auch schon für den ersten wissenschaftlichen Unterricht in der Mathematik die möglichst strengste Methode vor jeder andern den Vorzug verdiene, werden wohl wenige bestreiten. Namentlich wird jeder Pädagog einen folgerichtigen Beweis einem in Trugschlüssen fortschreitenden oder sich im Cirkel bewegenden vorziehen, ja es wird für ihn eine moralische Unmöglichkeit sein, mit Bewusstsein einen Beweis der letztern Art den Schülern vorzutragen und sie so gewissermassen hinters Licht zu führen. Und dennoch ist diese verwerfliche Art sogenannter Beweise in den bisherigen Lehrbüchern der Arithmetik überall, wo es auf die Grundlegung und den Ausbau des Systemes ankommt, durchaus vorherrschend. Aber vielleicht findet man den VI strengen Beweis für die Fassungskraft des Schülers zu schwer. Sollte dies irgendwo der Fall sein, — was immer auf einen Fehler in der Anlage oder Behandlung des Ganzen hinweisen würde —, so wäre das einzige Auskunftsmittel, an einer solchen Stelle den Schülern den Satz bloss historisch mitzutheilen, und mit dem offenen Geständniss, dass man keinen für sie fassbaren Beweis habe finden können, auf einen solchen zu verzichten; ein Auskunftsmittel, was immer misslich ist und nur im äussersten Nothfalle anzuwenden wäre. Aber immer bleibt auch dies Auskunftsmittel noch einem Beweise vorzuziehen, der keine Beweiskraft hat, und daher dem Schüler entweder ganz unverständlich bleibt, oder ihn mit einem Scheine des Wissens betrügt, der aller Oberflächlichkeit und Unwissenschaftlichkeit Thor und Thür öffnet.

Die Mathematik in ihrer strengsten Form, in ihrer unerbittlichen Konsequenz ist allein im Stande, den Schüler vor der modischen Herrschaft der geistreichen Phrase zu bewahren und ihn im logisch folgerichtigen Denken zu üben. Dieser Zweck würde jedoch nicht erreicht werden, wenn man ohne begriffliche Entwickelung nur Formel auf Formel reihen wollte. Vielmehr müssen beide: Formelentwickelung und Begriffsentwickelung stets Hand in Hand gehen. Im Lehrbuche ist die Art, wie dies geschehen soll, an einigen Beispielen, am ausführlichsten in Nr. 17, dargestellt. Dagegen ist in der Regel der Beweis nur in Formeln mitgetheilt, und in Parenthese die Nummer des Satzes beigefügt, durch welchen die neue Formel hervorgeht. Aber es wird ohne Ausnahme vorausgesetzt, dass der Schüler bei dem Vortrage des Beweises jedesmal den Satz in Worten anführt, auf welchem die nächste Formel beruht; an schwierigeren Stellen wird er den Satz auch noch für den vorliegenden Fall zu specialisieren haben. Danach wird also der ganze Vortrag in begrifflicher Entwickelung vorschreiten, während die jedesmal hingeschriebene Formel den begrifflichen Fortschritt symbolisch darstellt. Dabei wird vorausgesetzt, dass der Schüler

den schon durchgenommenen Vorrath der Sätze sich auch gedächtnissmässig fest eingeprägt habe, so dass er bei der häuslichen Vorbereitung oder Wiederholung nur in den seltneren Fällen die beigefügten Citate nachzuschlagen nöthig hat.

Doch diese reproduktive Thätigkeit genügt noch nicht für die Erreichung jenes Zieles, der Uebung im folgerichtigen Denken. Vielmehr muss auch die Produktivität des Schülers auf diesem Gebiete angeregt, und er in den Stand gesetzt werden, auch neue Wahrheiten aufzufinden. Zu dem Ende ist zunächst die ganze Anlage des Werkes so ausgeführt, dass auch der mittelmässige Schüler, nachdem ihm nur die Natur des Beweises (ob er fortschreitend, rückschreitend, indirekt oder induktorisch sei) angedeutet wurde, ganz selbständig den Beweis führen kann, vorausgesetzt, dass er schon einen Beweis derselben Gattung kennen gelernt hat.

Ein anderes wichtiges Mittel für die Anregung der Produktivität VII bietet die heuristische Methode, welche die Sätze selbst finden lehrt. Allein diese Methode in einem Lehrbuche, was in den Händen der Schüler ist, zu Grunde zu legen, wäre ein ganz verfehltes Unternehmen. Es würde dadurch nicht nur dem Schüler die Repetition erschwert, sondern auch der Lehrer gerade in demjenigen eingeengt werden, was auf die individuellste Weise aus seiner und der Schüler besonderen Begabung und aus der gegenseitigen Beziehung beider hervorfliessen muss. Uebrigens hoffe ich, dass in dem vorliegenden Werke der Gang der Entwickelung den Grad der Durchsichtigkeit und des Parallelismus darbieten wird, dass er die richtige Heuristik überall hindurchschimmern lässt. Ein ausführliches Beispiel der heuristischen Methode ist an einem der schwierigsten Fälle in Nr. 439 gegeben worden.

In Bezug auf die Aufgaben, welche in bedeutender Anzahl theils zur Einübung des Erlernten, theils zur Weckung und Ausbildung der Erfindungsgabe in Anwendung zu bringen sind, verweise ich auf die in reichlicher Auswahl vorhandenen Aufgabensammlungen, namentlich auf die treffliche Sammlung von Heis. Es ist an den betreffenden Stellen auf die Gattung von Aufgaben, welche vor dem weiteren Fortschreiten und während desselben zu geben sind, hingewiesen worden. Ueberdies werden die Schüler durch die in Formelentwicklungen streng fortschreitende Methode des Lehrbuches so im algebraischen Rechnen geübt, dass ihnen das Lösen der Aufgaben an den betreffenden Punkten keine erheblichen Schwierigkeiten bereiten kann.

Ausser der Uebung im scharfen Erfassen und sicheren Auffinden der Wahrheit hat aber die Mathematik noch eine andere bildende

Seite, indem sie nämlich den Geist für das Ueberschauen eines wissenschaftlichen Systemes befähigen soll. Es ist jedoch fehlerhaft und erfolglos, wenn man damit schon anfangen will, ehe noch der Stoff im Einzelnen dem Schüler bekannt geworden ist; wo dann nichts anderes übrig bleibt, als ihn mit allgemeinen philosophischen Redensarten abzuspeisen, die mindestens dem Schüler unverdaulich sind, und jedenfalls das Gegentheil von dem wirken, was sie wirken sollen. Vielmehr kann jenes Ziel nur erreicht werden, einestheils durch eine leicht fassliche und strenge Systematik, die nicht nach einer äusseren Schablone zugeschnitten, sondern aus der Natur des Gegenstandes organisch erwachsen ist, andrerseits durch eine Uebersicht, welche am Schlusse das noch vereinzelt Dastehende, was einer Vereinigung entgegenstrebte, zusammenfasst und zu einem Gesamtbilde vereinigt. Dies ist in Bezug auf die elementare Arithmetik am Schlusse derselben in § 16 versucht.

Was endlich die Vertheilung des Stoffes betrifft, so zeigt schon der unmittelbare Anblick des Inhaltsverzeichnisses, dass dieser Stoff bis Prima hinauf ausreichen, und die ganz arithmetische Seite des VIII Unterrichts umfassen soll. Bei der gewöhnlichen Einrichtung der Gymnasien würden § 1—9 für Quarta und Tertia, § 10—16 für Secunda, § 17—26 für Prima zu bestimmen sein; wobei zu bemerken ist, dass § 24—26 je nach der Fähigkeit der Schüler entweder durchgenommen oder übergangen oder auch den begabteren, sei es zu eigner Belehrung, oder zu Vorträgen für die übrige Klasse überwiesen, und dass die mit einem Stern * bezeichneten Sätze bei dem ersten Vortrage übergangen werden können.

Auf den vorliegenden Theil sollen nach dem Plane des Verfassers noch zwei Theile folgen, von denen der eine die Planimetrie, der andere die Stereometrie und die beiden Trigonometrien umfassen soll.

---

§ 1.

1 **Einleitung.**

1. *Erklärung.* Mathematik (μαϑηματική) ist die Wissenschaft von der Verknüpfung der Grössen. Grösse heisst jedes Ding, welches einem andern gleich oder ungleich gesetzt werden soll. Gleich heissen zwei Dinge, wenn man in jeder Aussage statt des einen das andre setzen kann.

2. *Bezeichnung.* Die allgemeinen Zeichen der Grössen sind die Buchstaben. So oft in demselben Zusammenhange (in diesem Buche unter derselben Nummer) derselbe Buchstabe vorkommt, ist darunter

stets ein und dieselbe Grösse verstanden (es sei denn, dass ausdrücklich dem Buchstaben hernach eine andere Bedeutung beigelegt wird). Das Zeichen der Gleichheit ist $=$, das der Ungleichheit $\gtrless$.

3. *Erklärung.* Die Formel $a = b$ heisst eine Gleichung, a ihre linke, b ihre rechte Seite.

4. *Erklärung.* Jede mathematische Verknüpfung findet nur zwischen zwei Grössen statt; die Grösse, welche durch diese Verknüpfung entsteht, heisst Resultat der Verknüpfung. Das Resultat der Verknüpfung kann aufs Neue mit einer Grösse verknüpft werden. Eine Grösse a mit mehreren Grössen $b, c, \ldots$ fortschreitend verknüpfen, heisst a mit b verknüpfen, das Resultat dieser Verknüpfung mit c verknüpfen und so weiter.

5. *Bezeichnung.* Die Klammer ( ) drückt aus, dass der in ihr stehende Ausdruck eine Grösse bilden soll. Die einfachsten Verknüpfungen sind Addition (§ 2) und Subtraktion (§ 3). Das Zeichen der Addition ist $+$ (gelesen plus), das der Subtraktion $-$ (gelesen minus). Bei der Addition und Subtraktion werden die Klammern stets weggelassen, wenn die erste Grösse mit den darauf folgenden fortschreitend verknüpft werden soll.

Beispiel. $a + b + c$ bezeichnet, dass zu a die Grössen b und c fortschreitend addirt werden sollen, das heisst, dass zu a zuerst b, und zu der so erhaltenen Grösse $a + b$ die Grösse c addirt werden soll; oder es ist $a + b + c = (a + b) + c$. Dagegen bezeichnet $a + (b + c)$, dass zuerst zu b die Grösse c addirt werden soll, und dann zu a die Grösse $b + c$ addirt werden soll.

Anmerkung 1. Ein Ausdruck, welcher nur das Zeichen einer Grösse enthält, oder welcher nicht Theil eines umfassenderen Ausdruckes ist, braucht nicht mit einer Klammer umschlossen zu werden, weil sich hier von selbst ergiebt, dass der Ausdruck nur eine Grösse bilden soll.

Anmerkung 2. Beim Lesen eines mit Klammern versehenen Ausdrucks, muss man, wenn nicht Zweideutigkeit entstehen soll, stets angeben, wo eine Klammer geöffnet, und wo sie geschlossen werden soll; nur wo sich das Schliessen der Klammern von selbst versteht, wie am Ende des ganzen Ausdrucks oder vor dem Gleichheitszeichen, lässt man die Angabe über den Klammernschluss am zweckmässigsten fort. Zum Beispiel:

1) $a - (b + c) - d$ gelesen: a minus, Klammer b plus c Klammer gegeschlossen, minus d.

2) $a + (b - (c + d)) + e$ gelesen: a plus, Klammer b minus Klammer c plus d, beide Klammern geschlossen, plus e.

3) $a - (b + c) = b - (a + (b - c))$ gelesen: a minus Klammer b plus c gleich b minus Klammer a + Klammer $b - c$.

6. *Erklärung.* Die Arithmetik (ἀριθμητική) behandelt diejenigen Grössen, welche aus einer einzigen Grösse e durch Verknüpfung hervorgehen.

§ 2.

Addition.

7. *Erklärung.* Man bilde aus einer Grösse e eine Reihe von Grössen durch folgendes Verfahren: Man setze e als ein Glied der Reihe, setze $e + e$ (gelesen e plus e) als das nächstfolgende Glied der Reihe, und so fahre man fort, aus dem jedesmal letzten Gliede das nächstfolgende dadurch abzuleiten, dass man zu jenem $+ e$ hinzufügt. Ebenso setze man $e + - e$ (gelesen e plus minus e) als das dem e zunächst vorhergehende Glied der Reihe, und so fahre man fort, aus dem
3 jedesmal ersten Gliede der Reihe das nächst † vorhergehende dadurch abzuleiten, dass man zu jenem Gliede $+ - e$ hinzufügt, so erhält man eine nach beiden Seiten unendliche Reihe

$$\cdots, e + - e + - e + - e, e + - e + - e, e + - e, e, e + e, e + e + e, \cdots.$$

Wenn man in dieser Reihe jedes Glied von allen übrigen Gliedern der Reihe als verschieden annimmt, so nennt man diese Reihe die Grundreihe, e die positive Einheit, $- e$ die negative Einheit.

8—9. *Erklärung.* Wenn a irgend ein Glied der Grundreihe ist, so versteht man unter $a + e$ (auch wenn a eins der Glieder ist, welche dem Gliede e vorhergehen) das auf a zunächst folgende Glied der Reihe, und unter $a + - e$ (auch wenn a eins der Glieder ist, welche dem Gliede e folgen) das dem a zunächst vorhergehende Glied, das heisst, wenn b das auf a zunächst folgende Glied der Reihe ist, so ist

$$b = a + e, \tag{8}$$

$$a = b + - e. \tag{9}$$

Man nennt diese Verknüpfung Addition der Einheiten.

10. *Bezeichnung.* Die Summe einer positiven und einer negativen Einheit wird mit 0 (Null) bezeichnet, das heisst:

$$e + - e = 0.$$

11. *Bezeichnung.* Statt $0 + - e$ schreibt man $- e$.

$$0 + - e = - e.$$

12. *Die aus der Einheit e erzeugte Grundreihe ist demnach folgende:*

$$\cdots, -e + - e + - e, \ -e + - e, \ -e, \ 0, \ e, \ e + e, \ e + e + e, \ \cdots.$$

Die dem Gliede $- e$ vorhergehenden Glieder dieser Reihe sind Summen negativer Einheiten, die dem Gliede e folgenden Glieder der Reihe sind Summen positiver Einheiten.

Beweis. Die dem e folgenden Glieder der Grundreihe sind (nach 7) aus e durch fortschreitende Addition positiver Einheiten entstanden, also Summen positiver Einheiten. Die dem e vorhergehenden Glieder

sind aus e durch fortschreitende Addition negativer Einheiten entstanden, und zwar ist das dem e zunächst vorhergehende Glied $e + -e = 0$ (nach 10), das dem Null vorhergehende $0 + -e = -e$ (nach 11). Alle dem $-e$ vorhergehenden Glieder sind aus $-e$ durch fortschreitende Addition negativer Einheiten entstanden und sind also Summen negativer Einheiten.

13. $$a + e + -e = a.$$

Eine positive und eine negative Einheit fortschreitend addiren ändert nichts.

Beweis. Es sei b das auf a zunächst folgende Glied der Grundreihe, so ist

$$b = a + e \qquad \text{(nach 8).}$$
$$a = b + -e \qquad \text{(nach 9).}$$

Setzt man in die zweite Gleichung den Werth von b aus der ersten ein, so erhält man

$$a = a + e + -e.$$

14. $$a + -e + e = a.$$

Eine negative und eine positive Einheit fortschreitend addiren ändert nichts.

Beweis. Es sei b das dem a zunächst vorhergehende Glied der Grundreihe, so ist

$$a = b + e \qquad \text{(nach 8).}$$
$$b = a + -e \qquad \text{(nach 9).}$$

Setzt man den Werth von b aus der zweiten Gleichung in die erste ein, so erhält man

$$a = a + -e + e.$$

15. *Erklärung.* Wenn a und b beliebige Glieder der Grundreihe sind, so versteht man unter der Summe $a + b$ dasjenige Glied der Grundreihe, für welches die Formel

$$a + (b + e) = a + b + e$$

gilt. Man nennt a und b die Summanden oder Stücke der Summe $a + b$, a den ersten Summand, b den zweiten. Die Verknüpfung heisst Addition. Die Formel in Worte gefasst, giebt den Satz

Statt zu dem zweiten Summanden eine positive Einheit zu addiren, kann man sie zu der Summe addiren,

oder:

Statt zu einer Summe eine positive Einheit zu addiren, kann man sie zum zweiten Summanden addiren.

16. *Zusatz. Die Grösse $a + (b + e)$ ist das der Grösse $a + b$ zunächst folgende Glied der Grundreihe, und $a + b$ das der Grösse $a + (b + e)$ zunächst vorhergehende Glied dieser Reihe.*

Beweis. $a + (b + e)$ ist (nach 15) gleich $a + b + e$, das heisst 5 (nach 8), das auf $a + b$ zunächst folgende Glied der † Grundreihe, oder, was dasselbe ist, $a + b$ ist das der Grösse $a + (b + e)$ zunächst vorhergehende Glied dieser Reihe.

17. $$a + (b + - e) = a + b + - e.$$

Statt zu dem zweiten Summanden eine negative Einheit zu addiren, kann man sie zu der Summe addiren,
oder:

Statt zu einer Summe eine negative Einheit zu addiren, kann man sie zum zweiten Summanden addiren.

Beweis (fortschreitend).

$$a + (b + - e) = a + (b + - e) + e + - e \quad \text{(nach 13).}$$
$$= a + (b + - e + e) + - e \quad \text{(nach 15.)}$$
$$= a + b + - e \quad \text{(nach 14.)}$$

Anmerkung 1. Bei dem fortschreitenden Beweise geht man von der linken Seite der zu erweisenden Gleichung aus und sucht dieselbe nach und nach in die rechte Seite umzuwandeln, und zwar in der Regel so, dass man der linken Seite zuerst dasselbe Schlussglied zu verleihen sucht, welches die rechte hat.

Anmerkung 2. Die Nummer, welche bei einer Formel in Parenthese beigefügt ist, drückt aus, dass die Formel nach demjenigen Satze hervorgeht, welcher jene Nummer an seiner Spitze trägt. Bei der mündlichen Darstellung sind diese Nummern auszulassen, und statt dessen, ehe die neue Formel abgeleitet wird, der Wortausdruck des citirten Satzes auszusprechen, auch nöthigenfalls anzugeben, wie dieser Satz auf die zuletzt gewonnene Formel angewandt werden soll. Wenn hinter der in Parenthese gesetzten Nummer der Buchstabe b folgt, so soll dies andeuten, dass man von dem citirten Satze den zweiten Wortausdruck wählen soll. Um von der Art dieser mündlichen Darstellung ein Beispiel zu geben, lassen wir hier den Beweis des obigen Satzes in Worten ausgedrückt folgen:

Beweis in Worten. Wir gehen aus von der linken Seite der zu erweisenden Gleichung, das heisst von

$$a + (b + - e).$$

Man kann diesen Ausdruck auf die Form bringen, dass er, wie die rechte Seite, mit $+ - e$ schliesst, denn eine positive und eine negative Einheit fortschreitend addiren ändert nichts. Dann wird der obige Ausdruck

$$= a + (b + - e) + e + - e.$$

Statt zu der Summe $a + (b + - e)$ eine positive Einheit zu addiren, kann man sie zu dem zweiten Summanden addiren, also wird der Ausdruck

$$= a + (b + - e + e) + - e.$$

Eine negative und eine positive Einheit fortschreitend addiren ändert nichts; 6
dies angewandt auf den Ausdruck in der Klammer giebt den obigen Ausdruck

$$= a + b + -e.$$

Also $a + (b + -e) = a + b + -e$, das heisst:
Statt zu dem zweiten Summanden eine negative Einheit zu addiren, kann man sie zu der Summe addiren.

18. $$a + 0 = a.$$

Null addiren ändert nichts.

Beweis.
$$\begin{aligned} a + 0 &= a + (e + -e) && \text{(nach 10).} \\ &= a + e + -e && \text{(nach 17).} \\ &= a && \text{(nach 13).} \end{aligned}$$

***19.** *Eine Summe positiver oder negativer Einheiten addirt man, indem man diese Einheiten fortschreitend addirt; das heisst, wenn R eine Reihe positiver oder negativer Einheiten bedeutet, welche fortschreitend addirt werden sollen, und (R) ihre Summe, so ist*

$$a + (R) = a + R.$$

Beweis 1. Es bezeichne (R) eine Summe positiver Einheiten. Alsdann ist die Summe $a + (R)$ aus der Summe $a + e$ dadurch hervorgegangen, dass man zu dem zweiten Summanden fortschreitend positive Einheiten addirt hat; statt aber zu dem zweiten Summanden eine positive Einheit zu addiren, kann man sie zu der Summe addiren (nach 15); also statt zu dem zweiten Summanden von $a + e$ mehrere positive Einheiten fortschreitend zu addiren, kann man sie zu der Summe $a + e$ addiren, also auch statt zu a eine Summe von positiven Einheiten zu addiren, kann man diese Einheiten zu a fortschreitend addiren.

2. Ebenso ist der Beweis, wenn (R) eine Summe negativer Einheiten ist, nur dass man statt der positiven Einheiten in Beweis 1 überall die negativen setzt.

20. $$e + a = a + e.$$

Wenn einer der beiden Summanden eine positive Einheit ist, so kann man die Summanden vertauschen.

Beweis. (In Bezug auf a.) Angenommen die Formel (20) gelte für irgend eine Grösse a, so zeige ich zuerst, dass sie auch für die auf a zunächst folgende Grösse $a + e$ gelte, das heisst, dass

$$e + (a + e) = a + e + e$$ 7

sei. Es ist

$$\begin{aligned} e + (a + e) &= e + a + e && \text{(nach 15).} \\ &= a + e + e, \end{aligned}$$

da nach der Annahme für den bestimmten Werth a die Formel (20) gelten soll.

Wenn also die Formel (20) für irgend einen Werth a gilt, so gilt sie auch für den zunächst folgenden, also auch für den auf diesen zunächst folgenden Werth u. s. w., also für alle folgenden Werthe.

Zweitens zeige ich, dass unter derselben Annahme die Formel auch für den Werth gilt, welcher dem a zunächst vorhergeht, nämlich für $a + - e$, das heisst ich zeige, dass

$$e + (a + - e) = a + - e + e$$

sei. Es ist

$$\begin{aligned} e + (a + - e) &= e + a + - e \quad \text{(nach 17).} \\ &= a + e + - e \quad \text{(nach Annahme).} \\ &= a + - e + e \quad \text{(nach 13 u. 14).} \end{aligned}$$

Wenn also die Formel für irgend einen Werth a gilt, so gilt sie auch für den zunächst vorhergehenden, also auch für den Werth, welcher diesem letztern zunächst vorhergeht, also für alle dem a vorhergehenden Werthe.

Drittens. Nun gilt aber die Formel 20 für den Fall, dass $a = e$ ist. Denn dann ist

$$e + a = e + e = a + e.$$

Die Formel 20 gilt also für einen Werth, mithin nach dem ersten Theile des Beweises auch für alle folgenden Werthe, und nach dem zweiten Theile auch für alle vorhergehenden Werthe, also für alle Werthe.

Anmerkung. Beweise von der Art wie der vorstehende heissen induktorische. Sie werden im Folgenden stets in etwas abgekürzter Form dargestellt.

21. $$- e + a = a + - e.$$

Wenn einer der beiden Summanden eine negative Einheit ist, so kann man die Summanden vertauschen.

Beweis. Genau wie in 20, nur dass man $-e$ statt e, und e statt $-e$ setzt, und ebenso „folgend“ statt „vorhergehend“ und umgekehrt.

8 **22.** $$a + (b + c) = a + b + c.$$

Statt eine Summe zu addiren, kann man die Summanden fortschreitend addiren,

oder:

Statt zwei Grössen fortschreitend zu addiren, kann man ihre Summe addiren.

Beweis (induktorisch in Bezug auf c). Angenommen die Formel 22 gelte für irgend einen Werth c, so ist

$$\begin{aligned} a + [b + (c + e)] &= a + [b + c + e] && \text{(nach 15).} \\ &= a + (b + c) + e && \text{(nach 15).} \\ &= a + b + c + e && \text{(nach Annahme).} \\ &= a + b + (c + e) && \text{(nach 15b).} \end{aligned}$$

Wenn also die Formel 22 für irgend einen Werth gilt, so gilt sie auch für den zunächst folgenden, mithin für alle folgenden Werthe.

Und ebenso unter derselben Annahme ist:

$$\begin{aligned} a + [b + (c + - e)] &= a + [b + c + - e] && \text{(nach 17).} \\ &= a + (b + c) + - e && \text{(nach 17).} \\ &= a + b + c + - e && \text{(nach Annahme).} \\ &= a + b + (c + - e) && \text{(nach 17b),} \end{aligned}$$

das heisst: Wenn Formel 22 für irgend einen Werth c gilt, so gilt sie auch für den nächst vorhergehenden, mithin für alle vorhergehenden Werthe.

Nun gilt sie aber für $c = e$ (nach 15), also gilt sie auch allgemein.

23. $$a + b = b + a.$$

Man kann die beiden Stücke einer Summe vertauschen.

Beweis (induktorisch in Bezug auf b). Angenommen Formel 23 gelte für irgend einen Werth b, so ist

$$\begin{aligned} a + (b + e) &= a + b + e && \text{(nach 15).} \\ &= b + a + e && \text{(nach Annahme).} \\ &= b + (a + e) && \text{(nach 15b).} \\ &= b + (e + a) && \text{(nach 20).} \\ &= b + e + a && \text{(nach 22),} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} a + (b + - e) &= a + b + - e && \text{(nach 17).} \\ &= b + a + - e && \text{(nach Annahme).} \\ &= b + (a + - e) && \text{(nach 17b).} \\ &= b + (- e + a) && \text{(nach 21).} \\ &= b + - e + a && \text{(nach 22),} \end{aligned}$$

das heisst: Wenn Formel 23 für irgend einen Werth b gilt, so gilt sie auch für alle folgenden und für alle vorhergehenden Werthe. Nun gilt sie aber für den Werth e, denn

$$a + e = e + a \qquad \text{(nach 20).}$$

also gilt sie allgemein.

24. $$a + b + c = a + c + b.$$

Die Ordnung, in welcher man fortschreitend addirt, ist gleichgültig für das Resultat.

Beweis. $a + b + c = a + (b + c)$ (nach 22b).
$= a + (c + b)$ (nach 23).
$= a + c + b$ (nach 22).

25. $0 + a = a + 0 = a.$

Null als Summand ändert nichts.

Beweis. $0 + a = a + 0$ (nach 23).
$= a + (e + - e)$ (nach 10).
$= a + e + - e$ (nach 22).
$= a$ (nach 13).

26. *Zu je zwei Grössen a und b der Grundreihe giebt es eine dritte Grösse x der Grundreihe, welche zu der ersten addirt die zweite giebt, das heisst so, dass*

$$b = a + x$$

sei.

Beweis (induktorisch in Bezug auf b). Angenommen, der Satz gelte für irgend einen Werth b, so gilt er auch für den auf b zunächst folgenden Werth. Denn, wenn x eine Grösse der Grundreihe, und

$$b = a + x$$

ist, so ist

$b + e = a + x + e$ (nach Annahme).
$= a + (x + e)$ (nach 22b),

folglich giebt es auch eine Grösse der Grundreihe, (nämlich $x + e$), welche zu a addirt $b + e$ giebt; das heisst, der Satz gilt unter dieser Annahme auch für $b + e$.

Ferner

$b + - e = a + x + - e$ (nach Annahme).
$= a + (x + - e)$ (nach 22b),

das heisst: Der Satz gilt unter derselben Annahme auch für $b + - e$.

10 Also, wenn der Satz für irgend einen Werth b gilt, so gilt er er auch für jeden vor b vorhergehenden Werth.

Nun gilt aber die Formel für $b = a$, denn dann ist

$b = a = a + 0$ (nach 25)

also gilt der Satz allgemein.

27. Hypothesis (ὑπόθεσις) $a + b = a + c.$
Thesis (θέσις) $b = c.$

Zwei Grössen (b und c), welche zu derselben Grösse (a) addirt, gleiche Summen liefern, sind einander gleich.

Beweis (fortschreitend). Um b mit Anwendung der Hypothesis in c umwandeln zu können, muss man zunächst b so umwandeln, dass

sein Werth derselbe bleibt, aber a als Stück eines zweiten Summanden hinzutritt, das heisst, man muss zu b eine Grösse $a + x$, welche Null ist, addiren.

Nun giebt es nach 26 stets eine Grösse x von der Art, dass

$$* \qquad a + x = 0$$

ist. Dann ist

$$\begin{aligned} b &= b + 0 && \text{(nach 25).} \\ &= b + (a + x) && \text{(nach *).} \\ &= b + a + x && \text{(nach 22).} \\ &= a + b + x && \text{(nach 23).} \\ &= a + c + x && \text{(nach Hypothesis).} \\ &= a + x + c && \text{(nach 24).} \\ &= 0 + c && \text{(nach *).} \\ &= c && \text{(nach 25).} \end{aligned}$$

§ 3.

Subtraktion.

28. *Erklärung.* Unter dem Unterschiede (Differenz, Rest) $a - b$, versteht man diejenige Grösse der Grundreihe, zu welcher b addirt a giebt, das heisst

$$a - b + b = a.$$

Eine Grösse fortschreitend subtrahiren und addiren ändert nichts.

Man nennt a den Minuend, b den Subtrahend des Unterschiedes $a - b$; b von a subtrahiren, heisst den Unterschied $a - b$ bilden.

29. $$a + b - b = a. \qquad 11$$

Eine Grösse fortschreitend addiren und subtrahiren ändert nichts.

Beweis (durch Gleichungen). Um dies zu beweisen, geht man auf den umgekehrten Satz (28) zurück, indem man zu $a + b$ fortschreitend b subtrahirt und addirt. Dann erhält man die Gleichung

$$a + b - b + b = a + b \qquad \text{(nach 28).}$$

Man kann die beiden Stücke einer Summe vertauschen. Dies angewandt auf beide Seiten obiger Gleichung giebt:

$$b + (a + b - b) = b + a \qquad \text{(nach 23).}$$

Zwei Grössen $a + b - b$ und a, welche zu derselben Grösse b addirt, gleiche Summen liefern, sind einander gleich, also:

$$a + b - b = a \qquad \text{(nach 27).}$$

30. $a + (b - c) = a + b - c.$

Statt von dem zweiten Summanden eine Grösse zu subtrahiren, kann man sie von der Summe subtrahiren

oder:

Statt von einer Summe eine Grösse zu subtrahiren, kann man sie von dem zweiten Summanden subtrahiren.

Beweis. $a + (b - c) = a + (b - c) + c - c$ (nach 29).

$= a + (b - c + c) - c$ (nach 22b).

$= a + b - c$ (nach 28).

31. $a - (b + c) = a - b - c.$

Statt eine Summe zu subtrahiren, kann man die Summanden fortschreitend subtrahiren

oder:

Statt zwei Grössen fortschreitend zu subtrahiren, kann man ihre Summe subtrahiren.

Beweis (rückschreitend):

$a - b - c = a - b - c + (b + c) - (b + c)$ (nach 29).

$= a - b - c + (c + b) - (b + c)$ (nach 23).

$= a - b - c + c + b - (b + c)$ (nach 22).

$= a - b + b - (b + c)$ (nach 28).

$= a - (b + c)$ (nach 28).

Anmerkung. Rückschreitend heisst der Beweis, wenn man die rechte Seite der zu erweisenden Gleichung nach und nach in die linke umwandelt.

32. $a - (b - c) = a - b + c.$

12 *Statt einen Unterschied zu subtrahiren, kann man † fortschreitend seinen Minuend subtrahiren und seinen Subtrahend addiren*

oder:

Statt fortschreitend eine Grösse zu subtrahiren und eine zweite zu addiren, kann man den Unterschied der ersten und zweiten subtrahiren.

Beweis. $a - (b - c) = a - (b - c) - c + c$ (nach 28).

$= a - (b - c + c) + c$ (nach 31b).

$= a - b + c$ (nach 28).

33. $a - b - c = a - c - b.$

Die Ordnung, in welcher man fortschreitend subtrahirt, ist gleichgültig für das Resultat.

Beweis. $a - b - c = a - (b + c)$ (nach 31b).

$= a - (c + b)$ (nach 23).

$= a - c - b$ (nach 31).

34. $a + b - c = a - c + b.$

Die Ordnung, in welcher man fortschreitend eine Grösse addirt und eine andere subtrahirt, ist gleichgültig für das Resultat.

Beweis. $a + b - c = a + b - c - b + b$ (nach 28).
$= a + b - b - c + b$ (nach 33).
$= a - c + b$ (nach 29).

35. $a - 0 = a.$

Null subtrahiren ändert nichts.

Beweis. $a - 0 = a - 0 + 0$ (nach 25).
$= a$ (nach 28).

36. $a - a = 0.$

Der Unterschied zweier gleicher Grössen ist null.

Beweis. $a - a = 0 + (a - a)$ (nach 25).
$= 0 + a - a$ (nach 30).
$= 0$ (nach 29).

37. 38. Bezeichnung. Statt $0 - a$ kann man $-a$ schreiben und statt a kann man auch $+a$ schreiben. Man nennt $+a$ und $-a$ bezeichnete Grössen und zwar $+a$ und $+b$ und ebenso $-a$ und $-b$ gleichbezeichnete Grössen, $+a$ und $-b$ ungleichbezeichnete.

(37) $0 - a = -a.$

(38) $+a = a.$

39. $a + (-b) = a - b.$

Statt plus minus kann man minus setzen.

Beweis. $a + - b = a + (0 - b)$ (nach 37). 13
$= a + 0 - b$ (nach 30).
$= a - b$ (nach 25).

40. $a - - b = a + b$, und $- - b = b.$

Statt minus minus kann man plus setzen.

Beweis. 1) $a - - b = a - (0 - b)$ (nach 37).
$= a - 0 + b$ (nach 32).
$= a + b$ (nach 35).
2) $- - b = 0 - - b$ (nach 37).
$= 0 + b$ (nach Bew. 1).
$= b$ (nach 25).

41. $-a + -b = -a - b = -(a + b).$

Zwei mit minus bezeichnete Grössen addirt man, (oder fügt man

zusammen), indem man die zeichenlosen Grössen addirt und der Summe das minus-Zeichen vorsetzt.

Beweis.
$$-a+-b=-a-b \quad \text{(nach 39).}$$
$$=0-a-b \quad \text{(nach 37).}$$
$$=0-(a+b) \quad \text{(nach 31b).}$$
$$=-(a+b) \quad \text{(nach 37).}$$

42. *Zwei ungleichbezeichnete Grössen addirt man, indem man die zeichenlosen Grössen von einander subtrahirt und dem Reste dasjenige Zeichen vorsetzt, was die zum Minuend gemachte Grösse hatte,* das heisst
$$a+-b=a-b.$$
$$=-b+a=-(b-a).$$

Beweis.
$$a+-b=a-b \quad \text{(nach 39).}$$
$$a+-b=-b+a \quad \text{(nach 23).}$$
$$=0-b+a \quad \text{(nach 37).}$$
$$=0-(b-a) \quad \text{(nach 32b).}$$
$$=-(b-a) \quad \text{(nach 37).}$$

***43.** *Erklärung.* Ein Ausdruck, in welchem die Grössen fortschreitend durch plus oder minus verknüpft sind, heisst ein Polynom (Binom u. s. w.), jene einzelnen Grössen mit ihren Vorzeichen die Glieder (νόμοι) des Polynoms. Dem ersten Gliede kann man, wenn es kein Vorzeichen hat, das $+$Zeichen vorsetzen. So zum Beispiel ist $a+(b+c)-d$ ein Polynom aus drei Gliedern, und zwar ist a (oder $+a$) sein erstes, $+(b+c)$ sein zweites, $-d$ sein drittes Glied.

14 ***44—46.** In einem Polynom kann man beliebige zwei auf einander folgende Glieder vertauschen, das heisst

$$(44) \quad \cdots+a+b\cdots=\cdots+b+a\cdots$$
$$(45) \quad \cdots+a-b\cdots=\cdots-b+a\cdots$$
$$(46) \quad \cdots-a-b\cdots=\cdots-b-a\cdots,$$

wo die Punkte bedeuten sollen, dass beliebig viele Glieder vorhergehen und folgen können. (Wenn kein Glied vorhergeht, so kann man nach 25 und 37 als vorhergehendes Glied Null setzen.)

Beweis.
$$\cdots+a+b\cdots=\cdots+b+a\cdots \quad \text{(nach 24).}$$
$$\cdots+a-b\cdots=\cdots-b+a\cdots \quad \text{(nach 34).}$$
$$\cdots-a-b\cdots=\cdots-b-a\cdots \quad \text{(nach 33).}$$

47. *Die Ordnung der Glieder eines Polynoms ändert seinen Werth nicht.*

Beweis. Da man (nach 44—46) jedes Glied des Polynoms mit dem nächst vorhergehenden oder nächstfolgenden Gliede desselben vertauschen kann, so kann man jedes Glied des Polynoms, indem man es wiederholt mit dem nächstfolgenden Gliede vertauscht, auf jede folgende Stelle, und indem man es wiederholt mit dem nächst vorhergehenden Gliede vertauscht, auf jede vorhergehende, also auf jede Stelle bringen, also die Glieder in jede Ordnung versetzen, ohne den Werth des Polynoms zu ändern.

***48.** *Statt ein Polynom zu addiren, kann man die Glieder desselben fortschreitend hinzufügen,*
oder
Statt die Glieder eines Polynoms fortschreitend hinzuzufügen, kann man das Polynom addiren, das heisst:

$$\cdots + (P) = \cdots P,$$

wo (P) ein Polynom und P die fortschreitend hinzugefügten Glieder desselben bedeutet, wobei man jedoch dem ersten Gliede, wenn es kein Vorzeichen hat, (nach 38) das plus-Zeichen vorsetzt.

Beweis. 1) Es sei (P) ein Binom, so ist

$$a + (b + c) = a + b + c \quad \text{(nach 22).}$$
$$a + (b - c) = a + b - c \quad \text{(nach 30).}$$

Ferner ist

$$a + (-b + c) = a + -b + c \quad \text{(nach 22).}$$
$$= a - b + c \quad \text{(nach 39).}$$
$$a + (-b - c) = a + -b - c \quad \text{(nach 30).}$$ 15
$$= a - b - c \quad \text{(nach 39).}$$

Geht der plus-Klammer keine Grösse vorher, so kann man (nach 25) Null als erstes Glied hinzufügen, das heisst, in den obigen Formeln $a = 0$ setzen; und kann dann in den Schlussformeln wieder (nach 25 und 37) die Null weglassen.

Beweis 2. Ist (P) ein Polynom aus mehr als zwei Gliedern, so stelle man alle nach Nr. 5 ausgelassenen Klammern des Polynoms wieder her; diese beginnen nach Nr. 5 alle mit dem ersten Gliede des Polynoms, also in unserm Falle unmittelbar nach dem vorstehenden $+$Zeichen, und jede umschliesst nur zwei Grössen. Folglich kann man nach Beweis 1 zuerst die äussere Klammer, da sie nur zwei Grössen umschliesst und eine plus-Klammer ist, weglassen; aus gleichem Grunde kann man alsdann die Klammer weglassen, welche jetzt äussere Klammer geworden ist und mit der ersten Grösse des Polynoms beginnt, und so fort, bis alle diese Klammern verschwunden sind.

Beispiel des Beweises für vier Glieder:

$$\cdots + (b + c + d + e) = \cdots + ([(b + c) + d] + e) \quad \text{(nach 5).}$$
$$= \cdots + [(b + c) + d] + e \quad \text{(nach Bew. 1).}$$
$$= \cdots + (b + c) + d + e \quad \text{(nach 5).}$$
$$= \cdots + b + c + d + e \quad \text{(nach 5).}$$

***49.** *Statt ein Polynom zu subtrahiren, kann man die Zeichen aller Glieder desselben umkehren, und die so erhaltenen Glieder fortschreitend hinzufügen,*

oder:

Statt die Glieder eines Polynoms fortschreitend hinzuzufügen, kann man die Zeichen derselben umkehren und das so erhaltene Polynom subtrahiren, das heisst

$$\cdots - (P) = \cdots P',$$

wo (P) ein Polynom und P' die fortschreitende Reihe der Glieder bedeutet, welche aus dem Polynom (P) dadurch hervorgeht, dass man die Zeichen aller Glieder desselben umkehrt.

Beweis 1. Es sei (P) ein Binom, so ist

$$a - (b + c) = a - b - c \quad \text{(nach 31).}$$
$$a - (b - c) = a - b + c \quad \text{(nach 32).}$$

Ferner

$$a - (-b + c) = a - - b - c \quad \text{(nach 31).}$$
$$= a + b - c \quad \text{(nach 40).}$$

16

$$a - (-b - c) = a - - b + c \quad \text{(nach 32).}$$
$$= a + b + c \quad \text{(nach 40).}$$

Geht der minus-Klammer keine Grösse vorher, so kann man (nach 37) zuerst 0 als erstes Glied hinzufügen, und zuletzt wieder (nach 25 und 37) weglassen.

Beweis 2. Es sei (P) ein Polynom aus mehr als zwei Gliedern, so verfahre man wie bei Beweis 2 des vorigen Satzes; alsdann kehrt sich bei der Auflösung derjenigen Klammer, welche jedesmal die äussere ist, zuerst das Vorzeichen des letzten Gliedes des Polynoms um (nach Beweis 1), dann das des vorletzten u. s. w. bis zum zweiten Gliede des Polynoms.

Beispiel des Beweises für vier Glieder:

$$a - (b - c + d - e) = a - ([(b - c) + d] - e) \quad \text{(nach 5).}$$
$$= a - [(b - c) + d] + e \quad \text{(nach Bew. 1).}$$
$$= a - (b - c) - d + e \quad \text{(nach 31).}$$
$$= a - b + c - d + e \quad \text{(nach 32).}$$

***50.** *Alle Verknüpfungs-Sätze, welche für die Einheit e gelten, gelten auch noch, wenn man statt der Einheit e eine beliebige Grösse der Grundreihe setzt.*

Beweis. Die Verknüpfungs-Sätze, in welchen e vorkommt, sind in Nr. 10, 11, 13, 14, 15, 17, 20 und 21 enthalten. Nun ist

$$a + -a = a - a \qquad \text{(nach 39).}$$
$$= 0 \qquad \text{(nach 36),}$$

das heisst, die Formel 10 gilt auch, wenn man a statt e setzt; ferner

$$0 + -a = 0 - a \qquad \text{(nach 39).}$$
$$= -a \qquad \text{(nach 37),}$$

das heisst, auch Formel 11 gilt in dieser Erweiterung.

Ferner findet sich die Erweiterung von Nr. 13 in Nr. 29, die von Nr. 14 in Nr. 28, die von Nr. 15 und 17 in Nr. 22 und die von Nr. 20 und 21 in Nr. 23.

***51.** *Wenn man aus einer von Null verschiedenen Grösse E der Grundreihe eine Reihe von Grössen auf dieselbe Weise ableitet, wie aus e die Grundreihe abgeleitet war, so ist auch in der so erhaltenen Reihe jedes Glied von allen übrigen verschieden.*

Beweis. Es sei A ein auf B folgendes Glied der aus E erzeugten Reihe, so heisst das (nach 8), es geht B aus A durch † fortschreitende 17 Addition von Grössen E hervor. Da nun E ungleich 0 ist, so ist es (nach 12) entweder gleich $+e$ oder gleich $-e$ oder eine Summe von positiven Einheiten oder eine Summe von negativen Einheiten. Statt nun eine Summe von zwei oder mehr Grössen zu addiren, kann man (nach 48) diese Grössen fortschreitend addiren, also geht B aus A entweder dadurch hervor, dass man fortschreitend positive oder fortschreitend negative Einheiten hinzuaddirt hat, das heisst (nach 8, 9) B ist entweder eine auf A folgende Grösse der Grundreihe, oder eine vor A vorhergehende Grösse derselben, folglich (nach 7) von A verschieden.

Anmerkung. Entwickelt man also aus einer beliebigen von Null verschiedenen Grösse E, welche der Grundreihe angehört, eine Grössenreihe R nach dem Verfahren in Nr. 7, so kann man die Grösse E als Einheit und die Grössenreihe R als Grundreihe setzen, und gelten dann für diese neue Einheit und diese neue Grundreihe alle bisher aufgestellten Sätze.

§ 4.

Multiplikation.

52. *Erklärung.* Unter $a \,.\, 1$ (gelesen a mal Eins oder a multiplicirt mit Eins) versteht man die Grösse a selbst, das heisst

$$(52) \qquad a \,.\, 1 = a.$$

Mit Eins multipliciren ändert nichts.

53. *Erklärung.* Eine Grundreihe, deren Einheit gleich Eins ist, heisst Zahlreihe, die Glieder derselben Zahlen, die Zahl $1 + 1$ wird mit 2 bezeichnet, die Zahl $2 + 1$ mit 3 u. s. w.

$$(53) \qquad \begin{cases} 1 + 1 = 2. \\ 2 + 1 = 3. \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{cases}$$

Anmerkung. Da die Zahlreihe eine Grundreihe ist, und die Gesetze der Addition und Subtraktion für jede Grundreihe gelten, so gelten sie auch für die Zahlen.

54. *Erklärung.* Die der 0 folgenden Zahlen der Zahlreihe heissen positive Zahlen, die der 0 vorhergehenden negative. Wenn a eine positive Zahl ist, so heissen die Zahlen a und $-a$ einander entgegengesetzt, und heisst a der positive Werth von $-a$.

55. Die Zahlreihe ist

$$\cdots | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | \cdots$$

18 und jede negative Zahl derselben ist einer positiven entgegengesetzt.

Beweis. Es sei a irgend eine Zahl der Zahlreihe, so ist die nächstfolgende Zahl derselben (nach 8) gleich $a + 1$, da die Einheit der Zahlreihe gleich 1 ist; also ist die auf 1 folgende Zahl $1 + 1$, das heisst 2 (nach 53), die auf 2 folgende $2 + 1$, das heisst 3 (nach 53) u. s. w. Die der 1 nächst vorhergehende Zahl ist 0 (nach 10), die der 0 nächst vorhergehende -1 (nach 11), also der 1 entgegengesetzt. Ist nun irgend eine negative Zahl einer positiven (a) entgegengesetzt, so gilt dies auch für die nächst vorhergehende negative Zahl; denn die der Zahl $-a$ vorhergehende ist (nach 9) $-a + -1 = -(a + 1)$ (nach 41), das heisst gleichfalls einer positiven entgegengesetzt. Wenn also irgend eine negative Zahl einer positiven entgegengesetzt ist, so ist auch die nächst vorhergehende, also auch jede vorhergehende einer positiven entgegengesetzt. Nun ist -1 einer positiven Zahl entgegengesetzt, also gilt dasselbe auch für alle vorhergehenden, also für alle negativen Zahlen. Da ferner die der Zahl $-a$ vorhergehende Zahl $= -(a + 1)$ ist, wie bewiesen, so ist die der Zahl -1 vorhergehende $= -(1 + 1) = -2$ (nach 53), und die der -2 vorhergehende $= -(2 + 1) = -3$ (nach 53) u. s. w.

56—58. *Erklärung.* Die Multiplikation mit den übrigen Zahlen (ausser 1), wird durch folgende Formeln bestimmt:

$$(56) \qquad a \, . \, (\beta + 1) = a\beta + a,$$

wo β eine positive Zahl ist.

$$(57) \qquad a \, . \, 0 = 0.$$

$$(58) \qquad a \, . \, (-\beta) = -(a\beta),$$

wo β eine positive Zahl ist. Man nennt $a \,.\, \beta$ (gelesen a mal β, oder a multiplicirt mit β) ein Produkt, a seinen Multiplikand, β seinen Multiplikator, beide zusammen Faktoren des Produktes. Auch kann man statt $a \,.\, \beta$ schreiben $a\beta$; dies ist jedoch dann nicht gestattet, wenn beide Faktoren in Ziffern geschrieben sind (also nicht 23 statt 2 . 3).

Die Formeln in Worten:

(56). *Statt zu einem positiven Multiplikator eine Eins zu addiren, kann man zu dem Produkte den Multiplikand addiren.*

(57). *Jede Zahl giebt mit Null multiplicirt Null.* 19

(58). *Statt mit einer negativen Zahl zu multipliciren, kann man mit ihrem positiven Werthe multipliciren und dem Produkte das Minus-Zeichen vorsetzen.*

59. *Bezeichnung.* Bei der Multiplikation lässt man die Klammern fort, wenn die erste Grösse mit den folgenden fortschreitend multiplicirt werden soll. Ferner wenn ein Produkt Glied eines Polynoms ist, so lässt man die Klammer, welche das Produkt umschliesst, aus; zum Beispiel bedeutet abc, dass a mit b und das Produkt mit c multiplicirt werden soll, also gleich $(ab)c$. Ferner bedeutet $ab - cd$, dass a mit b und c mit d multiplicirt und das Produkt cd von dem Produkt ab subtrahirt werden soll, also gleich $(ab) - (cd)$.

Anmerkung. In 58 konnte man also statt $-(a\beta)$ auch schreiben $-a\beta$.

60. *Das Produkt $a\beta$ ist eine Grösse, welche derselben Grundreihe angehört, wie der Multiplikand a.*

Beweis 1 (induktorisch in Bezug auf β). Angenommen, der Satz gelte für irgend eine positive Zahl β, das heisst, es gehöre $a\beta$ derselben Grundreihe an wie a, so ist

$$a \,.\, (\beta + 1) = a\beta + a \qquad \text{(nach 56)},$$

also eine Summe zweier Grössen, die derselben Grundreihe angehören, also gehört auch die Summe derselben Grundreihe an (nach 15). Wenn also der Satz für irgend eine positive Zahl β gilt, so gilt er auch für die nächstfolgende, also für alle folgenden. Nun gilt er für $\beta = 1$, denn

$$a \,.\, 1 = a \qquad \text{(nach 52)}.$$

Folglich gilt er für 1 und alle folgenden Zahlen der Zahlreihe, das heisst für alle positive Zahlen.

2. Der Satz gilt für $\beta = 0$, denn

$$a \,.\, 0 = 0 \qquad \text{(nach 57)}.$$

3. Der Satz gilt für jede negative Zahl, denn wenn γ ihr positiver Werth also $\beta = -\gamma$ ist, so ist

$$a \,.\, \beta = a \,.\, (-\gamma) = -(a\gamma) \qquad \text{(nach 58).}$$

Da nun (nach Beweis 1) $a\gamma$ der Grundreihe von a angehört, so gehört auch $-(a\gamma)$, das heisst $0 - a\gamma$ ihr an (nach 28), also auch $a\beta$.

Anmerkung. Dasselbe gilt, wenn eine Grösse a mit mehreren Grössen fortschreitend multiplicirt wird.

20 **61.** *Zusatz.* Für Produkte gelten daher alle Gesetze der Addition und Subtraktion.

62. Es ist allgemein (auch wenn β negativ oder null ist)

$$a(\beta + 1) = a\beta + a.$$

Statt zum Multiplikator eine Eins zu addiren, kann man zum Produkte den Multiplikand addiren, .
oder:

Statt zu einem Produkte den Multiplikand zu addiren, kann man zum Multiplikator eine Eins addiren.

Beweis 1. Wenn β eine positive Zahl ist, so gilt der Satz (nach 56).

2. Wenn $\beta = 0$ ist, so ist

$$\begin{aligned} a \,.\, (0 + 1) &= a \,.\, 1 && \text{(nach 25).} \\ &= a && \text{(nach 52).} \\ &= 0 + a && \text{(nach 25).} \\ &= a \,.\, 0 + a && \text{(nach 57).} \end{aligned}$$

3. Wenn $\beta = -1$ ist, so erhält man

$$\begin{aligned} a(-1 + 1) &= a(0 - 1 + 1) && \text{(nach 37).} \\ &= a \,.\, 0 && \text{(nach 28).} \\ &= 0 && \text{(nach 57).} \\ &= 0 - a + a && \text{(nach 28).} \\ &= -a + a && \text{(nach 37).} \\ &= -(a \,.\, 1) + a && \text{(nach 52).} \\ &= a \,.\, (-1) + a && \text{(nach 58).} \end{aligned}$$

4. Wenn β eine Zahl ist, die der -1 in der Zahlreihe vorangeht, so ist auch die auf β zunächst folgende Zahl noch negativ; der positive Werth dieser letzteren sei γ, sie selbst also $-\gamma$, so ist β die ihr vorhergehende Zahl, also

$$\beta = -\gamma + -1 \qquad \text{(nach 9).}$$

Also

$$
\begin{aligned}
a(\beta + 1) &= a(-\gamma + -1 + 1) && \text{(nach *).}\\
&= a(-\gamma) && \text{(nach 14).}\\
&= -a\gamma && \text{(nach 58).}\\
&= -a\gamma - a + a && \text{(nach 28).}\\
&= -(a\gamma + a) + a && \text{(nach 41).}\\
&= -[a(\gamma + 1)] + a && \text{(nach 62b).}\\
&= a[-(\gamma + 1)] + a && \text{(nach 58).}\\
&= a[-\gamma + -1] + a && \text{(nach 41).}\\
&= a\beta + a && \text{(nach *).}
\end{aligned}
$$

63. $$a(\beta - 1) = a\beta - a. \qquad 21$$

Statt vom Multiplikator eine Eins zu subtrahiren, kann man vom Produkte den Multiplikand subtrahiren,

oder:

Statt von einem Produkte den Multiplikand zu subtrahiren, kann man vom Multiplikator eine Eins subtrahiren.

Beweis.

$$
\begin{aligned}
a(\beta - 1) &= a(\beta - 1) + a - a && \text{(nach 29).}\\
&= a(\beta - 1 + 1) - a && \text{(nach 62b).}\\
&= a\beta - a && \text{(nach 28).}
\end{aligned}
$$

64. *Erklärung.* Wenn a eine Grösse der aus $e \gtrless 1$ erzeugten Grundreihe und $a = e\alpha$ ist, so nennt man a eine benannte Grösse, e ihre Einheit, α ihren Zahlwerth.

65. *Jede Grösse a einer Grundreihe lässt sich als Produkt der Einheit e dieser Grundreihe und einer Zahl, also in der Form $e\alpha$ darstellen; und zwar ist α positiv, negativ, oder* 0, *je nachdem a in der Grundreihe dem Gliede* 0 *folgt, vorangeht, oder selbst null ist.*

Beweis (induktorisch). 1. Wenn $a = 0$ ist, so ist

$$a = 0 = e \, . \, 0 \qquad \text{(nach 57).}$$

also Produkt der Einheit e und der Zahl Null.

2. Angenommen der Satz gelte für $a = 0$, oder irgend eine auf 0 folgende Grösse a, so dass $a = e\alpha$ und α null oder positiv ist, so ist

$$a + e = e\alpha + e = e(\alpha + 1) \qquad \text{(nach 62b),}$$

das heisst, der Satz gilt auch für das nächstfolgende Glied, also, da er für $a = 0$ gilt (Theil 1), auch für jedes auf 0 folgende Glied.

3. Angenommen der Satz gelte für $a = 0$ oder irgend eine der Null vorhergehende Grösse a, so dass $a = e\alpha$ und α null oder negativ ist, so ist

$$a - e = e\alpha - e = e(\alpha - 1) \qquad \text{(nach 63b)}$$

das heisst, der Satz gilt auch für das nächst vorhergehende Glied, also da er für $a = 0$ gilt (Theil 1), auch für jedes der Null vorhergehende Glied der Grundreihe.

66. $$a(\beta + \gamma) = a\beta + a\gamma.$$

Mit einer Summe multiplicirt man, indem man mit den Summanden einzeln multiplicirt und die Produkte addirt,

oder:

Produkte von gleichem Multiplikand addirt man, indem man die Multiplikatoren addirt und den Multiplikand unverändert lässt.

22 *Beweis* (induktorisch in Bezug auf γ).

1. Angenommen die Formel (66) gelte für irgend eine Zahl γ, so ist

$$\begin{aligned} a[\beta + (\gamma + 1)] &= a[\beta + \gamma + 1] && \text{(nach 22).} \\ &= a(\beta + \gamma) + a && \text{(nach 62).} \\ &= a\beta + a\gamma + a && \text{(nach Annahme).} \\ &= a\beta + (a\gamma + a) && \text{(nach 22b).} \\ &= a\beta + a(\gamma + 1) && \text{(nach 62b),} \end{aligned}$$

das heisst, wenn die Formel für irgend einen Zahlwerth γ gilt, so gilt sie auch für den nächstfolgenden, also für alle folgenden.

2. Unter derselben Annahme ist

$$\begin{aligned} a[\beta + (\gamma - 1)] &= a[\beta + \gamma - 1] && \text{(nach 30).} \\ &= a(\beta + \gamma) - a && \text{(nach 63).} \\ &= a\beta + a\gamma - a && \text{(nach Annahme).} \\ &= a\beta + (a\gamma - a) && \text{(nach 30b).} \\ &= a\beta + a(\gamma - 1) && \text{(nach 63b),} \end{aligned}$$

das heisst, die Formel gilt dann auch für den nächst vorhergehenden, also für alle vorhergehenden Werthe.

3. Nun gilt aber die Formel (66) für $\gamma = 1$, denn

$$a(\beta + 1) = a\beta + a \qquad \text{(nach 62),}$$

also gilt sie nun auch allgemein.

67. $$a(\beta - \gamma) = a\beta - a\gamma.$$

Mit einer Differenz multiplicirt man, indem man mit den Gliedern einzeln multiplicirt und die Produkte entsprechend subtrahirt,

oder

Produkte von gleichem Multiplikand subtrahirt man, indem man die Multiplikatoren entsprechend subtrahirt und den Multiplikand unverändert lässt.

Beweis (fortschreitend).

$$a(\beta - \gamma) = a(\beta - \gamma) + a\gamma - a\gamma \qquad \text{(nach 29).}$$
$$= a(\beta - \gamma + \gamma) - a\gamma \qquad \text{(nach 66b).}$$
$$= a\beta - a\gamma \qquad \text{(nach 28).}$$

68. $$(a + b)\gamma = a\gamma + b\gamma.$$

Statt eine Summe mit einer Zahl zu multipliciren, kann man die Summanden mit dieser Zahl multipliciren und die Produkte addiren, oder:

Produkte von gleichem Multiplikator addirt man, indem man die Multiplikanden addirt und den Multiplikator unverändert lässt.

Beweis (induktorisch in Bezug auf γ). Angenommen, der Satz 23 gelte für irgend einen Zahlwerth γ, so ist

$$(a + b)(\gamma + 1) = (a + b)\gamma + (a + b) \qquad \text{(nach 62).}$$
$$= a\gamma + b\gamma + (a + b) \qquad \text{(nach Annahme).}$$
$$= a\gamma + b\gamma + a + b \qquad \text{(nach 22).}$$
$$= a\gamma + a + b\gamma + b \qquad \text{(nach 24).}$$
$$= a\gamma + a + (b\gamma + b) \qquad \text{(nach 22b).}$$
$$= a(\gamma + 1) + b(\gamma + 1) \qquad \text{(nach 62b).}$$

Also gilt der Satz dann auch für alle auf γ folgenden Werthe.

Unter derselben Annahme ist

$$(a + b)(\gamma - 1) = (a + b)\gamma - (a + b) \qquad \text{(nach 63).}$$
$$= a\gamma + b\gamma - (a + b) \qquad \text{(nach Annahme).}$$
$$= a\gamma + b\gamma - a - b \qquad \text{(nach 31).}$$
$$= a\gamma - a + b\gamma - b \qquad \text{(nach 34).}$$
$$= a\gamma - a + (b\gamma - b) \qquad \text{(nach 30b).}$$
$$= a(\gamma - 1) + b(\gamma - 1) \qquad \text{(nach 63b),}$$

das heisst, der Satz gilt dann auch für alle dem γ vorhergehenden Werthe.

Nun gilt er aber für $\gamma = 1$; denn

$$(a + b)1 = a + b \qquad \text{(nach 52).}$$
$$= a.1 + b.1 \qquad \text{(nach 52).}$$

Mithin gilt der Satz für $\gamma = 1$, also nach dem ersten Theile des Beweises auch für alle folgenden und nach dem zweiten für alle vorhergehenden Werthe, also allgemein.

69. $$(a - b)\gamma = a\gamma - b\gamma.$$

Statt eine Differenz mit einer Zahl zu multipliciren, kann man die Glieder mit dieser Zahl multipliciren und die Produkte entsprechend subtrahiren, oder:

Produkte von gleichem Multiplikator subtrahirt man, indem man die Multiplikanden entsprechend subtrahirt und den Multplikator unverändert lässt.

Beweis (fortschreitend):

$$(a - b)\gamma = (a - b)\gamma + b\gamma - b\gamma \qquad \text{(nach 29).}$$
$$= (a - b + b)\gamma - b\gamma \qquad \text{(nach 68b).}$$
$$= a\gamma - b\gamma \qquad \text{(nach 28).}$$

70. $$a(\beta\gamma) = a\beta\gamma.$$

Statt mit einem Produkt zu multipliciren, kann man mit seinen Faktoren fortschreitend multipliciren,

oder:

24 *Statt mit zwei Zahlen fortschreitend zu multipliciren, kann man mit ihrem Produkte multipliciren.*

Beweis (induktorisch in Bezug auf γ).

1. Angenommen, die Formel gelte für irgend einen Zahlwerth γ, so ist

$$a[\beta(\gamma + 1)] = a[\beta\gamma + \beta] \qquad \text{(nach 62).}$$
$$= a(\beta\gamma) + a\beta \qquad \text{(nach 66).}$$
$$= a\beta\gamma + a\beta \qquad \text{(nach Annahme).}$$
$$= a\beta(\gamma + 1) \qquad \text{(nach 62b).}$$

2. Unter derselben Annahme ist

$$a[\beta(\gamma - 1)] = a[\beta\gamma - \beta] \qquad \text{(nach 63).}$$
$$= a(\beta\gamma) - a\beta \qquad \text{(nach 67).}$$
$$= a\beta\gamma - a\beta \qquad \text{(nach Annahme).}$$
$$= a\beta(\gamma - 1) \qquad \text{(nach 63b).}$$

3. $$a\,.\,(\beta 1) = a\beta \qquad \text{(nach 52).}$$
$$= a\beta\,.\,1 \qquad \text{(nach 52).}$$

Also gilt Formel 70 für $\gamma = 1$, also nach dem ersten Theile auch für alle folgenden, nach dem zweiten für alle vorhergehenden Werthe, also allgemein.

71. Wenn α eine Zahl ist, so ist

$$1\,.\,\alpha = \alpha.$$

Ein Produkt, dessen Multiplikand = 1 *ist, ist gleich dem Multiplikator.*

Beweis (induktorisch). Angenommen, die Formel 71 gelte für irgend einen Zahlwerth α, so ist

$$1\,.\,(\alpha + 1) = 1\,.\,\alpha + 1 \qquad \text{(nach 62).}$$
$$= \alpha + 1 \qquad \text{(nach Annahme).}$$
$$1\,.\,(\alpha - 1) = 1\,.\,\alpha - 1 \qquad \text{(nach 63).}$$
$$= \alpha - 1 \qquad \text{(nach Annahme),}$$

das heisst, wenn die Formel 71 für irgend einen Werth gilt, so gilt sie auch für den nächstfolgenden und nächstvorhergehenden, also auch für alle folgenden und vorhergehenden. Nun gilt sie aber für $a = 1$; denn

$$1 \,.\, 1 = 1 \qquad \text{(nach 52)},$$

also gilt sie allgemein.

72. Wenn α und β Zahlen sind, so ist

$$\alpha\beta = \beta\alpha.$$

Faktoren eines Produkts kann man vertauschen, (wenn sie Zahlen sind).

Beweis (induktorisch). Die Formel 72 gelte für irgend einen Zahl- 25 werth β, so ist

$$\begin{aligned} \alpha(\beta + 1) &= \alpha\beta + \alpha && \text{(nach 62).} \\ &= \beta\alpha + \alpha && \text{(nach Annahme).} \\ &= \beta\alpha + 1 \,.\, \alpha && \text{(nach 71).} \\ &= (\beta + 1)\alpha && \text{(nach 68b).} \\ \alpha(\beta - 1) &= \alpha\beta - \alpha && \text{(nach 63).} \\ &= \beta\alpha - \alpha && \text{(nach Annahme).} \\ &= \beta\alpha - 1 \,.\, \alpha && \text{(nach 71).} \\ &= (\beta - 1)\alpha && \text{(nach 69b).} \end{aligned}$$

Nun gilt die Formel 72 für $\beta = 1$; denn

$$\begin{aligned} \alpha \,.\, 1 &= \alpha && \text{(52).} \\ &= 1 \,.\, \alpha && \text{(71).} \end{aligned}$$

Folglich u. s. w.

73. $$a\beta\gamma = a\gamma\beta.$$

Die Ordnung, in welcher man mit zwei Zahlen fortschreitend multiplicirt, ist gleichgültig für das Resultat.

Beweis.

$$\begin{aligned} a\beta\gamma &= a(\beta\gamma) && \text{(nach 70b).} \\ &= a(\gamma\beta) && \text{(nach 72).} \\ &= a\gamma\beta && \text{(nach 70).} \end{aligned}$$

74. $$0 \,.\, \alpha = \alpha \,.\, 0 = 0.$$

Ein Produkt, in welchem einer der beiden Faktoren null ist, ist gleichfalls null.

Beweis.

$$\begin{aligned} 0 \,.\, \alpha &= \alpha \,.\, 0 && \text{(nach 72).} \\ &= 0 && \text{(nach 57).} \end{aligned}$$

75. $$(-a) \,.\, \beta = a \,.\, (-\beta) = -a\beta.$$

Statt das Minuszeichen vor einen Faktor zu setzen, kann man es vor das Produkt setzen.

Beweis.
$$(-a)\,.\,\beta = (0-a)\,\beta \qquad \text{(nach 37).}$$
$$= 0\,.\,\beta - a\,.\,\beta \qquad \text{(nach 69).}$$
$$= 0 - a\beta \qquad \text{(nach 74).}$$
$$= -a\beta \qquad \text{(nach 37).}$$

Ferner
$$a\,.\,(-\beta) = -a\beta \qquad \text{(nach 58).}$$

76.
$$(-a)\,.\,(-\beta) = a\beta.$$

Statt zwei mit minus bezeichnete Grössen zu multipliciren, kann man die zeichenlosen Grössen multipliciren.

Beweis.
$$(-a)(-\beta) = -[a(-\beta)] \qquad \text{(nach 75).}$$
26
$$= - - [a\beta] \qquad \text{(nach 75).}$$
$$= ab \qquad \text{(nach 40).}$$

***77.** *Eine Summe von beliebig vielen Stücken multiplicirt man mit einer Zahl, indem man sämtliche Summanden mit dieser Zahl multiplicirt und die Produkte addirt.*

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\,\beta = a_1\beta + a_2\beta + \cdots + a_n\beta.$$

Beweis (induktorisch in Bezug auf n). Angenommen der Satz gelte für irgend eine Anzahl n, so beweise ich, er gelte auch für $n+1$ Stücke. Es ist (nach 68)

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1})\,\beta = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\,\beta + a_{n+1}\beta$$
$$= a_1\beta + a_2\beta + \cdots + a_n\beta + a_{n+1}\beta$$
(nach Annahme),

das heisst, wenn der Satz für irgend eine Anzahl von Stücken gilt, so gilt er auch für die nächst grössere Anzahl, also da er für zwei Stücke gilt, auch für jede grössere Anzahl von Stücken.

***78.** *Eine Grösse a multiplicirt man mit einer Summe, indem man a mit jedem Stücke der Summe multiplicirt und die Produkte addirt.* Das heisst

$$a(\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n) = a\beta_1 + a\beta_2 + \cdots + a\beta_n.$$

Beweis wie in 77.

***79.** *Eine Summe von beliebig vielen Stücken multiplicirt man mit einer andern solchen Summe, indem man jedes Stück der einen Summe mit jedem Stücke der andern multiplicirt und die Produkte addirt.*

$$\begin{aligned}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_m) = {} & a_1\beta_1 + a_2\beta_1 + \cdots + a_n\beta_1 \\ & + a_1\beta_2 + a_2\beta_2 + \cdots + a_n\beta_2 \\ & \quad \vdots \\ & + a_1\beta_m + a_2\beta_m + \cdots + a_n\beta_m.\end{aligned}$$

Beweis. Es ist (nach 77).

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_m) = a_1(\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_m)$$
$$+ a_2(\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_m)$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdots \quad \cdot$$
$$+ a_n(\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_m)$$
$$= a_1\beta_1 + a_1\beta_2 + \cdots + a_1\beta_m$$
$$+ a_2\beta_1 + a_2\beta_2 + \cdots + a_2\beta_m$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdots \quad \cdot$$
$$+ a_n\beta_1 + a_n\beta_2 + \cdots + a_n\beta_m$$

(nach 78).

***80.** *Ein Polynom P multiplicirt man mit einer Zahl a; † oder eine Zahl a multiplicirt man mit einem Polynom, indem man (ohne sonst etwas an dem Polynom zu ändern) die Zahl zu jedem Gliede des Polynoms als Faktor hinzuschreibt;* 27

oder:

Ein Polynom, dessen Glieder alle einen gleichen Faktor a enthalten, ist gleich einem Produkte, dessen einer Faktor a und dessen anderer Faktor ein Polynom P ist, welches man aus dem gegebenen erhält, indem man in jedem Gliede des letzteren den Faktor a weglässt.

Beweis. Das Polynom P kann man als Summe darstellen, wenn man in jedem mit minus bezeichneten Gliede (nach 39) $+ -$ statt $-$ schreibt (also zum Beispiel, wenn $-b$ ein solches Glied ist, dafür schreibt $+ -b$). Die so erhaltene Summe multiplicirt man mit a, indem man a zu jedem Summanden als Faktor hinzufügt (nach 77, 78); also zum Beispiel statt $+ -b$ setzt $+ (-b)a$. Statt das Zeichen $-$ vor den Faktor zu setzen, kann man es (nach 75) vor das Produkt setzen, und erhält so statt des $+ (-b)a$ jetzt $+ -ba$, oder $-ba$; das heisst, man hat auch den mit minus bezeichneten Gliedern des Polynoms P nur den Faktor a hinzugefügt.

***81.** *Zwei Polynome multiplicirt man mit einander, indem man jedes Glied des ersten mit jedem Gliede des zweiten multiplicirt und jedem Produkte, was aus zwei gleichbezeichneten Gliedern entstanden ist, das +zeichen, und jedem Produkte, was aus zwei ungleich bezeichneten Gliedern entstanden ist, das —zeichen vorsetzt und die so erhaltenen Glieder zu einem Polynom zusammenfügt.*

Beweis. Man kann, wie in 80, jedes der beiden Polynome als Summe darstellen, indem man in jedem mit $-$ bezeichneten Gliede statt $-$ schreibt $+ -$, und dann nach 79 jedes Stück der ersten Summe mit jedem Stücke der zweiten multipliciren; dann erhält man eine Summe von Produkten, deren Faktoren zum Theil noch ein —zeichen enthalten; enthält nur ein Faktor das —zeichen, das heisst,

sind die ursprünglichen Glieder, aus denen das Produkt hervorgeht, ungleich bezeichnet, zum Beispiel, ist das betrachtete Produkt $(-a)b$, so kann man das $-$zeichen (nach 75) vor das Produkt setzen, und kann dann endlich statt $+-$ wieder $-$ setzen; also zum Beispiel statt $+(-a)b$ setzen $+-ab$, das heisst $-ab$. Enthalten beide
28 Faktoren das $-$zeichen, zum Beispiel wenn $(-c)(-d)$ das betrachtete Produkt ist, so kann man (nach 76) beide $-$zeichen weglassen und erhält also zum Beispiel statt $+(-c)(-d)$ das Glied $+cd$, also dasselbe, als wenn die ursprünglichen Glieder, aus denen das Produkt entstanden ist, das $+$zeichen gehabt hätten.

***82.** *Die Ordnung der Faktoren eines Produktes von beliebig vielen Faktoren ist gleichgültig für das Resultat.*

Beweis wie in der Addition Nr. 47.

***83.** *Die Klammern, welche beliebige Reihen von Faktoren eines Produktes umschliessen, kann man fortlassen.*

Beweis wie in Nr. 48.

***84.** *Statt ein Polynom mit* -1 *zu multipliciren, kann man das Zeichen jedes Gliedes des Polynoms umkehren;*

oder:
$$P.(-1) = P',$$

wo P' *das Polynom bezeichnet, welches aus* P *hervorgeht, wenn man das Zeichen jedes Gliedes umkehrt.*

Beweis.
$$\begin{aligned} P.(-1) &= -P.1 && \text{(nach 75).}\\ &= -P && \text{(nach 52).}\\ &= P' && \text{(nach 49).}\end{aligned}$$

§ 5.

Zahlvergleichung.

85. *Erklärung.* Eine Grösse a heisst grösser als eine andere b, geschrieben $a > b$, wenn $a - b$ positiv ist. In demselben Falle heisst b kleiner als a, geschrieben $b < a$. Man benennt solche Formeln, wie

$$a > b$$
$$a < b$$
$$a = b$$

mit dem gemeinschaftlichen Namen: Vergleichungen, und zwar $a > b$ eine fallende, $a < b$ eine steigende Vergleichung, und nennt von diesen beiden die eine die Umkehrung der andern.

86. *Zusatz. Jede positive Zahl ist grösser als Null, jede negative kleiner als Null.*

Beweis 1. α sei positiv, so ist

$$\alpha - 0 = \alpha \qquad \text{(nach 35);}$$

aber α positiv (nach Annahme), also auch $\alpha - 0$ positiv, das heisst

$$\alpha > 0 \qquad \text{(nach 85).}$$

2. α sei negativ und β die entsprechende positive, das heisst 29

$$\alpha = -\beta,$$

so ist

$$0 - \alpha = 0 - -\beta = 0 + \beta \qquad \text{(nach 40),}$$

$$= \beta \qquad \text{(nach 25),}$$

da nun β positiv ist (nach Annahme), so ist also auch $0 - \alpha$ positiv, das heisst

$$\alpha < 0 \qquad \text{(nach 85).}$$

87. *Erklärung.* Zwei Grössen (die von Null verschieden sind), heissen einander gleichartig, wenn entweder beide positiv, oder beide negativ sind, hingegen einander ungleichartig, wenn die eine positiv, die andere negativ ist.

88. *Die Summe $\alpha + \beta$ zweier positiver Zahlen ist wieder eine positive Zahl.*

Beweis (induktorisch in Bezug auf β). Angenommen $\alpha + \beta$ sei eine positive Zahl, so ist (nach 54) auch die ihr zunächst folgende Zahl der Zahlreihe positiv, das heisst $\alpha + \beta + 1$ positiv, aber

$$\alpha + \beta + 1 = \alpha + (\beta + 1) \qquad \text{(nach 22b),}$$

also auch $\alpha + (\beta + 1)$ positiv. Wenn also der Satz für irgend eine positive Zahl β gilt, so gilt er auch für die nächstfolgende, also auch für alle folgenden. Nun gilt er für $\beta = 1$; denn da α eine positive Zahl ist (nach Hypothesis), so ist auch die auf α zunächst folgende Zahl der Zahlreihe positiv (nach 54), das heisst $\alpha + 1$ positiv. Also gilt der Satz für $\beta = 1$, also auch, nach dem ersten Theile des Beweises für alle folgenden, also für alle positiven Zahlen.

89. *Die Summe zweier negativer Zahlen ist wieder eine negative Zahl, und zwar erhält man den positiven Werth der Summe, indem man die positiven Werthe der Summanden addirt.*

Beweis. Es seien α und β die positiven Werthe der Summanden, so ist

$$-\alpha + (-\beta) = -(\alpha + \beta) \qquad \text{(nach 41).}$$

90. *Die Summe mehrerer positiver Zahlen ist wieder positiv, und die Summe mehrerer negativer Zahlen ist wieder negativ.*

Beweis (induktorisch). Wenn der Satz für n Zahlen gilt, so gilt

30 er (nach 88 und 89) auch für $n+1$ Zahlen. Also da er † für zwei Zahlen gilt (nach 88 und 89), so gilt er auch für beliebig viele.

91. *Wenn in einer Reihe von Zahlen jede grösser ist als die nächst folgende, so ist auch die erste grösser als die letzte.*

Beweis (für vier Zahlen). Es sei

$$\alpha > \beta, \quad \beta > \gamma, \quad \gamma > \delta,$$

so sind (nach 85) $\alpha - \beta$, $\beta - \gamma$, $\gamma - \delta$ positiv, also auch ihre Summe (nach 90), das heisst, $\alpha - \beta + \beta - \gamma + \gamma - \delta$ positiv. Diese Summe ist aber (nach 48 und 28) gleich $\alpha - \delta$. Also ist $\alpha - \delta$ positiv, das heisst (nach 85) $\alpha > \delta$.

92. *Die Summe zweier ungleichartiger Zahlen ist demjenigen Summanden gleichartig, der den grösseren positiven Werth hat, und zwar findet man den positiven Werth dieser Summe, indem man den kleineren unter den positiven Werthen der Summanden von dem grösseren subtrahirt.*

Beweis. Es seien α und β positiv und α grösser als β, so ist zuerst

$$\alpha + -\beta = \alpha - \beta \qquad \text{(nach 39).}$$

Da nun (nach Annahme) α grösser ist als β, so ist $\alpha - \beta$ positiv, also die Summe $\alpha + -\beta$ auch positiv, also mit α gleichartig.

Zweitens

$$-\alpha + \beta = -(\alpha - \beta) \qquad \text{(nach 42).}$$

Da nun $\alpha - \beta$ positiv ist (wie bewiesen), so ist $-(\alpha - \beta)$ negativ, also auch $-\alpha + \beta$ negativ, also mit $-\alpha$ gleichartig.

Also ist die Summe in beiden Fällen demjenigen Summanden gleichartig, der den grösseren positiven Werth hat.

93. *Das Produkt $\alpha\beta$ zweier positiver Zahlen α und β ist wieder eine positive Zahl.*

Beweis (induktorisch in Bezug auf β). Angenommen, der Satz gelte für irgend einen positiven Werth β, so ist

$$\alpha . (\beta + 1) = \alpha . \beta + \alpha.$$

Nach Hypothesis ist α positiv, nach der Annahme auch $\alpha\beta$. Folglich sind die Summanden $\alpha\beta$ und α positiv, also auch ihre Summe (nach 88). Wenn also der Satz für irgend einen positiven Werth β gilt, so gilt er auch für den nächstfolgenden, also auch für alle fol-
31 genden. Nun gilt er für $\beta = 1$, denn † $\alpha . 1 = \alpha$ (nach 52), also positiv, da α nach Hypothesis positiv ist. Folglich gilt der Satz für $\beta = 1$, also auch nach dem ersten Theile des Beweises für alle folgenden Zahlen der Zahlreihe, also für alle positiven Zahlen.

94. *Das Produkt zweier gleichartiger Zahlen ist positiv, das Produkt zweier ungleichartiger Zahlen ist negativ, und der positive Werth*

des Produktes ist jedesmal das Produkt aus den positiven Werthen der Faktoren.

Beweis. α und β seien zwei positive Zahlen, so ist

1) $\alpha \,.\, \beta$ positiv (nach 93).
2) $(-\alpha) \,.\, (-\beta) = \alpha\beta$ (nach 76).
3) $(-\beta)\alpha = \alpha \,.\, (-\beta)$ (nach 72) $= \alpha(0-\beta)$ (nach 37).
$= \alpha \,.\, 0 - \alpha \,.\, \beta$ (nach 67).
$= 0 - \alpha\beta$ (nach 57).
$= -\alpha\beta$ (nach 37),

also negativ, da $\alpha\beta$, wie bewiesen, positiv ist.

95. *Wenn in einem Produkte $a\beta$, das null ist, der erste Faktor (a) nicht null ist, so muss nothwendig der andere Faktor null sein.*

Hypothesis $\alpha\beta = 0, \quad a \gtrless 0,$
Thesis $\beta = 0.$

Beweis 1 (indirekt). Es sei a eine Zahl $= \alpha$. Angenommen β sei ungleich Null, so muss β entweder positiv oder negativ sein; ferner α ist nach Hypothesis ungleich Null, muss also auch entweder positiv oder negativ sein. Es werden also {die} Faktoren α und β entweder beide positiv, oder beide negativ, oder einer positiv, der andere negativ sein. In den beiden ersten Fällen ist das Produkt positiv, in dem letzten ist es negativ (nach 94), also immer von Null verschieden. Dies ist aber gegen die Hypothesis, nach welcher $\alpha\beta = 0$ sein soll. Also ist die Annahme unmöglich; das heisst es ist unmöglich, dass $\beta \gtrless 0$ sei, also muss $\beta = 0$ sein.

2. Es sei a eine benannte Grösse, e ihre Einheit, α ihr Zahlwerth, das heisst

$$(*) \quad a = e\alpha.$$

Nach 65 ist eine benannte Grösse dann und nur dann null, wenn ihr Zahlwerth null ist. Nun ist (nach Hypothesis) $a \gtrless 0$, also auch ihr Zahlwerth $\alpha \gtrless 0$. Ferner ist (nach Hypothesis)

$$0 = a\beta = e\alpha\beta \quad \text{(nach *)}.$$

32

$$= e(\alpha\beta) \quad \text{(nach 70b)}.$$

Also (nach 65)

$$\alpha\beta = 0.$$

Da nun, wie bewiesen, $\alpha \gtrless 0$ ist, und $\alpha\beta = 0$, so muss nach Beweis 1

$$\beta = 0$$

sein.

96. *Wenn zwei gleiche Produkte $a\beta$ und $a\gamma$ einen gleichen Faktor a haben, der nicht null ist, so muss auch der andere Faktor in beiden gleich sein.*

Hypothesis $a\beta = a\gamma, \quad a \gtrless 0.$

Thesis $\beta = \gamma.$

Beweis. Nach Hypothesis ist

$$a\beta = a\gamma.$$

Also

$$a\beta - a\gamma = a\gamma - a\gamma = 0 \qquad \text{(nach 36).}$$

Somit

$$0 = a\beta - a\gamma = a(\beta - \gamma) \qquad \text{(nach 67 b).}$$

Also, da (nach Hypothesis) $a \gtrless 0$ ist,

$$\beta - \gamma = 0 \qquad \text{(nach 95).}$$

Also

$$\beta - \gamma + \gamma = 0 + \gamma.$$

Somit

$$\beta = \gamma \qquad \text{(nach 28 und 25).}$$

97. *Wenn in einem Produkt ein Faktor wächst und der andere positiv ist und unverändert bleibt, so wächst auch das Produkt.*

Hypothesis $\gamma > \beta, \quad \alpha > 0.$

Thesis $\alpha\gamma > \alpha\beta.$

Beweis. Da $\gamma > \beta$, so muss $\gamma - \beta$ positiv sein (nach 85). Dann ist

$$\alpha\gamma - \alpha\beta = \alpha(\gamma - \beta) \qquad \text{(nach 67 b).}$$

Da nun α und $\gamma - \beta$ positiv sind, so ist auch ihr Produkt $\alpha(\gamma - \beta)$ positiv (nach 93), also auch das ihm gleiche $\alpha\gamma - \alpha\beta$, das heisst (nach 85)

$$\alpha\gamma > \alpha\beta.$$

33 **98.** *Wenn ein Produkt zweier Faktoren wächst, der eine Faktor positiv ist und unverändert bleibt, so muss der andere Faktor wachsen.*

Hypothesis $\alpha\gamma > \alpha\beta, \quad \alpha > 0.$

Thesis $\gamma > \beta.$

Beweis. Da $\alpha\gamma > \alpha\beta$ ist, so ist $\alpha\gamma - \alpha\beta$ positiv, also $\alpha(\gamma - \beta)$ positiv; also die Faktoren gleichartig, also da α positiv ist, auch $\gamma - \beta$ positiv, das heisst $\gamma > \beta$.

99. *Wenn in einem Produkte mehrerer positiver Faktoren die Faktoren wachsen, so wächst auch das Produkt.*

Hypothesis $\alpha > \alpha' > 0, \quad \beta > \beta' > 0, \quad \gamma > \gamma' > 0.$

Thesis $\alpha\beta\gamma > \alpha'\beta'\gamma'$

Beweis. $\alpha\beta\gamma > \alpha\beta\gamma'$ (nach 97).

$\alpha\beta\gamma' > \alpha\beta'\gamma'$ (nach 97).

$\alpha\beta'\gamma' > \alpha'\beta'\gamma'$ (nach 97).

Also auch (nach 91) $\alpha\beta\gamma > \alpha'\beta'\gamma'$.

§ 6.

Zahlenlehre.

Vorbemerkung. In diesem § sollen nur positive Zahlen betrachtet werden.

100. *Erklärung.* Man sagt, eine Zahl a gehe in einer andern b auf, wenn es eine Zahl x giebt, die mit a multiplicirt b giebt, so dass also

$$b = ax$$

wird, und zwar sagt man dann, a gehe in b x-mal auf.

101. *Eins geht in jeder Zahl auf, und jede Zahl geht in sich selbst auf.*

Beweis. Es sei a eine beliebige Zahl, so ist

$$a = 1 \,.\, a = a \,.\, 1,$$

das heisst, 1 geht in a auf (nämlich a-mal), und a geht in a auf (nämlich einmal).

102. *Eine Zahl a, die in einer anderen b aufgeht, kann nicht grösser sein als b.*

Hypothesis $b = ax$.

Thesis a nicht $> b$.

Beweis (indirekt). x muss positiv sein, da das Produkt von x mit einer positiven Zahl a eine positive Zahl b liefert. Angenommen nun $a > b$, so wäre

$$ax > bx \quad \text{(nach 97).}$$

34

Ist nun zuerst $x = 1$, so hätte man (nach 52)

$$ax > b,$$

was gegen die Hypothesis ist, also müsste

$$x > 1$$

sein. Dann wäre

$$bx > b \quad \text{(nach 98).}$$

Also da $ax > bx$, $bx > b$, so wäre (nach 91) $ax > b$ gegen die Hypothesis. Also ist die Annahme, dass $a > b$ sei, unmöglich.

103. *Wenn sowohl a in b, als b in a aufgeht, so muss $a = b$ sein.*

Beweis. Da a in b aufgeht, so kann a nicht grösser als b sein (nach 102), das heisst, es kann nicht $a - b$ positiv sein (85); da ferner b in a aufgeht, so kann nicht $b - a$ positiv sein, das heisst, es kann

$a - b$ nicht negativ sein, also ist $a - b$ weder positiv, noch negativ, das heisst null, also a gleich b.

104. *Wenn a in b α-mal aufgeht, und b in c β-mal, so geht auch a in c auf, und zwar $\alpha\beta$-mal.*

Beweis. Da a in b α-mal aufgeht, so ist (nach 100)

$$* \qquad b = a\alpha$$

und da b in c β-mal aufgeht, so ist (nach 100)

$$c = b\beta.$$

Setzt man in diese Gleichung den Werth von b (aus *) ein, so erhält man

$$c = a\alpha\beta = a(\alpha\beta) \qquad \text{(nach 70b)},$$

das heisst, a geht in c auf und zwar $\alpha\beta$-mal.

105. *Wenn a in b α-mal aufgeht, so geht ma in mb ebenso oft auf, und umgekehrt, wenn ma in mb α-mal aufgeht, so geht a in b ebenso oft auf.*

Beweis 1. Es gehe a in b α-mal auf, so ist

$$b = a\alpha \qquad \text{(nach 100)},$$

also

$$mb = m(a\alpha) = ma\alpha \qquad \text{(nach 70)},$$

das heisst (nach 100), ma geht in mb α-mal auf.

2. Es gehe ma in mb α-mal auf, so ist

$$mb = ma\alpha \qquad \text{(nach 100)}.$$
$$= m(a\alpha) \qquad \text{(nach 70b)},$$

35 also

$$b = a\alpha \qquad \text{(nach 96)},$$

das heisst, a geht in b α-mal auf.

106. *Erklärung.* Eine Zahl, in welcher ausser 1 und der Zahl selbst keine andere Zahl aufgeht, heisst eine Primzahl.

107. *Aufgabe.* Die Primzahlen von 1 bis 200 aufzusuchen.

108. *Wenn in einer Zahl a die Zahlen von 2 bis b nicht aufgehen und $b \cdot b > a$ ist, so ist a eine Primzahl.*

Beweis (indirekt). Angenommen a sei keine Primzahl, so müsste in ihr eine von 1 und a verschiedene Zahl aufgehen. Es sei c eine solche Zahl, die in a aufgeht und von 1 und a verschieden ist, und zwar gehe sie d-mal in a auf, das heisst, es sei $a = cd$. Hier muss d von Eins verschieden sein, denn wäre $d = 1$, so wäre $c = a$ gegen die Annahme. Also sind c und d beide von Eins verschieden. Nach der Hypothesis sollen aber alle Zahlen von 2 bis b nicht in a aufgehen; also, da c und d in a aufgehen, so müssen sie von den Zahlen

von 2 bis b verschieden sein, also, da sie auch von 1 verschieden und positiv sind, so müssen beide grösser als b sein, also auch ihr Produkt cd (nach 99) grösser als $b.b$ sein. Also hat man

$$a = cd, \quad cd > bb, \quad bb > a \qquad \text{(nach Hypothesis)},$$

also (nach 91)

$$a > a, \text{ das heisst } a - a \text{ positiv},$$

was unmöglich ist (nach 36). Also ist die Annahme unmöglich, das heisst, a ist eine Primzahl.

109. *Aufgabe.* Zu beweisen, dass 1861 eine Primzahl ist.

110. *Eine Zahl m, welche in zwei anderen a und b aufgeht, geht auch*

1) *in ihrer Summe $a + b$,*
2) *in ihrer Differenz $a - b$,*
3) *in der Summe ihrer Produkte mit beliebigen Zahlen α und β, also in $a\alpha + b\beta$*

auf.

Beweis. Es gehe m in a x-mal und in b y-mal auf, also

$$a = mx, \quad b = my.$$

Dann ist

1) $a + b = mx + my = m(x + y)$ (nach 66b), 36

das heisst, m geht in $a + b$ auf.

2) $a - b = mx - my = m(x - y)$ (nach 67b),

das heisst, m geht in $a - b$ auf.

3) $a\alpha + b\beta = mx\alpha + my\beta = m(x\alpha) + m(y\beta) = m(x\alpha + y\beta)$ (nach 70b, 66b),

das heisst, m geht in $a\alpha + b\beta$ auf.

111. *Erklärung.* Eine Zahl, welche in zwei andern Zahlen aufgeht, heisst ein gemeinschaftliches Maass dieser beiden. Zwei Zahlen, deren grösstes gemeinschaftliches Maass 1 ist, heissen zu einander primär.

112. *Eine Primzahl, welche in einer Zahl b nicht aufgeht, ist zu ihr primär.*

Hypothesis. a ist Primzahl, a geht in b nicht auf.

Thesis. a ist zu b primär.

Beweis. Da a Primzahl ist, so geht in ihr ausser 1 und a keine Zahl auf (nach 106). Da aber a nicht in b aufgeht (Hypothesis), so ist 1 die einzige Zahl, welche zugleich in a und b aufgeht, das heisst, a ist zu b primär (nach 111).

113. *Wenn man aus einem Paar positiver Zahlen a und b ein zweites Paar dadurch ableitet, dass man statt der grösseren a den Unter-*

schied $a - b$ der beiden Zahlen setzt, so ist jedes gemeinschaftliche Maass des ersten Paares auch gemeinschaftliches Maass des zweiten Paares und umgekehrt.

Beweis 1. m gehe in dem ersten Paare auf, also in a und b, so geht m auch auf in $a - b$ (nach 110), also auch in $a - b$ und b, das heisst, m ist auch gemeinschaftliches Maass des zweiten Paares.

2. m gehe in dem zweiten Paare auf, also in $a - b$ und b, so geht m auch in der Summe beider Zahlen auf (nach 110), das heisst in $a - b + b$, also in a (nach 28). Somit geht m in a und in b auf, also ist m dann auch gemeinschaftliches Maass des ersten Paares.

114. *Wenn man aus einem Paare positiver Zahlen a und b ein zweites Paar dadurch ableitet, dass man statt der grösseren den Rest setzt, welcher durch Subtraktion der kleineren von der grösseren hervorgeht, und aus diesem Paare auf dieselbe Weise ein drittes Zahlenpaar* 37 *ableitet, und hiermit so † lange fortfährt, als die beiden Zahlen eines Paares noch verschieden sind, so muss man zuletzt zu einem Paare gleicher Zahlen kommen; wenn diese gleichen Zahlen m und m sind, so ist m das grösste gemeinschaftliche Maass der gegebenen Zahlen a und b, und jedes gemeinschaftliche Maass von a und b geht auch in ihrem grössten gemeinschaftlichen Maasse m auf.*

Beweis 1. Die Zahlen bleiben bei dem angewandten Verfahren stets positiv, da die ursprünglichen Zahlen a und b positiv sind, und jede neu hervortretende Zahl dadurch entsteht, dass man eine kleinere Zahl von einer grösseren subtrahirt, wobei (nach 85) der Rest positiv ist.

2. Die Summe der beiden Zahlen eines Paares nimmt von Paar zu Paar mindestens um 1 ab. Denn seien p und q die Zahlen eines Paares, und zwar $p > q$, so ist ihre Summe $p + q$, das folgende Zahlenpaar ist nach dem angegebenen Verfahren $p - q$ und q, ihre Summe $p - q + q = p$ (nach 28). Folglich hat die Summe um q abgenommen, das heisst mindestens um 1 abgenommen, da nach Beweis 1 die Zahl q positiv, also mindestens $= 1$ ist.

3. Ich beweise jetzt (indirekt), dass man durch das angegebene Verfahren zuletzt zu einem Paare gleicher Zahlen gelangen muss. Angenommen, man gelange durch dies Verfahren nie zu einem Paare gleicher Zahlen, das heisst die Zahlen eines jeden Paares seien von einander verschieden; so nimmt nach Beweis 2 die Summe bei jedem Fortschritt zu dem nächstfolgenden Paare mindestens um 1 ab, also nachdem man $(a + b)$-mal auf diese Weise fortgeschritten ist, mindestens um $a + b$, also müsste die Summe $a + b$ mindestens um $a + b$ abgenommen haben, das heisst, entweder null oder negativ geworden sein. Nach Beweis 1 sind aber die Zahlen jedes Paares positiv, also

müsste dann die Summe zweier positiver Zahlen null oder negativ sein, was (nach 88) unmöglich ist, also ist die Annahme unmöglich, das heisst, es ist nothwendig, dass man zuletzt zu einem Paare gleicher Zahlen gelangt.

4. Diese gleichen Zahlen seien m und m, so zeige ich, dass jedes gemeinschaftliche Maass von a und b in m aufgeht. Denn jedes gemeinschaftliche Maass eines Paares ist † (nach 113) auch gemeinschaftliches Maass des nächstfolgenden, also jedes gemeinschaftliche Maass des ersten Paares auch gemeinschaftliches Maass des letzten, das heisst geht in m auf. 38

5. Ich beweise jetzt, dass m gemeinschaftliches Maass von a und b ist. Denn da jede Zahl in sich selbst aufgeht (nach 101), so geht m in den Zahlen m und m des letzten Paares auf, das heisst ist gemeinschaftliches Maass des letzten Paares. Aber nach 113 ist jedes gemeinschaftliche Maass von einem dieser Paare auch gemeinschaftliches Maass des nächstvorhergehenden, also auch des ersten Paares; also namentlich m gemeinschaftliches Maass von a und b.

6. Endlich beweise ich (indirekt), dass m grösstes gemeinschaftliches Maass von a und b ist. Angenommen, es gebe eine Zahl c, welche gemeinschaftliches Maass von a und b, und grösser als m sei, so muss nach Beweis 4 auch c in m aufgehen, also eine grössere Zahl in einer kleineren, was (nach 102) unmöglich ist, also ist die Annahme unmöglich, das heisst, m ist grösstes gemeinschaftliches Maass von a und b.

115. Wenn m grösstes gemeinschaftliches Maass von am und bm ist, so müssen a und b zu einander primär sein.

Beweis (indirekt). Angenommen a und b seien nicht zu einander primär, so müsste es (nach 111) eine von 1 verschiedene Zahl geben, die in a und b aufginge. Es sei $c > 1$ diese Zahl und gehe c in a α-mal auf und in b β-mal, so ist $a = \alpha c$, $b = \beta c$, also $am = \alpha cm$, $bm = \beta cm$, also geht cm in am und bm auf, da aber $c > 1$ ist, so ist cm (nach 97) grösser als $1m$, das heisst grösser als m, also hätte man ein gemeinschaftliches Maass von am und bm, was grösser wäre als m, also wäre m nicht das grösste gemeinschaftliche Maass von am und bm. Das ist gegen die Hypothesis. Also ist die Annahme unmöglich. Also sind a und b zu einander primär.

116. *Wenn man durch die Methode der Subtraktion* (in 113) *aus einem Zahlenpaare a und b ein anderes a_1 (gelesen a eins oder a Index eins) und b_1, aus diesem wieder ein anderes a_2 und b_2 erhält u. s. w. und so, nachdem man diese Methode n-mal angewandt hat, ein Zahlenpaar a_n und b_n erhält, so erhält man aus dem Zahlenpaare*

$$ac \quad und \quad bc$$

39 *nach und nach durch dieselbe Methode der Subtraktion die Zahlenpaare*

$$a_1 c \quad \textit{und} \quad b_1 c$$
$$a_2 c \quad \textit{und} \quad b_2 c$$

u. s. w., und nachdem man die Methode n-mal angewandt hat, das Zahlenpaar

$$a_n c \quad \textit{und} \quad b_n c.$$

Beweis. Es seien die Zahlen eines jeden Paares so angeordnet, dass die grössere Zahl voransteht; also $a > b$, $a_1 > b_1, \ldots$, so besteht (nach 113) das aus a und b hervorgehende Zahlenpaar aus den Zahlen $a - b$ und b, also ist a_1 gleich der grösseren unter diesen beiden Zahlen ($a - b$ und b) und b_1 gleich der kleineren. Da nun $a > b$, so ist (nach 97) auch $ac > bc$, also besteht das aus ac und bc hervorgehende Zahlenpaar aus den Zahlen $ac - bc$, und bc, das heisst aus $(a - b)\,c$, und bc; wenn nun $a - b > b$ ist, so sollte $a_1 = a - b$ und $b_1 = b$ sein, dann ist aber (nach 97) auch $(a - b)\,c > bc$, das heisst $a_1 c > b_1 c$, also bilden $a_1 c$ und $b_1 c$ dann das aus ac und bc hervorgehende Zahlenpaar. Wenn aber $a - b < b$ ist, so sollte $a_1 = b$ und $b_1 = a - b$ sein; dann ist (nach 97) auch $(a - b)\,c < bc$, das heisst $b_1 c < a_1 c$, und das aus ac und bc hervorgehende Zahlenpaar ist gleichfalls $a_1 c$ und $b_1 c$. Aus gleichem Grunde ist das aus $a_1 c$ und $b_1 c$ hervorgehende Zahlenpaar gleich $a_2 c$ und $b_2 c$ und so fort, nach n-maliger Anwendung dieser Methode geht also das Zahlenpaar

$$a_n c \quad \text{und} \quad b_n c$$

hervor.

117. *Wenn m das grösste gemeinschaftliche Maass von a und b ist, so ist mc das grösste gemeinschaftliche Maass von ac und bc.*

Beweis. Das grösste gemeinschaftliche Maass von a und b erhält man (nach 114), indem man durch die Methode der Subtraktion (Nr. 113) aus dem Zahlenpaare a und b ein anderes, aus diesem durch dieselbe Methode wieder ein anderes ableitet, bis man zu einem Paare gleicher Zahlen m und m gelangt, dann ist m das grösste gemeinschaftliche Maass von a und b. Man möge nach n-maliger Anwendung jener Methode zu diesem Zahlenpaare m und m gelangt sein; so ge-
40 langt man (nach 116), indem man dasselbe Verfahren auf das Zahlenpaar ac und bc anwendet, zu dem Zahlenpaare mc und mc, also ist (nach 114) mc das grösste gemeinschaftliche Maass von ac und bc.

118. *Wenn eine Zahl c in einem Produkte ab aufgeht, und sie zu einem (a) der beiden Faktoren primär ist, so geht sie in dem andern Faktor b auf.*

Hypothesis. c geht auf in ab, c ist zu a primär.

Thesis. c geht auf in b.

Beweis. c geht in ab auf (nach Hypothesis), ferner geht aber c auch auf in cb (nämlich b-mal), also geht (nach 114) c auch auf in dem grössten gemeinschaftlichen Maass von ab und cb; da nun c und a zu einander primär sind (nach Hypothesis), so ist ihr grösstes gemeinschaftliches Maass gleich 1 (nach 111); also ist das grösste gemeinschaftliche Maass von ab und cb gleich $1 . b$ (nach 117), das heisst $= b$. Da also, wie bewiesen, c in dem grössten gemeinschaftlichen Maass von ab und cb aufgeht, und dies gleich b ist, so geht c in b auf; q. d. e.

119. *Wenn eine Primzahl a in zwei Zahlen b und c nicht aufgeht, so geht sie auch in ihrem Produkt bc nicht auf.*

Hypothesis. a ist Primzahl, a geht nicht auf in b, a geht nicht auf in c.

Thesis. a geht nicht auf in bc.

Beweis (indirekt). Angenommen a gehe in cb auf. Da nun a Primzahl ist und in b nicht aufgeht, so ist (nach 112) a primär zu b; und da a zu b primär ist, und da a in dem Produkte bc aufgeht (nach Annahme), so muss a in c aufgehen (nach 118). Dies ist aber gegen die Hypothesis. Also ist die Annahme, dass a in bc aufgehe, unmöglich; q. d. e.

120. *Wenn eine Primzahl a in drei oder mehr Zahlen nicht aufgeht, so geht sie auch in ihrem Produkte nicht auf.*

Beweis (für drei Zahlen). Es gehe die Primzahl a in keiner der Zahlen b, c, d auf. Da die Primzahl a in b und c nicht aufgeht, so geht sie (nach 119) auch in bc nicht auf, und da sie in bc und d nicht aufgeht, so geht sie (nach 119) auch in bcd nicht auf.

Anmerkung. Für n Zahlen $b_1, b_2, \ldots b_n$ ist der strenge Beweis induktorisch in Bezug auf n.

121. *Wenn zwei zu einander primäre Zahlen (a und b) in einer Zahl (c) aufgehen, so geht auch das Produkt (ab) jener Zahlen in der letzteren (c) auf.* 41

Beweis. Nach Hypothesis geht a in c auf, es gehe d-mal darin auf, so ist

$$c = ad \qquad \text{(nach 100).}$$

Ferner geht (nach Hypothesis) b in c, das heisst in ad auf. Da nun b zu a primär ist (nach Hypothesis) und in dem Produkte ad aufgeht, so muss es (nach 118) in d aufgehen; es gehe e-mal darin auf, so ist $d = be$, also

$$c = ad = a(be) = abe \qquad \text{(nach 70),}$$

also geht ab in c auf (nämlich e-mal).

***122.** *Erklärung. Die kleinste Zahl, in welcher zwei oder mehrere gegebene Zahlen aufgehen, heisst der kleinste Dividuus dieser Zahlen.*

***123.** *Wenn m das grösste gemeinschaftliche Maass zweier Zahlen $a = \alpha m$, $b = \beta m$ ist, so geht $\alpha\beta m$ in jeder Zahl c auf, in welcher a und b aufgehen, und ist daher der kleinste Dividuus von a und b.*

Beweis 1. Nach Hypothesis ist m das grösste gemeinschaftliche Maass von $a = \alpha m$ und $b = \beta m$; dann sind (nach 115) α und β zu einander primär. Nun sei c eine Zahl, in welcher a und b aufgehen. Da nun m in a aufgeht, und a in c, so muss (nach 104) auch m in c aufgehen; es gehe γ-mal darin auf, so ist (nach 100)

$$c = \gamma m.$$

Da a in c, das heisst αm in γm aufgeht, so muss (nach 105b) auch α in γ aufgehen, und aus gleichem Grunde β in γ. Also, da α und β in γ aufgehen und zu einander primär sind, so muss $\alpha\beta$ in γ aufgehen (nach 121), also auch (nach 105) $\alpha\beta m$ in γm, das heisst in c.

2. Da also $\alpha\beta m$ in c aufgeht, so kann $\alpha\beta m$ nicht grösser als c sein (102), c ist aber eine beliebige Zahl, in welcher a und b aufgehen, folglich giebt es keine Zahl $< \alpha\beta m$, in welcher a und b aufgehen, das heisst $\alpha\beta m$ ist kleinster Dividuus von a und b.

***124.** *Aufgabe.* Das grösste gemeinschaftliche Maass dreier Zahlen a, b, c zu finden.

42 *Auflösung.* Man suche (nach 114) das grösste gemeinschaftliche Maass zu a und b, es sei dies β, sodann suche man das grösste gemeinschaftliche Maass zu β und c, es sei dies γ, so ist γ grösstes gemeinschaftliches Maass zu a, b, c.

Beweis 1. Da γ in β aufgeht, und β in a, so geht (nach 104) auch γ in a auf und aus gleichem Grunde auch in b, also da γ auch in c aufgeht (nach Auflösung), so geht es in a, b, c auf.

2. Es sei m eine beliebige Zahl, die in a, b, c aufgehe, da m in a und b aufgeht, so geht es (nach 114) auch in dem grössten gemeinschaftlichen Maass von a und b, das heisst in β auf; da m (nach Annahme), auch in c aufgeht, also in β und c, so geht es (nach 114) auch in dem grössten gemeinschaftlichen Maass von β und c, das heisst in γ auf. Da nun m in γ aufgeht, so kann es (nach 102) nicht grösser als γ sein, folglich giebt es keine Zahl grösser als γ, die in a, b, c aufgeht, das heisst, γ ist das grösste gemeinschaftliche Maass von a, b und c.

***125.** *Aufgabe.* Den kleinsten Dividuus dreier Zahlen a, b, c zu finden.

Auflösung und *Beweis* wie in 124, nur dass man kleinsten Dividuus statt grösstes gemeinschaftliches Maass u. s. w. setzt.

Anmerkung. Auf diese Weise kann man das grösste gemeinschaftliche Maass (oder den kleinsten Dividuus) von n Zahlen finden, indem man zuerst zu $n-1$ dieser Zahlen das grösste gemeinschaftliche Maass (den kleinsten Dividuus) sucht und dann hierzu und zu der n-ten Zahl abermals das grösste gemeinschaftliche Maass (den kleinsten Dividuus) sucht.

***126.** *Erklärung.* Eine Zahl, die nicht Primzahl ist, das heisst, in der ausser ihr selbst und 1 noch mindestens eine andere Zahl aufgeht, heisst eine zusammengesetzte Zahl. Wenn eine zusammengesetzte Zahl a gleich einem Produkte ist, dessen Faktoren sämtlich Primzahlen, aber nicht $=1$ sind, so nennt man diese Faktoren die Primfaktoren von a und sagt dann, a sei in seine Primfaktoren zerlegt.

***127.** *Jede zusammengesetzte Zahl lässt sich in Primfaktoren zerlegen.*

Beweis 1. Da a eine zusammengesetzte Zahl ist, so muss (nach 106) mindestens eine von 1 und a verschiedene Zahl c in ihr aufgehen; es gehe c in ihr d-mal auf, so ist $a = c \, . \, d$, † wo $d \gtrless 1$ ist, 43 da sonst $a = c \, . \, 1 = c$ sein würde, gegen die Annahme. Also lässt sich jede zusammengesetzte Zahl a in zwei von 1 verschiedene Faktoren zerlegen, und zwar müssen diese Faktoren beide kleiner als a sein; denn grösser können sie nicht sein (nach 102), aber auch nicht gleich a, denn wäre einer von ihnen $= a$, so wäre der andere 1, gegen die Annahme.

2. Ist von den beiden Faktoren c und d, in die a zerlegt ist, noch einer eine zusammengesetzte Zahl, so kann man diese (nach Beweis 1) wieder in zwei von 1 verschiedene Zahlen zerlegen u. s. w. Da bei jeder Zerlegung die Faktoren immer kleiner werden als die zerlegte Zahl, also immer wenigstens um 1 kleiner, so muss die Möglichkeit der Zerlegung eine Gränze haben, also zuletzt ein Produkt von lauter Primfaktoren hervorgehen.

***128.** *Wenn zwei Produkte A und B von Primfaktoren gleichen Werth haben, so können sich beide Produkte nur durch die Ordnung ihrer Faktoren unterscheiden.*

Beweis (induktorisch in Bezug auf die Anzahl der Primfaktoren von A). 1. Angenommen der Satz gelte, wenn A ein Produkt von n Primfaktoren ist, so beweise ich, er gelte auch, wenn A ein Produkt von $n+1$ Primfaktoren ist. Es seien $a_1, a_2, \ldots a_{n+1}$ die Primfaktoren von A (ob darunter gleiche vorkommen, ist gleichgültig); da nun dies Produkt (nach Hypothesis) gleichen Werth mit dem Produkte B haben soll, so muss a_{n+1} in diesem Produkte B aufgehen (nämlich so oft, als der Werth des Produktes $a_1 . a_2 \ldots a_n$ beträgt), also muss a_{n+1} (nach 120) in einem der Faktoren von B aufgehen, es sei x dieser

Faktor von B, in welchem a_{n+1} aufgeht. Da nun die Faktoren von B (nach Hypothesis) Primfaktoren sind, so ist auch x eine Primzahl, in ihr geht (nach 106) keine andere Zahl auf als 1 und x, da nun a_{n+1} in x aufgehen soll, und a_{n+1} als Primfaktor $\gtrless 1$ ist (nach 126), so muss $a_{n+1} = x$ sein. Man bringe durch Vertauschung der Faktoren von B diesen Faktor auf die letzte Stelle, das Produkt der übrigen sei C, so ist (nach 82) Cx oder Ca_{n+1} mit B, also auch mit A von gleichem Werthe, also

$$a_1 a_2 \dots a_n a_{n+1} = C a_{n+1},$$

also (nach 96)

$$a_1 a_2 \dots a_n = C.$$

44 Folglich, da der Satz nach der Annahme für n Faktoren gilt, so können die Faktoren von C sich von den Faktoren $a_1, a_2, \dots a_n$ nur durch die Ordnung unterscheiden. Das Produkt A enthält aber ausser ihnen nur noch den Faktor $x = a_{n+1}$, also enthält B dieselben Faktoren wie A; das heisst, wenn der Satz für n Faktoren gilt, so gilt er auch für $n + 1$ Faktoren, also auch für jede grössere Anzahl derselben.

2. Nun gilt aber der Satz, wenn A aus zwei Faktoren besteht, diese seien a_1 und a_2, so muss nach Beweis 1 auch der Faktor a_2 einer der Primfaktoren von B sein. Es sei $B = Ca_2$, so wird

$$a_1 a_2 = C a_2,$$

also (nach 96)

$$a_1 = C,$$

also besteht das Produkt B aus den Faktoren a_1 und a_2, das heisst, der Satz gilt für zwei Faktoren, also nach Beweis 1 auch für jede grössere Anzahl von Faktoren, also für beliebig viele.

***129.** *In einer Zahl A können ausser 1 keine andern Zahlen aufgehen, als die Primfaktoren von A und Produkte derselben.*

Beweis. Es seien $a_1, a_2, \dots a_n$ die Primfaktoren von A, also

$$A = a_1 a_2 \dots a_n$$

und B sei eine beliebige Zahl $\gtrless 1$, die in A aufgeht, und zwar gehe sie C-mal auf, so ist

$$A = BC.$$

Nun zerlege man B und C in ihre Primfaktoren, so bilden diese zusammen die Primfaktoren von A, müssen also (nach 128) den Faktoren $a_1, a_2, \dots a_n$ gleich sein, folglich ist B entweder gleich einem dieser Faktoren, oder gleich einem Produkte derselben.

Anmerkung. Hieran schliessen sich die Aufgaben: Eine gegebene Zahl in ihre Primfaktoren zu zerlegen, ferner: Die sämtlichen Zahlen zu suchen, welche in einer gegebenen Zahl aufgehen.

§ 7.

Division.

130. *Erklärung.* Man versteht unter $a : b$, gelesen: a dividirt durch b, oder $\frac{a}{b}$, gelesen: ein Bruch, dessen Zähler a und dessen Nenner b ist, diejenige (einer Grundreihe † angehörige) Grösse, welche mit b zu einem Produkt verknüpft a giebt, vorausgesetzt, dass b nicht null sei, das heisst: 45

$$a : b \,.\, b = a, \quad \text{oder} \quad \frac{a}{b} b = a.$$

Mit derselben Grösse fortschreitend dividiren und multipliciren ändert nichts.

Man nennt $a : b$ einen Quotienten, a seinen Dividend, b seinen Divisor. Wenn a und b Zahlen sind, so nennt man $a : b$ oder $\frac{a}{b}$ einen Zahlquotienten oder einen Zahlbruch.

Anmerkung 1. Ein Quotient, dessen Divisor null ist, darf bei keiner Rechnung angewandt werden. Es lässt sich beweisen, dass für solche Quotienten keins der bisher bewiesenen Gesetze Geltung hat, und sich überhaupt kein positiver Satz für sie aufstellen lässt. Jede Anwendung eines solchen Gesetzes auf die in Rede stehenden Quotienten ist daher fehlerhaft und kann zu den widersinnigsten Sätzen führen. Dessen ungeachtet lässt sich dem Quotienten, dessen Nenner null ist, eine gewisse Bedeutung beilegen; nämlich wenn der Zähler (a) von Null verschieden ist, so sagt man $\frac{a}{0}$ sei unendlich; nämlich 0 ist in a unendlich oft enthalten und dann bleibt noch immer a übrig. Ist der Zähler auch Null, so sagt man $\frac{0}{0}$ sei unbestimmt, weil nämlich jede Grösse mit Null multiplicirt Null giebt. — Wir schliessen im Folgenden überall Null als Divisor aus.

Anmerkung 2. Wenn a und b benannte Grössen sind, die derselben Grundreihe angehören, und b in a aufgeht, so drückt der Quotient $a : b$ die Zahl aus, mit welcher b multiplicirt a giebt, das heisst die Zahl, welche angiebt, wie oft b in a enthalten ist. Man nennt diese Art des Dividirens messen. Wenn aber a eine benannte Grösse und b eine Zahl ist, so bezeichnet $a : b$ eine Grösse, welche derselben Grundreihe angehört wie a, und die b-mal genommen a giebt. Man nennt diese Art des Dividirens theilen. Wenn a und b beides Zahlen sind, so kann der Quotient beliebig als Messung oder als Theilung aufgefasst werden. Im Folgenden ist die Division als Theilung zu Grunde gelegt.

131. *Bezeichnung.* Wenn mit mehreren Grössen fortschreitend dividirt werden soll und die Division durch das Zeichen : ausgedrückt ist, so lässt man die Klammern (welche diese Grössen umschliessen) weg. Ferner lässt man bei der Bruchbezeichnung die Klammer, welche den Zähler umschliesst, und die, welche den Nenner umschliesst, weg.

132. *Wenn der Divisor β eine Zahl ist, so lässt sich stets eine Grundreihe angeben, welcher auch der Dividend a † angehört, und in welcher eine Grösse enthalten ist, die mit β multiplicirt a giebt.* 46

Beweis 1. Die Grundreihe, aus welcher der Dividend erzeugt ist, habe e zur Einheit, und sei $a = e\alpha$. Wenn es nun in derselben Grundreihe keine Grösse giebt, die mit β multiplicirt a liefert, so bilde man eine neue Grundreihe, deren Einheit die Beschaffenheit hat, dass

$$(*) \qquad e'\beta = e$$

sei, so ist

$$e'(\beta\alpha) = e'\beta\alpha \qquad \text{(nach 70).}$$
$$= e\alpha \qquad \text{(nach *).}$$
$$= a \qquad \text{(nach Annahme),}$$

das heisst, a ist Glied der aus e' erzeugten Grundreihe. Ferner ist $e'\alpha$ ein Glied derselben Grundreihe, welches mit β multiplicirt a giebt; denn

$$e'\alpha\beta = e'\beta\alpha \qquad \text{(nach 73).}$$
$$= e\alpha \qquad \text{(nach *).}$$
$$= a \qquad \text{(nach Annahme).}$$

133. $$a \,.\, \beta : \beta = a.$$

Mit derselben Zahl fortschreitend multipliciren und dividiren ändert nichts.

Beweis (vergl. Nr. 29). Es ist

$$a \,.\, \beta : \beta \,.\, \beta = a \,.\, \beta \qquad \text{(nach 130).}$$

Da nun die Grössen $a \,.\, \beta : \beta$ und a mit einer von 0 verschiedenen Zahl β multiplicirt gleiches Produkt liefern, so müssen (nach 96) jene Grössen gleich sein, also

$$a \,.\, \beta : \beta = a.$$

134. $$a : (\beta\gamma) = a : \beta : \gamma,$$

oder

$$\frac{a}{\beta\gamma} = \frac{a : \beta}{\gamma} = \frac{a}{\beta} : \gamma.$$

Statt mit einem Produkte zweier Zahlen zu dividiren, kann man mit den Faktoren fortschreitend dividiren,

oder:

Statt mit zwei Zahlen fortschreitend zu dividiren, kann man mit ihrem Produkte dividiren.

Beweis (rückschreitend, vergl. Nr. 31).

$$a : \beta : \gamma = a : \beta : \gamma \,.\, (\beta\gamma) : (\beta\gamma) \qquad \text{(nach 133).}$$
$$= a \,.\, \beta : \gamma \,.\, (\gamma\beta) : (\beta\gamma) \qquad \text{(nach 72).}$$
$$= a : \beta : \gamma \,.\, \gamma \,.\, \beta : (\beta\gamma) \qquad \text{(nach 70).}$$
$$= a : \beta \,.\, \beta : (\beta\gamma) \qquad \text{(nach 130).}$$
$$= a : (\beta\gamma) \qquad \text{(nach 130).}$$

135. $$\alpha : \beta : \gamma = \alpha : \gamma : \beta$$ 47

oder
$$\frac{\alpha}{\beta} : \gamma = \frac{\alpha}{\gamma} : \beta.$$

Die Ordnung, in welcher man fortschreitend mit zwei Zahlen dividirt, ist gleichgültig für das Resultat.

Beweis (vergl. Nr. 33).

$$\alpha : \beta : \gamma = \alpha : (\beta\gamma) \qquad \text{(nach 134b).}$$
$$= \alpha : (\gamma\beta) \qquad \text{(nach 72).}$$
$$= \alpha : \gamma : \beta \qquad \text{(nach 134).}$$

136. $$\alpha . \beta : \gamma = \alpha : \gamma . \beta$$

oder
$$\frac{\alpha\beta}{\gamma} = \frac{\alpha}{\gamma}\beta.$$

Die Ordnung, in welcher man fortschreitend mit einer Zahl multiplicirt und mit einer andern dividirt, ist gleichgültig für das Resultat, oder:

Einen Bruch multiplicirt man mit einer Zahl, indem man seinen Zähler mit dieser Zahl multiplicirt und den Nenner unverändert lässt.

Beweis (vergl. Nr. 30).

$$\alpha . \beta : \gamma = \alpha . \beta : \gamma : \beta . \beta \qquad \text{(nach 130).}$$
$$= \alpha . \beta : \beta : \gamma . \beta \qquad \text{(nach 135).}$$
$$= \alpha : \gamma . \beta \qquad \text{(nach 133).}$$

137. $$\frac{\alpha\gamma}{\beta\gamma} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Man kann einen Bruch ohne Veränderung seines Werthes erweitern und heben, das heisst Zähler und Nenner mit derselben Zahl multipliciren und dividiren.

Beweis.
$$\frac{\alpha\gamma}{\beta\gamma} = \alpha\gamma : (\beta\gamma) = \alpha\gamma : \beta : \gamma \qquad \text{(nach 134).}$$
$$= \alpha . \gamma : \gamma : \beta \qquad \text{(nach 135).}$$
$$= \alpha : \beta = \frac{\alpha}{\beta} \qquad \text{(nach 133).}$$

138. *Erklärung.* Ein Zahlbruch, dessen Zähler zum Nenner primär und dessen Nenner positiv ist, heisst ein reducirter Bruch. Man nennt ihn positiv, wenn sein Zähler positiv ist. Mit einem reducirten Bruche multipliciren heisst fortschreitend mit seinem Zähler multipliciren und mit seinem Nenner dividiren, das heisst

$$\alpha\frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha\beta}{\gamma},$$

wenn β zu γ primär ist.

Aufgabe. Den Satz zu beweisen: Reducirte Brüche von gleichem 48

Werthe haben gleiche Zähler und gleiche Nenner. (No. 130, 100, 118, 103.)

139. $a\frac{\beta}{\gamma} = \frac{a\beta}{\gamma}$, (auch wenn β nicht zu γ primär ist).

Statt mit einem Bruche zu multipliciren, kann man fortschreitend mit seinem Zähler multipliciren und mit seinem Nenner dividiren,
oder:

Statt fortschreitend mit einer Zahl zu multipliciren und mit einer zweiten Zahl zu dividiren, kann man mit einem Bruche multipliciren, dessen Zähler die erste, und dessen Nenner die zweite Zahl ist.

Beweis. Es sei m das grösste gemeinschaftliche Maass von β und γ, und sei $\beta = bm$, $\gamma = cm$, so sind (nach 115) b und c zu einander primär, und es ist

$$a\frac{\beta}{\gamma} = a\frac{bm}{cm} \quad \text{(nach Annahme).}$$
$$= a\frac{b}{c} \quad \text{(nach 137b).}$$
$$= \frac{ab}{c} \quad \text{(nach 138, da } b \text{ zu } c \text{ primär).}$$
$$= \frac{abm}{cm} \quad \text{(nach 137).}$$
$$= \frac{a(bm)}{cm} \quad \text{(nach 70b).}$$
$$= \frac{a\beta}{\gamma} \quad \text{(nach Annahme).}$$

140. $\frac{a}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{a\gamma}{\beta\delta}$.

Brüche multiplicirt man mit einander, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multiplicirt,
oder:

Ein Bruch, dessen Zähler und Nenner Produkte von je zwei Faktoren sind, ist gleich dem Produkte zweier Brüche, die man erhält, indem man die Faktoren des Zählers zu Zählern und die des Nenners zu Nennern derselben macht.

Beweis.
$$\frac{a}{\beta}\frac{\gamma}{\delta} = \frac{a}{\beta} \cdot \gamma : \delta \quad \text{(nach 139).}$$
$$= \frac{a\gamma}{\beta} : \delta \quad \text{(nach 136b).}$$
$$= \frac{a\gamma}{\beta\delta} \quad \text{(nach 134b).}$$

49 **141.** $a : \frac{\beta}{\gamma} = a \cdot \frac{\gamma}{\beta}$.

Statt mit einem Bruche zu dividiren, kann man mit dem umgekehrten Bruche multipliciren.

Beweis.

$$a : \frac{\beta}{\gamma} = a : \frac{\beta}{\gamma} \cdot \beta : \beta \qquad \text{(nach 133).}$$

$$= a : \frac{\beta}{\gamma} \cdot \beta : \gamma \,.\, \gamma : \beta \qquad \text{(nach 130).}$$

$$= a : \frac{\beta}{\gamma} \cdot \frac{\beta}{\gamma} \cdot \gamma : \beta \qquad \text{(nach 139 b).}$$

$$= a \,.\, \gamma : \beta \qquad \text{(nach 130).}$$

$$= a \cdot \frac{\gamma}{\beta} \qquad \text{(nach 139 b).}$$

142. *Für jede gegebene Reihe von Brüchen, deren Zähler derselben Grundreihe (R) angehören, kann man eine neue Grundreihe angeben, zu welcher alle jene Brüche, sowie deren Zähler gehören; und zwar erhält man die Einheit dieser neuen Grundreihe, indem man die Einheit der ursprünglichen Grundreihe R durch das Produkt sämtlicher Nenner dividirt, das heisst, wenn*

$$\frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\beta}, \ldots$$

diese Brüche sind, und e die Einheit der Zähler a, b, ..., so gehören die Brüche selbst, sowie ihre Zähler einer und derselben Grundreihe an, deren Einheit $e' = \frac{e}{\alpha\beta\ldots}$ ist.

Beweis (für zwei Brüche). Da $e' = \frac{e}{\alpha\beta}$, so ist

$$* \qquad e = e'\alpha\beta.$$

Es sei $a = e\gamma$, $b = e\delta$, so ist

$$\frac{a}{\alpha} = \frac{e\gamma}{\alpha} = \frac{e'\alpha\beta\gamma}{\alpha} \qquad \text{(nach *).}$$

$$= \frac{e'\alpha(\beta\gamma)}{\alpha} \qquad \text{(nach 70 b).}$$

$$= \frac{e'(\beta\gamma)\alpha}{\alpha} \qquad \text{(nach 72).}$$

$$= e'(\beta\gamma) \qquad \text{(nach 133),}$$

also gehört $\frac{a}{\alpha}$ der Grundreihe an, deren Einheit e' ist.

Ebenso ist

$$\frac{b}{\beta} = \frac{e\delta}{\beta} = \frac{e'\alpha\beta\delta}{\beta} \qquad \text{(nach *).} \qquad 50$$

$$= \frac{e'\alpha\delta\beta}{\beta} \qquad \text{(nach 73).}$$

$$= e'\alpha\delta \qquad \text{(nach 133).}$$

$$= e'(\alpha\delta) \qquad \text{(nach 70 b),}$$

also gehört auch $\frac{b}{\beta}$ derselben Grundreihe an. Ferner auch die Zähler a und b, da

$$a = e\gamma = e'\alpha\beta\gamma \quad \text{(nach *)}.$$
$$= e'(\alpha\beta\gamma) \quad \text{(nach 70b)}.$$

und

$$b = e\delta = e'\alpha\beta\delta \quad \text{(nach *)}.$$
$$= e'(\alpha\beta\delta) \quad \text{(nach 70b) ist.}$$

Anmerkung 1. Es gelten also für Addition und Subtraktion der Brüche dieselben Gesetze wie für Addition und Subtraktion der aus einer Grundreihe erzeugten Grössen. (§ 2, 3.)

143. $$\frac{a}{\gamma} + \frac{b}{\gamma} = \frac{a+b}{\gamma}.$$

144. $$\frac{a}{\gamma} - \frac{b}{\gamma} = \frac{a-b}{\gamma}.$$

Brüche von gleichem Nenner addirt oder subtrahirt man, indem man die Zähler entsprechend addirt oder subtrahirt (und den Nenner unverändert lässt),

oder:

Eine Summe oder Differenz dividirt man mit einer Zahl, indem man die Glieder einzeln dividirt und die Quotienten entsprechend addirt oder subtrahirt.

Beweis.

$$\frac{a}{\gamma} + \frac{b}{\gamma} = \left(\frac{a}{\gamma} + \frac{b}{\gamma}\right)\gamma : \gamma \quad \text{(nach 133).}$$
$$= \left(\frac{a}{\gamma}\gamma + \frac{b}{\gamma}\gamma\right) : \gamma \quad \text{(nach 68).}$$
$$= (a+b) : \gamma = \frac{a+b}{\gamma} \quad \text{(nach 130).}$$

Und ebenso

$$\frac{a}{\gamma} - \frac{b}{\gamma} = \left(\frac{a}{\gamma} - \frac{b}{\gamma}\right)\cdot\gamma : \gamma \quad \text{(nach 133).}$$
$$= \left(\frac{a}{\gamma}\gamma - \frac{b}{\gamma}\gamma\right) : \gamma \quad \text{(nach 69).}$$
$$= (a-b) : \gamma = \frac{a-b}{\gamma} \quad \text{(nach 130).}$$

51 **145.** $$\frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} = \frac{a\beta + b\alpha}{\alpha\beta},$$

146. $$\frac{a}{\alpha} - \frac{b}{\beta} = \frac{a\beta - b\alpha}{\alpha\beta}.$$

Zwei Brüche (von ungleichem Nenner) addirt oder subtrahirt man, indem man jeden Zähler mit dem Nenner des andern Bruches multiplicirt, die Produkte entsprechend addirt oder subtrahirt und das Resultat mit dem Produkte der Nenner dividirt.

Beweis.

$$\frac{a}{\alpha} \mp \frac{b}{\beta} = \frac{a\beta}{\alpha\beta} \mp \frac{b\alpha}{\alpha\beta} \quad \text{(nach 137).}$$
$$= \frac{a\beta \mp b\alpha}{\alpha\beta} \quad \text{(nach 143. 144).}$$

Anmerkung. Man kann, wenn α und β durch m theilbar sind, die Brüche auch auf den Nenner $\gamma = \frac{\alpha\beta}{m}$ bringen. (Siehe 123.)

147. *Ein Bruch, dessen Zähler gleich seinem Nenner ist, ist gleich 1.*

Beweis.
$$\frac{\alpha}{\alpha} = \frac{1 \cdot \alpha}{\alpha} \quad \text{(nach 71).}$$
$$= 1 \quad \text{(nach 133).}$$

148. $\frac{a}{1} = a$. *Mit 1 dividiren ändert nichts.*

Beweis.
$$a:1 = a:1:1 \quad \text{(nach 52).}$$
$$= a \quad \text{(nach 130).}$$

149. $\frac{0}{\alpha} = 0$. *Ein Bruch, dessen Zähler null ist, ist selbst gleich Null.*

Beweis.
$$\frac{0}{\alpha} = \frac{\alpha - \alpha}{\alpha} \quad \text{(nach 36).}$$
$$= \frac{\alpha}{\alpha} - \frac{\alpha}{\alpha} \quad \text{(nach 144b).}$$
$$= 1 - 1 \quad \text{(nach 147).}$$
$$= 0 \quad \text{(nach 36).}$$

150. *Hypothesis* $\frac{\alpha}{\beta} = 0$, *Thesis* $\alpha = 0$. *Wenn ein Bruch null ist, so muss sein Zähler null sein.*

Beweis. Nach Hypothesis ist
$$0 = \frac{\alpha}{\beta}, \quad \text{also} \quad 0 \cdot \beta = \frac{\alpha}{\beta}\beta = \alpha \quad \text{(nach 130),}$$
das heisst $0 = \alpha$.

151. *In einem Bruche kann man die Vorzeichen im Zähler und Nenner umkehren, ohne den Werth des Bruches zu ändern, das heisst* 52
$$\frac{P}{Q} = \frac{P'}{Q'} \text{ (siehe Nr. 84).}$$

Beweis. Denn die Vorzeichen im Zähler und Nenner umkehren, heisst (nach 84) Zähler und Nenner mit -1 multipliciren, wodurch (nach 137) der Werth des Bruches nicht geändert wird.

Anmerkung. Man kann daher stets dem Bruche eine solche Form geben, dass der Nenner positiv ist.

152.
$$\frac{-\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{-\beta} = -\frac{\alpha}{\beta}.$$

Das Minus-Zeichen des Zählers oder Nenners kann man vor den Bruch setzen,

oder:

das Minus-Zeichen vor einem Bruche kann man vor den Zähler oder vor den Nenner des Bruches setzen.

Beweis.
$$\frac{\alpha}{-\beta} = \frac{-\alpha}{\beta} \qquad \text{(nach 151).}$$
$$= \frac{0-\alpha}{\beta} \qquad \text{(nach 37).}$$
$$= \frac{0}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta} \qquad \text{(nach 144 b).}$$
$$= 0 - \frac{\alpha}{\beta} \qquad \text{(nach 149).}$$
$$= -\frac{\alpha}{\beta} \qquad \text{(nach 37).}$$

153. *Gleichbezeichnete Zahlen geben bei der Division einen positiven Quotienten, ungleichbezeichnete einen negativen.*

Beweis 1. Es seien α und β positive Zahlen, ihr grösstes gemeinschaftliches Maass sei m und sei $\alpha = am$, $\beta = bm$, wo a und b positiv sind, so ist
$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{am}{bm} = \frac{a}{b} \qquad \text{(nach 137).}$$
Also da a zu b primär ist (nach 115), und b positiv ist, so ist $\frac{a}{b}$ ein reducirter Bruch (nach 138) und da a positiv ist, so ist der reducirte Bruch $\frac{a}{b}$ (nach 138) positiv, also auch $\frac{\alpha}{\beta}$ positiv.

53 2. Es seien $-\alpha$ und $-\beta$ zwei negative Zahlen, also α und β ihre positiven Werthe, so ist
$$\frac{-\alpha}{-\beta} = \frac{\alpha}{\beta} \qquad \text{(nach 151),}$$
aber $\frac{\alpha}{\beta}$ positiv (nach Beweis 1), also auch $\frac{-\alpha}{-\beta}$ positiv.

3. $\frac{-\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{-\beta} = -\frac{\alpha}{\beta}$ (nach 152); aber $\frac{\alpha}{\beta}$ nach Beweis 1 positiv, also $-\frac{\alpha}{\beta}$ negativ.

154. *Alle Verknüpfungsgesetze der Multiplikation und Division (in § 4, 5, 7) gelten auch für Brüche, das heisst alle Formeln dieser Verknüpfungen gelten noch, wenn man statt der allgemeinen Zahlzeichen (die durch griechische Buchstaben ausgedrückt waren) Brüche setzt.*

Beweis. Es sei
$$(*) \qquad b = \frac{\beta}{\beta_1}, \quad c = \frac{\gamma}{\gamma_1}, \text{ so ist}$$

1. [Nr. 68.]
$$(a+b)c = (a+b)\frac{\gamma}{\gamma_1} \qquad \text{(nach *).}$$
$$= \frac{(a+b)\gamma}{\gamma_1} \qquad \text{(nach 139).}$$
$$= \frac{a\gamma + b\gamma}{\gamma_1} \qquad \text{(nach 68).}$$

$$\left\{(a+b)c = \frac{a\gamma + b\gamma}{\gamma_1}\right\} = \frac{a\gamma}{\gamma_1} + \frac{b\gamma}{\gamma_1} \qquad \text{(nach 143b).}$$

$$= a\frac{\gamma}{\gamma_1} + b\frac{\gamma}{\gamma_1} \qquad \text{(nach 139b).}$$

$$= a \,.\, c + b \,.\, c \qquad \text{(nach *).}$$

2. [Nr. 72.]

$$bc = \frac{\beta}{\beta_1}\,\frac{\gamma}{\gamma_1} \qquad \text{(nach *).}$$

$$= \frac{\beta\gamma}{\beta_1\gamma_1} \qquad \text{(nach 140).}$$

$$= \frac{\gamma\beta}{\gamma_1\beta_1} \qquad \text{(nach 72).}$$

$$= \frac{\gamma}{\gamma_1}\,\frac{\beta}{\beta_1} \qquad \text{(nach 140b).}$$

$$= cb.$$

3. [Nr. 66.]

$$a(b+c) = (b+c)a \qquad \text{(Beweis 2).}$$

$$= ba + ca \qquad \text{(Beweis 1).}$$

54

$$= ab + ac \qquad \text{(Beweis 2).}$$

4. [Nr. 58.]

$$a \,.\, (-b) = a \,.\, \left(-\frac{\beta}{\beta_1}\right) \qquad \text{(nach *).}$$

$$= a \,.\, \left(\frac{-\beta}{\beta_1}\right) \qquad \text{(nach 152b).}$$

$$= \frac{a \,.\, (-\beta)}{\beta_1} \qquad \text{(nach 139).}$$

$$= \frac{-a\beta}{\beta_1} \qquad \text{(nach 75).}$$

$$= -\frac{a\beta}{\beta_1} \qquad \text{(nach 152).}$$

$$= -a \cdot \frac{\beta}{\beta_1} \qquad \text{(nach 139b).}$$

$$= -a \,.\, b \qquad \text{(nach *).}$$

5. [Nr. 70.]

$$a(bc) = a\left(\frac{\beta}{\beta_1} \cdot \frac{\gamma}{\gamma_1}\right) \qquad \text{(nach *).}$$

$$= a\,\frac{\beta\gamma}{\beta_1\gamma_1} \qquad \text{(nach 140).}$$

$$= \frac{a\beta\gamma}{\beta_1\gamma_1} \qquad \text{(nach 139).}$$

$$= \frac{a\beta}{\beta_1} \cdot \frac{\gamma}{\gamma_1} \qquad \text{(nach 140b).}$$

$$= a \cdot \frac{\beta}{\beta_1} \cdot \frac{\gamma}{\gamma_1} \qquad \text{(nach 139b).}$$

$$= a \,.\, b \,.\, c \qquad \text{(nach *).}$$

6. [Nr. 71.]

$$1 \,.\, a = a \,.\, 1 \qquad \text{(nach Bew. 2).}$$

$$= a \qquad \text{(nach 52).}$$

Alle übrigen Formeln in § 4 gehen aus diesen Formeln durch Verbindung derselben hervor; da also diese Formeln, wie so eben bewiesen, für Brüche gelten, so gelten auch die aus ihnen hervorgehenden Formeln für Brüche, also alle Formeln in § 4.

7. Ebenso lassen sich die allgemeinen Sätze in § 5 erweitern, und zwar zuerst Satz 88 und 93. Sind nämlich a und b positive Brüche, und zwar in reducirter Form, $a = \frac{\alpha}{\alpha_1}$, $b = \frac{\beta}{\beta_1}$, so sind (nach 138) α_1, β_1, α, β positiv; dann ist

55 [Nr. 88.] $$a + b = \frac{\alpha}{\alpha_1} + \frac{\beta}{\beta_1} = \frac{\alpha\beta_1 + \alpha_1\beta}{\alpha_1\beta_1} \quad \text{(nach 145).}$$

Hier sind $\alpha\beta_1$, $\alpha_1\beta$, $\alpha_1\beta_1$ positiv (nach 93), also auch $\alpha\beta_1 + \alpha_1\beta$ positiv (nach 88), also Zähler und Nenner des Bruches $\frac{\alpha\beta_1 + \alpha\beta}{\alpha_1\beta_1}$ positiv, folglich dieser Bruch selbst positiv (nach 153), also auch das ihm gleiche $a + b$.

Ferner ist unter derselben Annahme

[Nr. 93.] $$a \,.\, b = \frac{\alpha}{\alpha_1} \cdot \frac{\beta}{\beta_1} = \frac{\alpha\beta}{\alpha_1\beta_1} \quad \text{(nach 140).}$$

Aber nach 93 sind $\alpha\beta$ und $\alpha_1\beta_1$ positiv, also nach 153 auch der Bruch $\frac{\alpha\beta}{\alpha_1\beta_1}$, also auch das ihm gleiche ab.

8. Alle übrigen Sätze in § 5 gehen aus den schon für Brüche erwiesenen Sätzen durch wiederholte Anwendung hervor, gelten also auch für Brüche.

9. In § 7 gelten die Sätze 130—137 auch für Brüche, da die Definition (130) allgemein ist und sich die Beweise nur auf die für Brüche schon erwiesenen Sätze § 1—5 stützen; der erste Satz, welcher für Brüche eines neuen Beweises bedarf, ist der Satz 139, da sein Beweis sich auf die Zahlentheorie (§ 6) stützt und diese nicht für Brüche gilt. Nun ist

$$a\frac{b}{c} = a\frac{b}{c} \cdot c : c \quad \text{(nach 133).}$$

$$= a \cdot \left(\frac{b}{c} \cdot c\right) : c \quad \text{(nach 70b).}$$

$$= a \,.\, b : c = \frac{ab}{c} \quad \text{(nach 130).}$$

10. Ausserdem wird nur noch in Nr. 153 Beweis 1 auf § 6 zurückgegangen. Wenn aber wiederum a und b positive Brüche sind und zwar $\frac{\alpha}{\alpha_1}$, $\frac{\beta}{\beta_1}$ ihre reducirten Formen, so sind (nach 138) α, β, α_1, β_1 positiv, also

$$a : b = \frac{\alpha}{\alpha_1} : \frac{\beta}{\beta_1} = \frac{\alpha}{\alpha_1} \cdot \frac{\beta_1}{\beta} \quad \text{(nach 141).}$$

Aber $\frac{\alpha}{\alpha_1}$ und $\frac{\beta_1}{\beta}$ sind (nach 153) positive Brüche, also † auch ihr 56 Produkt positiv (nach Beweis 7), also auch das diesem Produkte gleiche $a:b$.

Es gelten also auch alle Sätze in § 7 für Brüche, also alle Sätze in § 4, 5, 7.

155. Der Quotient zweier gleichbenannten Grössen ist gleich dem Quotienten ihrer Zahlwerthe, das heisst

$$\frac{e\alpha}{e\beta} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Beweis. Nach 130 ist $\frac{e\alpha}{e\beta}$ diejenige, einer Grundreihe angehörige Grösse, welche mit $e\beta$ zu einem Produkte verknüpft $e\alpha$ giebt; das heisst, wenn

$$(*) \quad \frac{e\alpha}{e\beta} = x$$

ist, so ist

$$e\alpha = e\beta x = e(\beta x) \qquad \text{(nach 70 b).}$$

Also da die Einheit (nach 7, 10) immer von Null verschieden ist,

$$\alpha = \beta x \qquad \text{(nach 96).}$$

$$= x\beta \qquad \text{(nach 72).}$$

Also

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{x\beta}{\beta} = x \qquad \text{(nach 133).}$$

$$= \frac{e\alpha}{e\beta} \qquad \text{(nach *).}$$

Anmerkung 1. Der Quotient zweier benannter Grössen hat nur dann einen Sinn, wenn Dividend und Divisor aus derselben Grundreihe ableitbar sind. Denn das Produkt, dessen einer Faktor eine benannte Grösse ist, gehört (nach 60) derselben Grundreihe an, wie diese.

Anmerkung 2. Da hiernach die Division benannter Grössen (die Messungsaufgabe) stets auf die Division der Zahlgrössen zurückgeführt werden kann, so ist es nicht nöthig, die Gesetze jener Division aufzustellen.

Inhalt.

XXIV.

Stücke aus dem Lehrbuche der Trigonometrie.

Lehrbuch | der | Trigonometrie | für | höhere Lehranstalten | von |
Hermann Grassmann, | Professor am Gymnasium zu Stettin. | Berlin, 1865. |
Verlag von Th. Chr. Fr. Enslin. | (Adolf Enslin.)
Auch unter dem Titel: Lehrbuch | der | Mathematik | für | höhere Lehranstalten | etc.
Zweiter Theil: | Trigonometrie.

V

Vorrede.

Die vorliegende Trigonometrie bildet den zweiten Theil des Lehrbuches der Mathematik, dessen erster Theil unter dem besonderen Titel „Lehrbuch der Arithmetik u. s. w. Berlin 1861“ erschienen ist. Mit diesen beiden Theilen ist die ganze berechnende Seite der Mathematik, sofern sie Gegenstand des Schulunterrichtes ist, abgeschlossen. Wann der dritte Theil, welcher nach des Verfassers Plane die Geometrie (Planimetrie und Stereometrie) umfassen sollte, erscheinen wird, hängt von der Aufnahme ab, welche diese beiden ersten Theile erfahren. Um einen möglichst einfachen Anfang zu gewinnen, ist hier zuerst (§ 1) vorausgesetzt, dass die Winkel spitze seien, und zwar ist zuerst (bis Nr. 13) nur der cosinus eines solchen Winkels betrachtet. Dass man zuerst nur eine der trigonometrischen Funktionen zu Grunde lege, ist methodisch geboten, dass dazu hier und in § 2, Nr. 30—47 der cosinus gewählt ist, hat seinen Grund hauptsächlich darin, dass der cosinus ein Verhältnis darstellt, in welchem nur Stücke der beiden Schenkel des Winkels vorkommen, und daher hier die Zeichenbestimmung auf das einfachste erfolgt. In § 2 werden beliebige Winkel betrachtet; und um möglichste Allgemeinheit und Einfachheit zu verbinden, wird das Gesetz für den cosinus der Summe, ohne dass es nöthig wird, einzelne Fälle zu unterscheiden, sogleich in seiner ganzen Allgemeinheit erwiesen, und daraus alle übrigen Gesetze durch Rechnung abgeleitet. An die Auflösung des Dreiecks aus dreien seiner

sechs Stücke schliessen sich Nr. 94—109 zahlreiche Dreiecksaufgaben, welche sowohl zur Einübung des bisher Erlernten, als auch zur Vermittelung mit den Dreiecksaufgaben der Geometrie dienen, und bei der ersten Durchnahme entweder ganz übergangen oder mit Auswahl benutzt werden können. Bei der Auflösung der Vielecke (§ 4) ist die des Viereckes bis ins Einzelne durchgeführt; die beliebiger Vielecke zwar vollständig, aber doch nur mehr andeutungsweise behandelt (Seite 69). In § 5 folgen die wichtigsten Vermessungsaufgaben; und in § 6—8 Beziehungen der Trigonometrie zu andern mathematischen Gebieten, welche bei dem ersten Unterrichte in der Trigonometrie den Schülern noch unbekannt zu sein pflegen, namentlich zu den unendlichen Reihen, zu den höheren Gleichungen und † zur Stereometrie. VI Es werden diese Abschnitte, auch wenn sie auf einer Anstalt gar nicht, oder nur unter besonders günstigen Verhältnissen vorgetragen werden können, doch den fähigeren Schülern Gelegenheit geben, sich durch Privatfleiss weiter zu fördern. Die sphärische Trigonometrie (§ 8) ist übrigens in der Weise behandelt, dass sie gar keine Kenntnisse aus der Stereometrie voraussetzt. Die ganze Behandlung des Stoffes ist von der in dem Lehrbuche der Arithmetik gewählten dadurch verschieden, dass in den Anmerkungen überall die leitende Idee und der Gang der weiteren Entwickelung hervorgehoben ist, und dadurch für die heuristische Methode des Lehrers, so wie für das tiefere Eindringen des Schülers wesentliche Erleichterungen geboten sind.

Stettin, den 2. Oktober 1864.

Der Verfasser.

Inhalt. VII

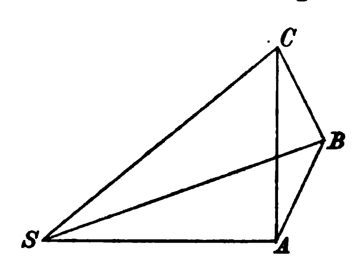
§ 8.

(100) **Körperliche oder sphärische Trigonometrie.**

144. Grundsatz der Stereometrie. Durch zwei sich schneidende gerade Linien kann man stets eine Ebene legen (so dass die beiden sich schneidenden geraden Linien ganz in der Ebene liegen).

145. *Erklärung.* Wenn von einem Punkte drei nicht in einer Ebene liegende Strahlen ausgehen, so nennt man den Verein dieser drei Strahlen eine dreikantige Ecke oder ein Dreikant; den Punkt, 101 von welchem die Strahlen † ausgehen, den Scheitelpunkt, die Strahlen selbst die Kanten, die zwischen je zwei Strahlen liegenden Ebenen die Seitenflächen, und die zwischen ihnen liegenden Winkel die Seiten der Ecke. Sind zum Beispiel SA, SB, SC die drei Strahlen, so ist S der Scheitelpunkt, und die Winkel BSC, CSA, ASB sind die Seiten der Ecke, und die Ebenen BSC u. s. w. die Seitenflächen der Ecke.

146. *Erklärung.* Errichtet man auf einer Kante (SA) einer Ecke in einem beliebigen Punkte (A) Lothe, welche in den beiden Seitenflächen (SAB und SAC) liegen, so heisst der Winkel, welchen diese Lothe einschliessen, ein Winkel (Innenwinkel) der Ecke, und zwar der zu jener Kante (SA) gehörige. Die Nebenwinkel dieser Innenwinkel heissen Aussenwinkel der Ecke. Wenn also von jenen Lothen das eine AB die Kante SB in B, das andere die Kante SC in C trifft, so ist BAC der an der Kante SA liegende Winkel der Ecke $SABC$.



Anmerkung. Schlägt man mit demselben Radius zum Beispiel SA in den drei Seitenflächen der Ecke Kreisbogen, deren Centriwinkel die Seiten ASB, BSC, CSA sind, nämlich die Kreisbogen AD, DE, EA, so entsteht ein aus Kreisbogen bestehendes Dreieck, welches man, da es sich auf die Oberfläche einer Kugel legen läßt, ein sphärisches Dreieck nennt. Die Seiten dieses sphärischen Dreiecks sind Kreisbogen, welche die Seiten der Ecke messen, und die Winkel desselben sind diejenigen Winkel, welche die an den Kreisbogen gezogenen Tangenten in jedem Eckpunkte bilden, da aber die Tangenten auf dem Radius im Berührungspunkte senkrecht stehen, so ist der Winkel, den sie bilden, derselbe, der vorher der Winkel der dreikantigen Ecke genannt wurde. Seiten und Winkel dieses sphärischen Dreiecks stimmen also mit denen der dreikantigen Ecke überein; und jenes Dreieck auflösen heisst ebenso viel als diese Ecke auflösen. Diese Auflösung ist der Hauptgegenstand der körperlichen oder sphärischen Trigonometrie.

Es sollen im Folgenden die Seiten der Ecke $SABC$ stets mit den Buchstaben a, b, c bezeichnet werden, indem $\angle BSC = a$, $CSA = b$, $ASB = c$ gesetzt

wird, die Aussenwinkel der Ecke sollen mit α, β, γ, nämlich der an der † Kante 102 SA mit α u. s. w., und es soll vorausgesetzt werden, dass diese sämtlichen Grössen nie negativ und nie grösser als 180^0 werden. Die Aussenwinkel in Betracht zu ziehen ist darum angemessener, weil dabei die Formeln viel symmetrischer werden, als wenn man die Innenwinkel einführt. Wo es erforderlich ist, sollen die Innenwinkel mit α', β', γ' bezeichnet werden. Zuerst soll eine Gleichung zwischen einem Winkel α und den drei Seiten a, b, c gesucht werden. Dazu reicht die obige Figur aus. Drückt man in ihr die Seite BC vermittelst des erweiterten Pythagoras durch die beiden Dreiecke, in denen BC liegt, aus, so ergiebt sich durch Gleichsetzung dieser beiden Ausdrücke die verlangte Gleichung.

147. *Es ist*

$$\cos a = \cos b \cos c - \sin b \sin c \cos \alpha,$$
$$\cos b = \cos a \cos c - \sin a \sin c \cos \beta,$$
$$\cos c = \cos a \cos b - \sin a \sin b \cos \gamma,$$

das heisst, man findet den cos. *einer Seite des Dreikantes, indem man in der Formel für den* cos. *der Summe der beiden andern Seiten das zweite Glied mit dem* cos. *des an diesen beiden liegenden Aussenwinkels multiplicirt.*

Beweis. Wenn die Figur dieselbe ist, wie in 146, so hat man vermöge des erweiterten Pythagoras:

$$BC^2 = SB^2 + SC^2 - 2SB \,.\, SC \cos a,$$
$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \,.\, AC \cos \alpha',$$

das heisst:
$$= AB^2 + AC^2 + 2AB \,.\, AC \cos \alpha.$$

Subtrahirt man die zweite Gleichung von der ersten und bedenkt, dass SB Hypotenuse und AB Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks sind, dessen andere Kathete SA ist, das heisst, dass $SB^2 - AB^2 = SA^2$, und aus gleichem Grunde $SC^2 - AC^2 = SA^2$ ist, so erhält man

$$0 = 2SA^2 - 2SB \,.\, SC \cos a - 2AB \,.\, AC \cos \alpha,$$

also

$$\cos a = \frac{SA^2 - AB \,.\, AC \cos \alpha}{SB \,.\, SC}.$$

Dividirt man einzeln, so ergiebt sich, da

$$SA : SB = \cos c, \quad SA : SC = \cos b,$$
$$AB : SB = \sin c, \quad AC : SC = \sin b$$

ist,

$$\cos a = \cos b \cos c - \sin b \sin c \cos \alpha.$$

Durch Umänderung der Benennung gehen hieraus die beiden andern Formeln hervor.

Anmerkung. Da in den obigen drei Gleichungen sechs Grössen vor- 103 kommen, so können wir drei beliebige derselben als unbekannte setzen, und diese drei unbekannten vermittelst der drei Gleichungen durch die drei als bekannt gesetzten Stücke finden, und so die sämtlichen Fälle, welche bei der Auflösung des Dreikantes vorkommen können, durchführen. Es soll zunächst die Gleichung

zwischen zwei Seiten und ihren Gegenwinkeln gesucht werden, zum Beispiel zwischen a, b, α, β. Dazu hat man nur aus den beiden ersten Gleichungen in 147 die Seite c zu eliminiren. Dies geschieht am besten, indem man in beiden Gleichungen das erste Glied der rechten Seite nach links herüberschafft, und die Summe der so erhaltenen Gleichungen mit ihrer Differenz multiplicirt, wobei c sich weghebt.

148. $$\sin a : \sin b : \sin c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma,$$

das heisst, die sin. *der Seiten eines Dreikantes verhalten sich wie die* sin. *ihrer Gegenwinkel (wobei es gleichgültig ist, ob man die Aussen- oder Innen-Winkel wählt).*

Beweis. Aus 147 erhält man

$$\cos a - \cos b \cos c = - \sin b \sin c \cos \alpha.$$
$$\cos b - \cos a \cos c = - \sin a \sin c \cos \beta.$$

Diese beiden addirt geben

$$(\cos a + \cos b)(1 - \cos c) = - \sin c (\sin b \cos \alpha + \sin a \cos \beta),$$

und subtrahirt

$$(\cos a - \cos b)(1 + \cos c) = - \sin c (\sin b \cos \alpha - \sin a \cos \beta),$$

und diese mit einander multiplicirt, da das Produkt aus Summe und Differenz zweier Grössen die Differenz der Quadrate dieser Grössen liefert,

$$(\cos^2 a - \cos^2 b)(1 - \cos^2 c) = \sin^2 c (\sin^2 b \cos^2 \alpha - \sin^2 a \cos^2 \beta).$$

Da nun $1 - \cos^2 c = \sin^2 c$ ist, so heben sich diese beiden Faktoren weg, und man erhält

$$\cos^2 a - \cos^2 b = \sin^2 b \cos^2 \alpha - \sin^2 a \cos^2 \beta.$$

Führt man hier nach der Formel $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ überall die sin. ein, so erhält man

$$\sin^2 b - \sin^2 a = \sin^2 b - \sin^2 b \sin^2 \alpha - \sin^2 a + \sin^2 a \sin^2 \beta,$$

also

$$0 = - \sin^2 b \sin^2 \alpha + \sin^2 a \sin^2 \beta,$$

oder

$$\sin^2 b \sin^2 \alpha = \sin^2 a \sin^2 \beta,$$

das heisst

$$\sin b \sin \alpha = \mp \sin a \sin \beta.$$

104 Da nun aber die Winkel und Seiten überall als positiv und $\dagger < 180^0$ anzunehmen sind, so sind die sin. alle positiv, also ist das $+$-Zeichen zu wählen, und man erhält

$$\sin b \,.\, \sin \alpha = \sin a \sin \beta,$$

das heisst

$$\sin a : \sin b = \sin \alpha : \sin \beta,$$

und hieraus folgt durch Umänderung der Benennung auch die Formel $\sin b : \sin c = \sin \beta : \sin \gamma$.

Anmerkung. In der Stereometrie kann man diese Formel auf eine sehr leichte und anschauliche Weise aus der Figur ableiten, wozu jedoch mehrere stereometrische Sätze erforderlich sind.

149. *Aufgabe.* Eine Gleichung zwischen α, β, γ und c aufzustellen.

Auflösung. Es kommt also darauf an, aus den Gleichungen 147 die Grössen a und b wegzuschaffen. Da (nach 148) $\sin a = \sin \alpha \sin c : \sin \gamma$ ist, und $\sin b = \sin \beta \sin c : \sin \gamma$, so kann man $\sin a$ und $\sin b$ stets unmittelbar durch die Grössen ausdrücken, welche in der verlangten Gleichung allein vorkommen sollen.

Schwieriger ist dies für $\cos a$ und $\cos b$. Es ist daher zweckmässig, in den Gleichungen 147 die Glieder, welche die cos. der Seiten enthalten, auf eine Seite allein zu schaffen. Dann erhalten jene Gleichungen die Form:

$$\sin b \sin c \cos \alpha = \cos b \cos c - \cos a,$$
$$\sin a \sin c \cos \beta = \cos a \cos c - \cos b,$$
$$\sin a \sin b \cos \gamma = \cos a \cos b - \cos c.$$

Multiplicirt man die beiden ersten mit einander, so erhält man

$$\sin a \sin b \sin^2 c \cos \alpha \cos \beta = (\cos b \cos c - \cos a)(\cos a \cos c - \cos b)$$
$$= \cos a \cos b \cos^2 c + \cos a \cos b - \cos c (\cos^2 a + \cos^2 b),$$

oder indem man statt des zweiten Gliedes $\cos a \cos b$ aus der dritten Gleichung seinen Werth $\sin a \sin b \cos \gamma + \cos c$ setzt und den Faktor $\cos c$ heraushebt,

$$= \sin a \sin b \cos \gamma + \cos c (\cos a \cos b \cos c + 1 - \cos^2 a - \cos^2 b).$$

Nun ist $1 - \cos^2 a - \cos^2 b + \cos^2 a \cos^2 b = (1 - \cos^2 a)(1 - \cos^2 b)$ oder $\sin^2 a \sin^2 b$, somit kann man statt $1 - \cos^2 a - \cos^2 b$ setzen $\sin^2 a \sin^2 b - \cos^2 a \cos^2 b$, und es wird der vorige Ausdruck

$$= \sin a \sin b \cos \gamma +$$
$$+ \cos c (\cos a \cos b \cos c - \cos^2 a \cos^2 b + \sin^2 a \sin^2 b)$$
$$= \sin a \sin b \cos \gamma +$$
$$+ \cos c [\sin^2 a \sin^2 b - \cos a \cos b (\cos a \cos b - \cos c)],$$

also, indem man nach der dritten Gleichung statt $\cos a \cos b - \cos c$ 105 seinen Werth $\sin a \sin b \cos \gamma$ setzt und die Klammer löst,

$$= \sin a \sin b \cos \gamma + \cos c \sin^2 a \sin^2 b - \cos a \cos b \cos c \sin a \sin b \cos \gamma.$$

Jetzt ist die ganze Gleichung durch $\sin a \sin b$ theilbar und man erhält

$$\sin^2 c \cos \alpha \cos \beta = \cos \gamma + \sin a \sin b \cos c - \cos a \cos b \cos c \cos \gamma.$$

Setzt man hierin wiederum statt $\cos a \cos b$ seinen Werth $\cos c + \sin a \sin b \cos \gamma$, so wird der obige Ausdruck

$$= \cos \gamma + \sin a \sin b \cos c - \cos^2 c \cos \gamma - \sin a \sin b \cos c \cos^2 \gamma,$$

also, indem man das erste und dritte, das zweite und vierte Glied zusammenfasst und die Formel $1 - \cos^2 x = \sin^2 x$ anwendet,

$$= \cos \gamma \sin^2 c + \sin a \sin b \cos c \sin^2 \gamma.$$

Dividirt man diese Gleichung mit $\sin^2 c$, so erhält man

$$\cos \alpha \cos \beta = \cos \gamma + \frac{\sin a \sin b \cos c \sin^2 \gamma}{\sin^2 c}.$$

Da endlich $\sin a \sin \gamma : \sin c = \sin \alpha$ und $\sin b \sin \gamma : \sin c = \sin \beta$ ist (nach 148), so erhält man

$$* \quad \cos \alpha \cos \beta = \cos \gamma + \sin \alpha \sin \beta \cos c,$$

was die verlangte Gleichung ist.

150. *Es ist*

$$\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma - \sin \beta \sin \gamma \cos a,$$
$$\cos \beta = \cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \gamma \cos b,$$
$$\cos \gamma = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \cos c.$$

Beweis. Aus der Formel 149* hat man

$$\cos \gamma = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \cos c,$$

und hieraus gehen die übrigen Gleichungen durch Umänderung der Benennung hervor.

151. Alle auf ein Dreikant sich beziehenden Gleichungen (sofern sie aus den Grundgleichungen Nr. 147 abgeleitet sind) bleiben bestehen, wenn man statt der Seiten die entsprechenden Aussenwinkel, und umgekehrt statt dieser jene setzt (das heisst, statt der lateinischen Buchstaben die entsprechenden griechischen und umgekehrt setzt).

106 *Beweis.* Denn die Gleichungen 150 unterscheiden sich nur auf die angegebene Art von den Gleichungen 148; zu allen Formeln also, welche sich aus den letzteren ableiten lassen, müssen sich aus den ersteren die entsprechenden ableiten lassen, welche sich von jenen nur durch Umwechselung der griechischen mit den lateinischen Buchstaben unterscheiden.

Anmerkung. Diese einfache Beziehung hört auf, wenn man statt der Aussenwinkel die Innenwinkel einführen wollte. In der Stereometrie kann dieser Satz unmittelbar aus den Eigenschaften der sogenannten Polarecken abgeleitet werden, woraus sich dann auch 149 und 150 unmittelbar ergeben. Aus den bisher entwickelten Formeln kann man die Gleichungen für die Auflösung eines durch beliebige drei Stücke gegebenen Dreikantes ableiten. Doch ist noch zuvor eine in der Formel 148 vorhandene Unbestimmtheit aufzuheben. Wenn nämlich nach dieser Formel eine der vier Grössen a, b, α, β aus den drei übrigen gesucht

werden soll, so giebt die Formel $\sin a : \sin b = \sin \alpha : \sin \beta$ nur den sin. der gesuchten Grösse, und da Supplementwinkel gleichen sin. haben, so kann man aus jener Gleichung nicht beurteilen, ob der spitze oder stumpfe Winkel zu wählen ist, oder ob beide der Gleichung genügen. Diese Unbestimmtheit wird durch den folgenden Satz beseitigt.

152. Wenn $\sin a \geqq \sin b$, oder was (nach 148) dasselbe ist, $\sin \alpha \geqq \sin \beta$ ist, so ist b allemal mit dem Innenwinkel β' gleichartig, das heisst, wenn b ein spitzer Winkel ist, so ist auch β' ein spitzer u. s. w.

Beweis. Aus der zweiten Formel 147 hat man

$$\cos \beta = \frac{\cos a \cos c - \cos b}{\sin a \sin b},$$

also da β und β' Supplementwinkel sind und also entgegengesetzten cos. haben, so ist

$$* \quad \cos \beta' = \frac{\cos b - \cos a \cos c}{\sin a \sin b}.$$

Wenn nun $\sin a \geqq \sin b$ ist, so ist auch

$$\sin^2 a \geqq \sin^2 b,$$

das heisst

$$1 - \cos^2 a \geqq 1 - \cos^2 b,$$

also

$$\cos^2 b \geqq \cos^2 a.$$

Da nun der cosinus für Winkel, welche $> 0^0$ und $< 180^0$ sind, seinem positiven Werthe nach stets kleiner als 1 ist, so ist

$$\cos^2 a \geqq \cos^2 a \cos^2 c.$$

Beide Gleichheitszeichen gelten nur, wenn $\cos a = \cos b = 0$ † ist; aber 107 dann ist (nach *) auch $\cos \beta' = 0$, also b und $\beta' = 90^0$, also gleichartig. In jedem andern Falle ergiebt sich

$$\cos^2 b > \cos^2 a \cos^2 c, \quad \text{das heisst} \quad > (\cos a \cos c)^2;$$

das heisst, der positive Werth von $\cos b$ ist grösser als der von $\cos a \cos c$, also ist $\cos b - \cos a \cos c$ gleich bezeichnet mit $\cos b$, also auch in dem obigen Ausdruck für $\cos \beta'$ der Zähler gleich bezeichnet mit $\cos b$. Da nun der Nenner als Produkt der sinus zweier Winkel (die zwischen 0^0 und 180^0 liegen) stets positiv ist, so ist der ganze Bruch gleich bezeichnet mit $\cos b$, das heisst $\cos \beta'$ gleich bezeichnet mit $\cos b$, also β' mit b gleichartig.

Anmerkung. Wenn also $\sin a \geqq \sin b$, oder was dasselbe ist, $\sin \alpha \geqq \sin \beta$ ist, so ist durch a, b, α stets der Winkel β genau bestimmt, und ebenso durch α, β, a die Seite b. Ist hingegen $\sin a < \sin b$, oder anders ausgedrückt, $\sin \alpha < \sin \beta$, so wird (wenn die Ecke überhaupt möglich bleibt) im ersten Falle β, im zweiten b zweideutig, indem sie sowohl einen spitzen als einen stumpfen Werth haben können.

Verzeichniss

der wichtigsten Stellen, an denen die vorliegende Ausgabe von den Originaldrucken abweicht.*)

I. Theorie der Centralen.

S. 5, Z. 4 v. u. (264, Z. 13 v. u.): dz statt dx. — S. 7, Z. 8 v. u. (266, Z. 16): „$n = s$". — S. 8, Z. 9 (266, Z. 4 v. u.): „Grundzahl". — S. 8, Z. 20 (267, Z. 9) fehlt q. — S. 8, Z. 21 f. (267, Z. 10 f.): „statt PQ, PS_1 u. s. w. q, s_1 u. s. w. gesetzt ist, worin". — S. 8, Z. 12 v. u. (267, Z. 16): q_a statt q^a. — S. 12, Z. 7, 8 (270, Z. 6, 5 v. u.): „mit $\alpha_m \overset{\cdot m}{n} (-1)^m$ multiplicirt hat" und F_n statt F_a. — S. 12, Z. 8 v. u. (271, Z. 8): „der harmonischen Mittel". — S. 15, Z. 1 v. u. (274, Z. 14) steht im Nenner QS_1 statt PS_1. — S. 18, Z. 1 f. (276, Z. 7 f.): „wieder statt $1 - \frac{q}{s_1}$, $\frac{QS_1}{PS_1}$ u. s. w. setzt." — S. 18, Z. 12 (276, Z. 12 v. u.): „für die einfachste Form". — S. 19, Z. 16 (277, Z. 10 v. u.). Das Zeichen*) steht im Originale hinter „hervorheben wollen". — S. 19, Z. 4 v. u. (277, Z. 3 v. u.) fehlt „dann". — S. 26, Z. 6 (374, Z. 12) „von" statt „vom". — S. 26, Z. 3 v. u. (375, Z. 5): „dessen Classenanzahl". — S. 27, Z. 5 (375, Z. 11): „Somit ist folglich die". — S. 27, Z. 23 (375, Z. 9 v. u.): „im $(n - 1)$-ten Grade". — S. 29, Z. 12 v. u. (377, Z. 3 v. u.): „auf jeder derselben". — S. 30, Z. 16 (378, Z. 20) fehlt P. — S. 30, Z. 18, 20 (378, Z. 21, 23) steht: $\left(\frac{QS_1}{PS_1}\right) \cdots \left(\frac{QS_n}{PS_n}\right)^{\cdot m} = 0$ und: $\left(\frac{S_1 S_2}{PS_2}\right) \cdots \left(\frac{S_1 S_n}{PS_n}\right)^{\cdot m} = 0$. — S. 31, Z. 18 (379, Z. 23): „Somit ergiebt sich also". — S. 40, Z. 2 v. u. (65, Z. 5 v. u.): „$\varphi = \frac{x}{a}$". — S. 41, Z. 1, 4 (65, Z. 3, 1 v. u.): m statt n. — S. 47, Z. 2 (72, Z. 4): „dass man statt $\frac{QS_2}{QS_1}$, $\left(1 - \frac{q}{s_1}\right)$ u. s. w. setzt, und dann". — S. 48, Z. 3 v. u. (73, Z. 2 v. u.): F statt F_a. —

*) Die erste Seitenzahl bezieht sich immer auf die vorliegende Ausgabe, die in Klammern eingeschlossene auf den Originaldruck, dahinter steht, wenn nichts andres bemerkt ist, der Wortlaut der Originalausgabe. Die im Texte gemachten Zusätze zum Original werden hier nicht mit aufgeführt, da sie durch Einschliessen in geschweifte Klammern { } kenntlich gemacht sind. Die Kopfüberschriften der vorliegenden Ausgabe sind sämtlich neu.

II. Grundzüge zu einer rein geometrischen Theorie der Kurven.

Die Eintheilung in Paragraphen ist neu.

S. 50, Z. 4 (111, Z. 8 v. u.): „3 . (3 — 1)“, von Grassmann selbst in einem Exemplar des Originaldrucks verbessert.

S. 51, Fig. 1. In dieser und in den folgenden Figuren haben wir feste Punkte durch gefüllte, bewegliche durch leere kleine Kreise, feste Gerade durch starke, bewegliche durch schwache Linien gekennzeichnet. In den Originalabhandlungen sind, soweit im Folgenden nichts anderes bemerkt wird, die Figuren auf Tafeln beigefügt. Wir haben sie durchgehend nummerirt und geben im Folgenden die Abweichungen in der Nummerirung an.

S. 54, Z. 4 (115, Z. 14): „Verknüpfungsart“. — S. 55, Z. 13 v. u. (116, Z. 5 v. u.): „dass dann der Punkt“. — S. 56, Z. 16 v. u. (118, Z. 1): „liegen“, schon von Grassmann selbst handschriftlich verbessert. — S. 57, Z. 15 (118, Z. 18): „— $a'c$“ statt „— $c'a$“. — S. 57, Z. 20 und auch später (118, Z. 23): „φ, χ, ψ“. — S. 57, Z. 22 (118, Z. 24): „wie“ statt „dass“. — S. 58, Z. 6 (119, Z. 8): „haben, dass dann“. — S. 58, Z. 12, 21, 28 (119, Z. 14, 21, 28): „was den in dem Satze“, „aus jenen Geraden“, „u. s. w. Zuflucht“ schon von Grassmann selbst handschriftlich verbessert. — S. 61, Z. 2, 1 v. u. (122, Z. 3 v. u.): „das Gebilde ein n-ten Grades nennen“. Grassmann selbst hat handschriftlich „unbestimmtes“ hinzugefügt. — S. 63, Z. 2 v. u. (123, Z. 10 v. u.): „Kurven“. — S. 64, Z. 3—7 (123, Z. 6—2 v. u.) „DD_1cBxa, DD_1cB, DD_1cBa_1, DD_1cBa_1D, $D_1Dc_1B_1aD_1$“ — S. 64, Z. 12—15 (124, Z. 2—4): „so fällt axB wieder in x zurück, $xcDxD_1c_1$ giebt die Linie cc_1 und die Gleichung (13) reducirt sich auf $cc_1Bxa_1 = 0$, d. h. der Punkt cc_1B liegt mit den Punkten x und a_1 in gerader Linie; was, da x in B liegt, . . .“. — S. 64, Z. 3 v. u. (124, Z. 2 v. u.): „nicht in BB_1 liegt“. — S. 65, Z. 1 (124, Z. 14 v. u.): im Original steht richtig „c_1 und c“, hier leider verdruckt. — S. 65, Z. 10 (124, Z. 7 v u.): „nicht in gerader Linie“, schon von Grassmann selbst handschriftlich verbessert. — S. 66, Z. 8 (125, Z. 11 v. u.): „(xCc)“. — S. 68, Z. 4 (127, Z. 11): „$n$mal“, „$n$ten“. — S. 68, Z. 9 v. u. (127, Z. 1 v. u.): „um welche“. — S. 68, Z. 3 v. u. (128, Z. 5): „. . . $cx = 0$“. — S. 69, Z. 3 (128, Z. 9): „$a \dots a_n$“. — S. 71, Z. 17 v. u. (130, Z. 4 v. u.): „als Durchschnitt“, von Grassmann selbst schon handschriftlich verbessert. — In Figur 9 des Originals (s. S. 63) steht d_1 an der Stelle, wo die Verlängerung von ea_1 die Gerade D_1 trifft; in Figur 10 (S. 64) fehlen die Buchstaben D und D_1.

III. Ueber die Erzeugung der Kurven dritter Ordnung.

Figur 14 u. 16 (hier verkleinert) tragen im Original die Nummern 1 u. 2; Figur 15 ist neu hinzugefügt. In Fig. 14 ist a_1 mit b_1 vertauscht. — S. 75, Z. 2 (178, Z. 17): „a, b, a_1, b_1“. — S. 76, Z. 9 (179, Z. 17): „gleich xb und die dritte gleich xd; was mit xb“. —

IV. Der allgemeine Satz über die Erzeugung aller algebraischer Kurven.

Fig. 17—19, S. 81—83 tragen im Original die Nummern 1—3. — S. 81, Z. 3 v. u. (188, Z. 9, 8 v. u.): „die Parallele mit ba“, „die Abscissen in y'“. — S. 82, Z. 23 f. (189, Z. 9 f.): dreimal „mit“ statt „zu“. S. 84, Z. 18 v. u. (191, Z. 9): „g“ statt „y“.

V. Die höhere Projektivität und Perspektivität in der Ebene.

Die Paragrapheneintheilung ist neu. Die Figuren 20—22, S. 92, 93, 97 tragen im Original die Nummern 4, 5, 6. — S. 87, Z. 2 f. (193, Z. 9 v. u.): „c“ statt „C“. — S. 87, Z. 13 v. u. (194, Z. 17): „AB ungleich“. — S. 90, Z. 5 (196, Z. 14 v. u.): „der andere“. — S. 94, Z. 12 (199, Z. 1 v. u.): „Werth“ statt „Strahl“. — S. 94, Z. 18 (200, Z. 7): „c_1“ statt „e_1“. — S. 94, Z. 26 (200, Z. 14): „(9)“ statt „(9a)“. — Z. 95, Z. 15 (200, Z. 1 v. u.): Im Originale steht richtig „$XAG = 0$“, hier leider verdruckt. — S. 95, Z. 8 v. u. (201, Z. 13): „in A liegen“. — S. 96, Z. 15 (201, Z. 5 v. u.): „indem xa nur Null wird für $x \equiv a$“. — Z. 97, Z. 9, 7 v. u. (203, Z. 6, 8): „That geht dann die Formel (12)“; „welcher offenbar“.

VI. Die höhere Projektivität in der Ebene.

Fig. 23, S. 105 trägt im Original die Nummer 7. — S. 100, Z. 7, 8, 9, 12 (204, Z. 2, 1 v. u., 205, Z. 1, 3): A, B, C statt $A = 0$, u. s. w. — S. 100, Z. 11, 13 (205, Z. 2, 4): „α“ statt „a“. — S. 101, Z. 12 f. (206, Z. 3 f.): „Kurvenreihe n-ter Klasse) und diesen m-ter Klasse, zu einander“. — S. 102, Z. 1 f. (206, Z. 10 v. u.): „auf dem bekannten Satze“. — S. 105, Fig. 23, im Original steht „C_1“ statt „c“. — S. 106, Z. 8, 7 v. u. (211, Z. 4): „darstellt: dass dann“. — S. 107, Z. 7 v. u. (212, Z. 1): „genüge“.

VII. Erzeugung der Kurven vierter Ordnung.

Die Figuren 24, S. 110 bis 32, S. 130 tragen im Original die Nummern 1—9. In Fig. 24: „H“ statt „F“, in Fig. 25 fehlen Y, (p_1), (p_2), in Fig. 26 und 28 fehlt (p_1), in Fig. 29 fehlt Y, in Fig. 30 fehlt Z und die links unten liegende feste Gerade, in Fig. 32 fehlt F. — S. 109, Z. 1 v. u. (1, Z. 10 v. u.): „y“ statt „Y“. — S. 110, Z. 4 v. u. (2, Z. 7): „von der Diagonale“. — S. 111, Z. 13 v. u. (2, Z. 15 v. u.): „sich drehen“. — S. 112, Z. 5 (3, Z. 3): „(S. 244 ff.)“. — S. 113, Z. 19 (4, Z. 7): „äussersten Schenkel“. — S. 113, Z. 2 v. u. (4, Z. 13 v. u.): „Ax_x“ und „(6)“ statt „A_x“ und „(1)“. — S. 114, Z. 13 v. u. (5, Z. 11): „xB“ statt „Bx“. — S. 115, Z. 4 (5, Z. 14, 13 v. u.): „Linear-Faktoren“. — S. 115, Z. 6 f. (5, Z. 11 v. u.): „in kleinere schliesst“. — S. 115, Z. 13, 14, 15 (5, Z. 6, 5, 4 v. u.): „fg“ statt „gf“, das letzte Mal fehlt: „$= 0$“. — S. 116, Z. 1—6 (6, Z. 16—11 v. u.), da schon andere Formeln diese Nummern tragen, so sind später überall da, wo bei Verweisungen Zweifel entstehen könnten, die Seitenzahlen hinzugefügt worden. In den beiden letzten Formeln des Originals fehlt der Faktor C. — S. 116, Z. 12 f. (6, Z. 5, 4

v. u.): „so wird es als ... Punkte sich zeigen". — S. 116, Z. 20 (7, Z. 3): „enthalte". — S. 116, Z. 21 (7, Z. 4): „ABc" statt „AB". — S. 117, Z. 16 (7, Z. 5 v. u.): „mache". — S. 117, Z. 7, 5 v. u. (8, Z. 13, 14): „dieselbe", „drücken" statt „dasselbe", „drückt". — S. 118, Z. 1 (8, Z. 19): „Gleichung (d)". — S. 118, Z. 23 f. (9, Z. 3 f.): „folgt, dass die beiden Faktoren $xaBb_1$ und xb des ersten Products nur dann verschwinden, wenn x in a oder in b fällt". — S. 118, Z. 14, 13 v. u. (9, Z. 8f.): „in einer und derselben Geraden", „(xB)" statt „(xb)". — S. 118, Z. 7, 6 v. u. (9, Z. 14 f.): „wenn a und b_1 in B fallen oder", „drei Fälle". — S. 119, Z. 6 (9, Z. 9 v. u.): Die Worte: „oder B mit C zusammenfällt" fehlen. — S. 120, Z. 4 v. u. (11, Z. 14): „geht" statt „liegt". — S. 121 (11, Z. 10 v. u.): Nach den Formeln (1) steht im Originale: „ist". — S. 122, Z. 12f. (12, Z. 20): „$efCb_1aB(ef)$". — S. 121, Z. 9 v. u., 122, Z. 6 v. u. (12, Z. 14, 5 v. u.): „Nach (§. 2.)". — S. 123, Z. 18 (13, Z. 8 v. u.): „$= 0$" fehlt. — S. 124, Z. 9 v. u. (15, Z. 6): „(nach Fall 12)". — S. 125, Z. 12 (15, Z. 12 v. u.): „ist, da $B \equiv cf$ ist, c". — S. 125, Z. 18 (15, Z. 6 v. u.): „Es ist". — S. 125, Z. 21 (15, Z. 4 v. u.): „(xc)" statt „(xe)". — S. 126, Z. 11 v. u. (17, Z. 5): „sbD" statt „bsD". — S. 127, Z. 15 v. u. (17, Z. 2 v. u.): „muss nach (§. 4.) f' mit". — S. 128, Z. 6 (18, Z. 17): „$F \equiv rd_1E(hi)$". — S. 128, Z. 1 (18, Z. 12): „$cB^* \equiv 0$" statt „$cB = 0^*)$", entsprechend ist auch in den folgenden Formeln das Sternchen umgesetzt. — S. 128, Z. 22 (18, Z. 3 v. u.): „nach § 4". — S. 130, Z. 15 (20, Z. 18): „$=$" statt „$\equiv$". — S. 131, Z. 19 (21, Z. 15): „liegt". — S. 132, Z. 10, 2 v. u. (22, Z. 13, 5 v. u.): „sei x" statt „sei k"; „ferner der". — S. 133, Z. 1f. (22, Z. 3 v. u.): „verwandeln". — S. 134, Z. 12 v. u. (24, Z. 16 v. u.): „Gerade S: so ist". — S. 135, Z. 7 (25, Z. 1): „mit L_2".

VIII. Allgemeiner Satz über die lineale Erzeugung aller algebraischen Oberflächen.

S. 141, Z. 9 v. u. (6, Z. 7 v. u.): „die Summe des Products zweier". — S. 143, Z. 17 (8, Z. 14): „$= 0$" fehlt. — S. 143, Z. 8, 7 v. u. (8, Z. 6 v. u.): „Punkte x, y, $z = a, 0, 0; 0, b, 0; 0, 0, c$ geht". — S. 143, Z. 5 v. u. (8, Z. 4 v. u.): „und man legt".

IX. Grundsätze der stereometrischen Multiplikation.

S. 151, Z. 1 (16, Z. 1): „AB und A". — S. 152, Z. 17 f. (17, Z. 16—14 v. u.): „Es sei dies das Product ... weglässt und mit $\mathfrak{C}$". — S. 154, Z. 14 v. u. (19, Z. 3 v. u.): „u. s. w." fehlt.

X. Ueber die verschiedenen Arten der linealen Erzeugung algebraischer Oberflächen.

S. 157, Z. 3 (22, Z. 5 v. u.): „a, x" statt „a, α". — S. 158, Z. 6 (23, Z. 2 v. u.): „der andern". — S. 160, Z. 1 v. u. (26, Z. 1 v. u.): „a_{n-1}" statt „α_{n-1}". — S. 162, Z. 16 (28, Z. 17): „§ 2". — S. 162, Z. 22 (28, Z. 14 v. u.): „S. 5" statt „S. 181". — S. 162, Z. 8, 5 v. u. (28, Z. 5, 3 v. u.): „... a_n, α_n betrachtet, deren", „Angriffspunkt". — S. 167, Z. 8 (33, Z. 15): „also" statt „so".

XI. Die stereometrische Gleichung zweiten Grades.

S. 172, Z. 5, 3 v. u. (39, Z. 16, 14 v. u.): „$xpp_1 \ldots p_n$“; auch im Folgenden haben wir mehrfach, wenn es sich nicht um Produkte handelt, Kommata eingeschaltet. — S. 173, Z. 9 f., 12 (39, Z. 4, 2 v. u.): „in der Geraden“; „$xAB \ldots A_n = 0$“. — S. 174, Z. 9 (40, Z. 3 v. u.): „Denn sagt“. — S. 175, Z. 2 v. u. (42, Z. 9 v. u.): „in dieser Ebene“. — S. 177, Z. 23 (44, Z. 13): „§ 3“. — S. 177, Z. 1 v. u., 178, Z. 5 v. u., 179, Z. 6 (44, Z. 8 v. u., 45, Z. 11, 3 v. u.): „conjugirt“ statt „isolirt“.

XII. Die stereometrischen Gleichungen dritten Grades.

S. 180, Z. 14, 13 v. u. (47, Z. 10 f.): „in der zweiten Abhandlung (Stereometrische Multiplikation § 5)“. — S. 181, Z. 17 v. u. (48, Z. 12): „S. Abh. 3. §. 3)“. — S. 181, Z. 8 v. u. (48, Z. 20): „gerade oder ungerade“. — S. 181, Z. 1 v. u. (48, Z. 9 v. u.): „$\mathfrak{R}$“ statt „$x\mathfrak{R}$“. — S. 182, Z. 5 (48, Z. 4 v. u.): „$r = x\mathfrak{R}_1$, $s = x\mathfrak{R}_2$“. — S. 182, Z. 7 v. u. (49, Z. 14 v. u.): „(4)“ statt „(2)“. — S. 183, Z. 11 f. (50, Z. 4 f.): „die Form $Y(rA_2)\alpha = 0$ an“. — S. 183, Z. 13 (50, Z. 6): „$Y(rA_2\alpha)$“. — S. 183, Z. 23 (50, Z. 14): „$r_2\alpha a$“ statt „$ra_2\alpha a$“. — S. 184, Z. 11 (51, Z. 2): „pA_1A“. — S. 184, Z. 17 v. u. (51, Z. 13): „$A \equiv c$“. — S. 185, Z. 18 (52, Z. 13): zweimal „$\equiv$“ statt „$=$“. — S. 185, Z. 5 v. u. (52, Z. 7 v. u.): „$\varphi =$“. — S. 186, Z. 18 f., 24 (53, Z. 11 f., 17): „(4)“ statt „(2)“; „$= 0$“ fehlt. — S. 187, Z. 6 v. u. (54, Z. 8 v. u.): „$\equiv cyc$“. — S. 188, Z. 11, 8, 2 v. u., 189, Z. 2, 9, 10, 12, 15, 16, 17 (55, Z. 12, 10, 4, 2 v. u., 56, Z. 6, 7, 9, 12, 13, 14): überall: „a_2, a_3, a_4“ statt „k_2, k_3, k_4“. — S. 188, Z. 10 v. u. (55, Z. 11 v. u.): „a_2“ statt „α_2“. — S. 189, Z. 17 (56, Z. 14): „α_4“ statt „α“. — S. 190, Z. 11 (57, Z. 7): „Durch zwei Punkte, welche“. — S. 192, Z. 10 (59, Z. 6): „(1)“ fehlt. — S. 193, Z. 7 (60, Z. 6): „φ“ statt „φ_1“. — S. 193, Z. 17 (60, Z. 16): „x, $xa_2\alpha b\beta c\gamma$“. — 195, Z. 15 v. u. (62, Z. 10 v. u.): „(nach §. 5, 8)“. — S. 196, Z. 8 (63, Z. 12): „werde“.

XIII. Sur les différents genres de multiplication.

Die Eintheilung in Paragraphen ist neu. — S. 201, Z. 10 (124, Z. 4 v. u.): „de *unité*“. — S. 201, Z. 1 v. u. (125, Z. 12, 11 v. u.): „cité, et où je ... détails; en suivant“. — S. 205, Z 11, 14, 18 (128, Z. 1 v. u., 129, Z. 3, 7): „$= 0$“ fehlt. — S. 206, Z. 16 v. u. (130, Z. 11): $\alpha_{2,1}u_1u_2 + \alpha_{1,2}u_2u_1 = 0$“. — S. 207, Z. 4 v. u. (131, Z. 9 v. u.): „$u_1u_1 + u_2u_2 =$“. — S. 208, Z. 5 (131, Z. 3 v. u.): „x_1u_2“. — S. 209, Z. 2 (132, Z. 5 v. u.): „u_1u_2“ statt „u_1u_1“. — S. 209, Z. 15 (133, Z. 9): „distinctes“. — S. 209, Z. 1 v. u. (133, Z. 6 v. u.): $x_1x_2 + x_2x_1 = 0$“. — S. 210, Z. 5 (133, Z. 1 v. u.): „$b = \mp$“. — S. 210, Z. 6 (134, Z. 1): „étant égal à zéro“, von Grassmann selbst handschriftlich verbessert. — S. 210, Z. 15 (134, Z. 9): „$\mp (xb - ya)$“. — S. 210, Z. 16 (134, Z. 9): die Worte: „$x^2 + y^2$ étant égal à l'unité absolue“ hat Grassmann selbst handschriftlich hinzugefügt. — S. 211, Z. 2 (134, Z. 3 v. u.): Der Faktor 2 fehlt. — S. 211, Z. 9 v. u. (135, Z. 11 v. u.): „étant égale à 1, il“. — S. 212, Z. 8, 9, 10 (136, Z. 6, 7, 8): Wir haben die runden Klammern um die

Nummern durch eckige ersetzt, entsprechend bei späteren Verweisungen. — S. 213, Z. 12 v. u. (137, Z. 13 v. u.): „$0 = u_1 u_2 = u_2 u_3 = \cdots$“. — S. 214, Z, 16 f. (138, Z. 14 f.). Für (1), (2) haben wir gesetzt [1*], [2*], ebenso bei späteren Verweisungen.

XIV. Die lineale Erzeugung von Kurven dritter Ordnung.

S. 218, Z. 7 f. (S. 254, Z. 4): 123 ff. u. 178 ff. statt 122 f. u. 177 f. — S. 224, Z. 9 (260, Z. 3): „p und p' wieder“. — S. 225, Z. 7 (261, Z. 1): „nach *entgegengesetzter* Seite“. — S. 225, Z. 12 v. u. (261, Z. 15 v. u.): „mögen“ statt „wenn“. — S. 229, Z. 14 v. u. (265, Z. 12 v. u.): „schneiden“. — Fig. 33, S. 229 steht im Originale auch im Text, aber ohne Nummer, ebenso der Hinweis im Text. — S. 231, Z. 5 v. u. (268, Z. 1): „g“ statt „x“. — S. 232, Z. 2 (268, Z. 6): „liegt, zu“ statt „liegt:“. — S. 232, Z. 17, 16 v. u. (268, Z. 7 v. u.): „oder zu“ statt „oder“, „xcD“ statt „xdC“, „$FC(FB)$“ statt „$FB(FC)$“. — S. 232, Z. 14 v. u. (268, Z. 5 v. u.): „xcD“ statt „xdC“. — S. 234, Z. 15 (270, Z. 17): „c“ statt „$\equiv c$“. — S. 235, Z. 7 (271, Z. 11): „ei statt „ei_1“. — S. 235, Z. 12 (271, Z. 15): „$pb_1 Ckp$“. — S. 236, Z. 7 (272, Z. 10) steht x statt des letzten Faktors k. — S. 236, Z. 10—16 (272, Z. 13—19): mehrmals „g“ und „h“ statt „g_2“ und „h_2“. — S. 236, Z. 16 (272, Z. 19): „$=$“ statt „$\equiv$“. — S. 237, Z. 3—5 (273, Z. 11—13): „und g_2, i_2 die Punkte, in welche sich xbB verwandelt, wenn man statt x beziehlich die Punkte g und i setzt, und wo $\alpha \equiv h_1 g_1 Cg(h_1 f)$; $\beta \equiv h_1 g_1 Ch(g_1 f)$“. — S. 237, Z. 20 f. (273, Z. 6, 5 v. u.): „351“ statt „369“, „5, 44, 43“ statt „11, 51, 48“. — S. 237, Z. 8 v. u. (274, Z. 6): „(b)“ statt „(l)“. — S. 238, Z. 7, 10 (274, Z. 17, 14 v. u.): „Strahlenbüschel“.

XV. Verschiedene mathematische Bemerkungen.

S. 241. Fig. 34 steht im Original auf Tafel I, als Fig. 1.

XVI. Lösung der Gleichung $x^3 + y^3 + z^3 + u^3 = 0$.

S. 243, Z. 11 v. u. (50, Z. 11 v. u): „108“ statt „— 108“.

XVII. Elementare Auflösung der allgemeinen Gleichung vierten Grades.

S. 245, Z. 3 (94, Z. 20): „$\mp$“. — S. 246, Z. 16 (96, Z. 3) steht im Originale richtig „α^8“ statt „α^3“, hier leider verdruckt. — S. 246, Z. 7 v. u. (96, Z. 8 v. u.): „e“ statt „$\sqrt{e}$“.

XVIII. Zur Theorie der Kurven dritter Ordnung.

S. 248, Z. 12 (507, Z. 15 f.) „einfachen festen Punkt“. — S. 249, Z. 3 v. u. (509, Z. 4 v. u.): „allgemeineren Fall“.

XIX. Ueber zusammengehörige Pole.

S. 250, Z. 8 v. u. (568, Z. 8): „verbundenen“. — S. 251, Z. 13, 21, 30 (568, Z. 3 v. u., 569, Z. 10, 20): „l_1, l_2, l_3“ statt „e_1, e_2, e_3“. — S. 251,

Z. 13 (568, Z. 3 v. u.): „und man bildet". — S. 252, Z. 18 v. u. (571, Z. 7): „a_n" statt „a_m". — S. 253, Z. 13 (572, Z. 12): „wie" statt „wo". — S. 253, Z. 6 v. u. (573, Z. 3): „x mit d". — S. 254, Z. 5, 4 v. u. (574, Z. 10 v. u.): „zusammengehörigen".

XX. Die neuere Algebra und die Ausdehnungslehre.

S. 257, Z. 16 (539, Z. 11). Hier wie auch später sind die äusseren Produkte im Originale in runde Klammern eingeschlossen statt in eckige. — S. 258, Z. 7 v. u. (540, Z. 16 v. u.): „28" statt „33". — S. 259, Z. 1 v. u. (541, Z. 16 v. u.): „ein linearer Complex". — S. 260, Z. 13 (541, Z. 3 v. u.): „(ax) statt „$[xa]$". — S. 264, Z. 4, 10 (545, Z. 16, 22): „$\Sigma \mp$". — S. 264, Z. 5 v. u. (546, Z. 5): „$(\bar{a}x)$" statt „$[x\bar{a}]$". — S. 266, Z. 11 v. u. (547, Z. 7 v. u.): „ax^n" fehlt. — S. 267, Z. 8 (548, Z. 12): „$\varphi_5 + 4\varphi_2\varphi_3$" und: „$15\varphi_2\varphi_4 + 10\varphi_3^2$". — 267, Z. 10 (548, Z. 14): „$c_5 - 4c_2c_3$".

XXI. Der Ort der Hamiltonschen Quaternionen in der Ausdehnungslehre.

S. 271, Z. 2 (377, Z. 15 v. u.): „$[\alpha_1 e_2 e_3 + \alpha_2 e_3 e_1 + \alpha_3 e_1 e_2]$". — S. 271, Z. 8 (377, Z. 9 v. u.). Die Nummer (4b) ist neu hinzugefügt. — S. 271, Z. 7 v. u. — S. 272, Z. 10 (378, Z. 15—24). Bei den Ausdrücken $(e_r e_s) e_t$, $(e_t e_s) e_r$ u. s. w. fehlen im Original überall die Klammern. — S. 272, Z. 4 v. u. (379, Z. 8): „$\alpha\beta - |[a|b]$". — S. 275, Z. 10 (381, Z. 8): „$\beta_1 = \frac{-\alpha_1}{\alpha_0^2 + a_1^2}$". — S. 275, Z. 12 (381, Z. 10): „β_2 und $\beta_3 = 0$". — S. 276 ff. (382, ff.): Die Gleichungsnummern (8) bis (30) sind neu hinzugefügt, dementsprechend auch die Verweisungen im Texte. — S. 278, Z. 3 v. u. (384, Z. 14): „($\mathfrak{A}_1$ 30, $\mathfrak{A}_2$ 262)". — S. 279, Z. 13 f. (384, Z. 15 v. u.): „und ebenso sei b' auf c, a, a' auf b, c senkrecht". — — S. 279, Z. 19 (384, Z. 10, 9 v. u.): „Um nun die". — S. 280, Z. 12 f. (385, Z. 18—21):

$$[b'bc] = \sin\alpha\cos\gamma',\ [c'ca] = \sin\beta\cos\alpha',\ [a'ab] = \sin\gamma\cos\beta'$$
$$[c'bc] = \sin\alpha\cos\beta' \text{ u. s. w.}$$
$$[bb'c'] = \sin\alpha'\cos\gamma,\ [cc'a'] = \sin\beta'\cos\alpha,\ [aa'b'] = \sin\gamma'\cos\beta$$
$$[cb'c'] = \sin\alpha'\cos\beta' \text{ u. s. w.}$$

S. 280, Z. 18 f. (385, Z. 13 v. u.): „da $[bbc]$, $[cbc]$".

XXII. Verwendung der Ausdehnungslehre für die allgemeine Theorie der Polaren.

S. 284, Z. 11 v. u. (274, Z. 18 v. u.): „158" statt „358". — S. 287, Z. 10 v. u. (277, Z. 14 v. u.): „die sämmtlich möglichen". — S. 288, Z. 12 v. u. (278, Z. 16 v. u.): „$= 0$" fehlt. — S. 289, Z. 11, 21 (279, Z. 2, 11): „$a^{(n)}$" und „ε^{n-1}" statt „$\alpha^{(n)}$" und ε_1^{n-1}". — S. 291, Z. 15 (281, Z. 6): „dass von q jener". — S. 293, Z. 9 v. u. (283, Z. 13): „dass man den ν Einheiten".

XXIII. Stücke aus dem Lehrbuche der Arithmetik.

Das Original enthält VIII und 221 Seiten 8^0 und ist eingetheilt in 26 Paragraphen und 473 Nummern. Die hier nicht mit abgedruckten Paragraphen sind:

§	Titel	Nr.	§	Titel	Nr.
§ 8.	Proportionen	156	§ 15.	Logarithmen	280
§ 9.	Gleichungen ersten Grades	172	§ 16.	Uebersicht über die drei Rechnungsstufen	295
§ 10.	Potenzen mit ganzen Exponenten	186	§ 17.	Unendliche Reihen	303
§ 11.	Potenzreihe, Systemzahl	207	§ 18.	Potenz einer Summe	311
§ 12.	Zahlvergleichung bei Potenzen	230	§ 19.	Logarithmus einer Summe	339
§ 13.	Radiciren	248	§ 20.	Arithmetische Reihen	346
§ 14.	Quadratische Gleichungen	268	§ 21.	Geometrische Reihen	368
			§ 22.	Zins- und Rentenrechnung	387

Anhang.

§	Titel	Nr.	§	Titel	Nr.
§ 23.	Kombinationslehre	393	§ 25.	Höhere Gleichungen	440
§ 24.	Imaginäre Grössen	414	§ 26.	Kettenbrüche	459

S. 301, Z. 16 (4, Z. 10): „$a = b + e + - e$“. — S. 304, Z. 11, 13 (7, Z. 16): „11“ statt „17“, Z. 13 fehlt im Originale. — S. 310, Z. 14 (13, Z. 11 v. u.): „34“ statt „37“. — S. 312, Z. 1 v. u. (16, Z. 16): „$a - c + b - d + e$“. — S. 313, Z. 12 (16, Z. 10 v. u.): „19“ statt „29“. — S. 315, Z. 14 v. u. (19, Z. 18): „b“ statt „β“. — S. 315, Z. 11 v. u. (19, Z. 21): „55“ statt „56“. — S. 318, Z. 11 v. o., 10 v. u. (22, Z. 2, 19): „58“ statt „66“. — S. 319, Z. 9, 8 v. u. (23, Z. 20, 21): „46“ statt „52“. — S. 321, Z. 14, 18 (25, Z. 6, 10): „68, 69“ statt „68b, 69b“. — S. 322, Z. 8 v. u., 323, Z. 1 (26, Z. 20, 11 v. u.): „76“ statt „77“. — S. 323, Z. 10 (26, Z. 2 v. u.): „77“ statt „78“. — S. 323, Z. 6, 4 v. u. (27, Z. 12, 10 v. u.): „77, 76“ statt „80, 79“. — S. 325, Z. 15 v. u. (29, Z. 20): „Zahl β so gilt, so gilt“. — S. 326, Z. 9 (30, Z. 10): „(nach 28)“. — S. 326, Z. 7 v. u. (30, Z. 2 v. u.): „für die nächstfolgenden“. — S. 327, Z. 11 (31, Z. 17): „das null ist“ fehlt im Originale. — S. 328, Z. 11 (32, Z. 19): „(nach 67)“. — S. 328, Z. 16 v. u. (32, Z. 5. v. u.): „29“ statt „67b. — S. 328, Z. 9 v. u. (33, Z. 4): „$\alpha > 0$“ fehlt im Originale. — S. 329, Z. 3 (33, Z. 15): „$\alpha\beta'\gamma > \alpha'\beta'\gamma'$“. — S. 329, Z. 15 (33, Z. 10 v. u.): „$= a \cdot 1$“ fehlt im Originale. — S. 329, Z. 16, 18 (33, Z. 9, 7 v. u.): „d. h. a geht in 1 auf (nämlich a-mal)“, „die in eine andere b aufgeht“. — S. 329, Z. 10—8 v. u. (34, Z. 4—6): „also müsste $x > 1$. Dann“. — S. 331, Z. 13 v. u. (36, Z. 9): „heisst ihr gemeinschaftliches Maass. Zwei Zahlen“. — S. 332, Z. 8 (36, Z. 9 v. u.): „auch in die Summe“. — S. 333, Z. 21 f. (38, Z. 16): „eine grössere Zahl in eine kleinere“. — S. 333, Z. 15, 14 v. u. (38, Z. 17, 16 v. u.): „nach 109“, „in a und b aufgehe“. — S. 334, Z. 11, 14, 17 (39, Z. 13, 17, 20): „(nach 98)“. — S. 336, Z. 7 (41, Z. 17): „$b = am$“. — S. 336, Z. 15 (41, Z. 9 v. u.): „108“ statt „121“. — S. 336, Z. 24 f. (42, Z. 4): „gemeinschaftliche Maass“. — S. 338, Z. 4 (43, Z. 8, v. u.): „y“ statt „x“. — S. 338, Z. 6 v. u. (44, Z. 10 v. u.): „115“ statt „128“. — S. 340, Z. 3 (46, Z. 5):

„b" statt „β". — S. 341, Z. 2 (47, Z. 2): „$\frac{a}{\beta\alpha} : \gamma = \frac{a}{\gamma} : \beta$". — S. 342, Z. 5 v. u. (48, Z. 2 v. u.): „136" statt „136b". — S. 344, Z. 3 (50, Z. 9): „$e'(\alpha\beta\delta)$". — S. 345, Z. 9 (51, Z. 11 v. u.), „a" statt „α".

XXIV. Stücke aus dem Lehrbuche der Trigonometrie.

Das Original enthält VII und 115 Seiten 8⁰ und seine 8 Paragraphen sind in 166 Nummern eingetheilt. Die Figuren, 50 an der Zahl, sind im Texte.

S. 352, Z. 14 (101, Z. 6): „der Ecken". — S. 357, Z. 16 v. u. (107, Z. 1): „also b und β".

Anmerkungen
zu den Abhandlungen über Geometrie und Analysis.

I. Theorie der Centralen.

Crelles Journal Bd. 24, 25 (1842, 43).

Die §§ 1—7 der vorliegenden Abhandlung enthalten eine nach heutigen Begriffen freilich recht schwerfällige Darstellung der Polarentheorie, die Grassmann, mit Bobillier's Abhandlung vom Jahre 1827 unbekannt, selbständig entwickelt und durch die von ihm zur Definition der Polaren benutzten metrischen Eigenschaften erweitert hat. — Man vergleiche die Litteraturangaben in Baltzer's Analytischer Geometrie (Leipzig, 1882, § 43, Nr. 15—17).

Auffallend ist, dass in dieser Schrift, die in der Zeit zwischen 1840 (der Jahreszahl von Grassmanns Prüfungsarbeit über Ebbe und Flut) und 1844 erschienen ist, sich weder eine Andeutung von Grassmanns eigenthümlichen Methoden findet, noch auch nur homogene Coordinaten zur Verwendung kommen, deren Gebrauch eine grosse Erleichterung geboten haben würde.

In § 8 verfällt Grassmann in einen Irrthum, dem bekanntlich auch Steiner nicht entgangen ist: Er glaubt, dass eine Mannigfaltigkeit gerader Linien, die durch jeden Punkt einen Kegel schickt, von den Tangenten einer Fläche (oder den Secanten einer Curve) gebildet werden müsse. In der Ausdehnungslehre von 1844 (A_1, § 118; Bd. I, 1, S. 195 dieser Ausgabe) spricht er gleichwohl von „eigenthümlichen, bisher nicht beachteten Gebilden“, die er in der vorliegenden Abhandlung untersucht haben will. Offenbar hat er dabei diese Arbeit selbst nicht vor Augen gehabt und hat gemeint, dass das, was ihm später eingefallen war, dort schon zu finden sei. Die „eigenthümlichen Gebilde“ sind natürlich die Liniencomplexe, deren allgemeinen Begriff Grassmann 1844 besessen haben muss. Den von Grassmann später (1877, s. ebenda, zweite Anmerkung) erhobenen Anspruch, diese Gebilde in die Wissenschaft eingeführt zu haben, können wir gleichwohl nicht für berechtigt halten. Denn das Citat, auf das er selbst diesen Anspruch gründet, ist, wie gesagt, unzutreffend, und die angeführte Stelle in der A_1 ist doch zu unbestimmt gehalten, um für sich allein betrachtet einen solchen Anspruch rechtfertigen zu können.

Einer Kritik von Einzelheiten glauben wir uns entschlagen zu dürfen, da Grassmanns Beweisverfahren ein methodisches Interesse nicht bietet.

S. 5. Die sonst übliche und auch wohl zweckmässigere Ausdrucksweise ist „Polare eines Punktes in Bezug auf einen Kegelschnitt“.

S. 32 u. ff. Nach der von Clebsch (Math. Ann. Bd. II, S. 1) eingeführten und später auch von Grassmann angenommenen Bezeichnungsart kann jeder Liniencomplex n-ten Grades, wenn $n > 1$, auf zwei Arten symbolisch dargestellt werden durch eine Gleichung, deren linke Seite die auf die n-te Potenz erhobene linke Seite der Gleichung eines speciellen linearen Complexes ist.

Wir verstehen unter $x_i, y_i, \ldots$ $(i = 0 \ldots 3)$ homogene Coordinaten von Punkten, und unter $u_i, v_i, \ldots$ solche von Ebenen, und wir bezeichnen Symbole, die mit den ersten cogredient sind, mit p_i, p_i', und solche, die mit den Ebenencoordinaten cogredient sind, mit a_i, a_i'. Schreiben wir sodann

$$(ux) \quad \text{für} \quad \Sigma x_i u_i \qquad (i = 0 \ldots 3),$$

und z. B. $(pp'xy)$ für die Determinante $|p_0 p_1' x_2 y_3|$, so lauten die fraglichen Gleichungsformen

$$(pp'xy)^n = 0, \quad (aa'uv)^n = 0.$$

Zwischen den Symbolen beider Arten kann dabei eine Abhängigkeit angenommen werden, die in irgend einer der folgenden mit einander äquivalenten Gleichungen ihren Ausdruck findet:

$$(pp'xy) = (ax)(a'y) - (ay)(a'x),$$
$$(aa'uv) = (up)(vp') - (up')(vp).$$

Danach kann die ganze Polarentheorie der Curven oder Flächen ohne Weiteres auf Liniencomplexe übertragen werden. Zu einem Liniencomplex m-ten Grades $(m \leqq n)$

$$(qq'xy)^m = 0 \quad \text{oder} \quad (bb'uv)^m = 0$$

gehört z. B. als Polare in Bezug auf den Complex n-ten Grades ein Complex $(n - m)$-ten Grades, der u. A. durch irgend eine der folgenden Gleichungen dargestellt werden kann:

$$(pp'qq')^m (pp'xy)^{n-m} = 0,$$
$$(aa'bb')^m (aa'uv)^{n-m} = 0,$$
$$\{(bp)(b'p') - (bp')(b'p)\}^m (pp'xy)^{n-m} = 0,$$
$$\{(aq)(a'q') - (aq')(a'q)\}^m (aa'uv)^{n-m} = 0.$$

Reducirt sich der Complex m-ten Grades auf das m-fach zählende Secantensystem einer geraden Linie, so entsteht ein auch als „m-te Polare“ dieser Geraden in Bezug auf den Complex n-ten Grades zu bezeichnender Complex $(n - m)$-ten Grades. — Die Analogie dieser Polarentheorie der Liniencomplexe zu der Polarentheorie der Flächen z. B. tritt noch mehr in Evidenz, wenn man die Liniencoordinaten einer Geraden, oder die Coordinaten eines linearen Complexes als Coordinaten in einem Gebiete sechster Stufe (in einem Raum von fünf Dimensionen) deutet, und es zeigt sich dann auch, worin sich diese von Grassmann geahnte Polarentheorie der Complexe von der der Flächen wesentlich unterscheidet. Es werden nämlich

die Plücker'schen Coordinaten $\mathfrak{X}_{ik}$ gleichzeitig als Coordinaten eines Punktes, eines Gebietes erster Stufe,

$$X_1 = \mathfrak{X}_{01}, \quad X_2 = \mathfrak{X}_{02}, \quad X_3 = \mathfrak{X}_{03},$$
$$X_4 = \mathfrak{X}_{23}, \quad X_5 = \mathfrak{X}_{31}, \quad X_6 = \mathfrak{X}_{12},$$

und als Coordinaten eines Gebietes fünfter Stufe

$$U_1 = \mathfrak{X}_{23}, \quad U_2 = \mathfrak{X}_{31}, \quad U_3 = \mathfrak{X}_{12},$$
$$U_4 = \mathfrak{X}_{01}, \quad U_5 = \mathfrak{X}_{02}, \quad U_6 = \mathfrak{X}_{03}$$

aufgefasst werden können, die als Pol und Polare einander zugeordnet sind in Bezug auf die quadratische Mannigfaltigkeit

$$\Phi = \mathfrak{X}_{01}\mathfrak{X}_{23} + \mathfrak{X}_{02}\mathfrak{X}_{31} + \mathfrak{X}_{03}\mathfrak{X}_{12} = 0,$$

die die Plückersche Identität zwischen Liniencoordinaten darstellt. Die Gleichung n-ten Grades

$$\Psi = \{(p_0p_1' - p_1p_0')\mathfrak{X}_{23} + (p_0p_2' - p_2p_0')\mathfrak{X}_{31} + (p_0p_3' - p_3p_0')\mathfrak{X}_{12} + \\ + (p_2p_3' - p_3p_2')\mathfrak{X}_{01} + (p_3p_1' - p_1p_3')\mathfrak{X}_{02} + (p_1p_2' - p_2p_1')\mathfrak{X}_{03}\}^n = 0$$

stellt daher gleichzeitig zwei verschiedene algebraische Mannigfaltigkeiten im Raume von fünf Dimensionen dar, eine Mannigfaltigkeit n-ter Ordnung — analog den Flächen n-ter Ordnung — und eine Mannigfaltigkeit n-ter Classe — analog den Flächen n-ter Classe — die beide durch die mit der quadratischen Mannigfaltigkeit $\Phi = 0$ verbundene Korrelation einander zugeordnet sind. Diese Mannigfaltigkeiten sind aber beide von specieller Beschaffenheit jedesmal, wenn $n > 1$ ist. Es ist nämlich die Mannigfaltigkeit 2. Classe $\Phi = 0$ oder

$$U_1U_4 + U_2U_5 + U_3U_6 = 0$$

apolar zu der Mannigfaltigkeit n-ter Ordnung $\Psi = 0$, und ebenso die Mannigfaltigkeit 2. Ordnung $\Phi = 0$ oder

$$X_1X_4 + X_2X_5 + X_3X_6 = 0$$

apolar zu der Mannigfaltigkeit n-ter Classe $\Psi = 0$.*) Bildet man die Polare eines Complexes m-ten Grades in Bezug auf einen Complex n-ten Grades, so wird der Complex m-ten Grades als eine Mannigfaltigkelt m-ter Classe im Gebiet sechster Stufe aufgefasst, und gleichzeitig der Complex n-ten Grades als eine Mannigfaltigkeit n-ter Ordnung, oder umgekehrt, mit Vertauschung der Begriffe Classe und Ordnung. Die Polare ist dann ebenso eine Mannigfaltigkeit $(n - m)$-ter Ordnung oder Classe; und zu dieser ist die Mannigfaltigkeit $\Phi = 0$ wiederum apolar, jedesmal, wenn $n - m > 1$ ist.

Es bestehen also in der That Analogien zwischen der Polarentheorie der Flächen und der Polarentheorie der Liniencomplexe n-ten Grades, die an Stelle der Grassmannschen „Flächen n-ter Reihe" zu setzen sind; aber diese Analogien sind nicht ganz so beschaffen, wie Grassmann es angenommen hatte. Es treten die geschilderten besonderen Verhältnisse ein, deren Folge einmal das Zusammenfliessen der Begriffe Classe und Ordnung

*) Leipz. Ber. 1890, S. 178 u. ff.

in den einen Begriff des Grades, sodann die singuläre Stellung der Liniencomplexe ersten Grades ist, deren Begriff, wie der des allgemeinen Liniencomplexes überhaupt, bei Grassmann vollständig fehlt.

Lassen wir, dem Gedankengange Grassmann's folgend, in der Gleichung der m-ten Polare einer Geraden xx' in Bezug auf den Complex $(pp'yy')^n = 0$, also etwa in der Gleichung

$$(pp'xx')^m (pp'yy')^{n-m} = 0$$

die Punkte x und y zusammenfallen, so ergiebt sich, bei Anwendung von Clebsch's Uebertragungsprincip, der Satz:

„Konstruirt man die m-te Polare einer Geraden in Bezug auf den Complexkegel irgend eines ihrer Punkte, so erhält man den zu diesem Punkte gehörigen Complexkegel des m-ten Polarcomplexes jener Geraden."

Im Falle $m = n - 1$ erhält man als „letzte Polare" — oder, nach Grassmanns Ausdrucksweise — als „Centrale" einer Geraden xx' einen linearen Complex, und damit ein allgemeines oder ausgeartetes — unter Umständen auch ganz unbestimmtes — Möbius'sches Nullsystem. Durch dieses Nullsystem wird nun der Geraden xx' eine gewisse andere Gerade $\xi\xi'$ zugeordnet, die unter (leicht anzugebenden) Umständen natürlich ebenfalls unbestimmt werden kann; und diese Gerade kann, in einem anderen Sinne als der besprochene Liniencomplex, gleichfalls als ein Analogon zur letzten Polare oder „Centrale" eines Punktes in Bezug auf eine Fläche n-ter Ordnung angesehen werden. Sie ist nämlich

1) Ort der Polarebenen (der letzten Polaren) der gegebenen Geraden in Bezug auf alle von deren Punkten ausgehenden Complexkegel;

2) Ort der Pole (der letzten Polaren) der gegebenen Geraden in Bezug auf alle in deren Ebenen enthaltenen Complexcurven.

Ist der gegebene Complex der Tangentencomplex einer Fläche 2. Grades, sagen wir etwa einer Fläche 2. Ordnung und 2. Classe, so artet der Polarcomplex der Geraden xx' stets aus, und er besteht dann, wenn xx' nicht gerade selbst Tangente der Fläche ist, aus dem Secantensystem eben der von uns mit $\xi\xi'$ bezeichneten Geraden. Diese aber ist identisch mit der Polaren der Geraden xx' in Bezug auf die Fläche selbst. Die Begriffe „Polare einer Geraden in Bezug auf eine Fläche zweiten Grades" und „Polare einer Geraden in Bezug auf deren Tangentencomplex" decken einander also in ziemlich weitem Umfang.

S. 46. Die Zeichen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots$ in der Formel (A) bedeuten dieselben Grössen, die nachher $\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \ldots$ genannt werden. Sie sind nicht zu verwechseln mit den in den Formeln (B) und (C) ebenso bezeichneten Grössen.

II. Grundzüge zu einer rein geometrischen Theorie der Kurven, mit Anwendung einer rein geometrischen Analyse.

Crelles Journal Bd. 31 (1846).

In seiner ersten Ausdehnungslehre (§ 145—148, Ges. Werke I, 1, S. 245—248) hat Grassmann einen allgemeinen Satz über die Erzeugung der algebraischen Kurven und Flächen aufgestellt, der dort als Ausfluss aus den in der Ausdehnungslehre entwickelten Methoden erscheint. Dem Bedürfniss, Beweis und Inhalt dieses an sich wichtigen Satzes unabhängig

von der Kenntniss der Ausdehnungslehre verständlich zu machen, trug Grassmann dadurch Rechnung, dass er in einer Reihe von Arbeiten in Crelles Journal jenen „Hauptsatz“, wie er ihn nannte, für die ebenen algebraischen Kurven und für die algebraischen Flächen von neuem entwickelte und insbesondere auf die Erzeugung der ebenen Kurven zweiter, dritter und vierter Ordnung und von algebraischen Flächen zweiter und dritter Ordnung anwandte. Da die vorliegende Abhandlung II die Reihe dieser Arbeiten eröffnet, sind hier einige orientirende Bemerkungen über alle diese zusammengehörigen Arbeiten am Platze. Es handelt sich um die Arbeiten in diesem Bande, die mit den Nummern II bis XII, XIV und XVIII versehen sind.

Der von Grassmann aufgestellte „Hauptsatz“ für die ebenen algebraischen Kurven zerfällt in zwei Theile. Der erste Theil lautet, vgl. S. 50:

„Wenn die Lage eines beweglichen Punktes x in der Ebene dadurch beschränkt ist, dass ein Punkt und eine Gerade, welche durch Konstruktionen vermittels des Lineals aus jenem Punkte x und einer Reihe fester Punkte und Geraden hervorgehen, zusammenliegen sollen (das heisst: der Punkt in der Geraden liegen soll), so beschreibt der Punkt x ein algebraisches Punktgebilde und zwar vom n-ten Grade, wenn bei jenen Konstruktionen der bewegliche Punkt n-mal angewandt ist.“

Der zweite Theil ist die Umkehrung (S. 81):

dass „jede algebraische Kurve auf die in dem {vorigen} Satze angegebene Weise erzeugt werden kann.“

Grassmann nennt diese Erzeugungsweise der ebenen algebraischen Kurven lineal. Zur Vermeidung von Missverständnissen heben wir hervor, dass er damit durchaus nicht sagen will, die ebenen algebraischen Kurven seien etwa punktweise mittels des Lineals konstruirbar. Kein Wort bei Grassmann berechtigt dazu, ihm diese Ansicht unterzuschieben. Man kann sagen, dass die Kurven nach Grassmann mittels eines solchen Mechanismus konstruirt werden können, der aus starren Stangen (Linealen) besteht, die so an einander geknüpft sind, dass die Verbindungsstellen jedesmal längs aller zusammengeknüpften Stangen in Scharniren beweglich sind. Zu diesem beweglichen Mechanismus treten feste Punkte (Stifte) und Stangen hinzu.

Der „Hauptsatz“ für die algebraischen Flächen lautet in seinem ersten Theile (S. 136):

„Wenn die Lage eines Punktes x im Raume dadurch beschränkt ist, dass zwei gerade Linien, welche durch lineale Konstruktionen aus x und einer Reihe fester Elemente {Punkte, Geraden, Ebenen} hervorgehen, in derselben Ebene liegen sollen, so ist der Ort von x eine algebraische Oberfläche, und zwar ist sie ein Gebilde n-ten Grades, wenn bei jenen Konstruktionen x im Ganzen n-mal angewendet ist.“

Der zweite Theil lautet (S. 137):

„Umgekehrt lässt sich jede algebraische Oberfläche auf die angegebene Weise erzeugen.“

Grassmann hebt auch hervor, dass die zu den Hauptsätzen dualistischen Sätze gelten (siehe z. B. S. 58 und S. 136).

Nunmehr skizziren wir kurz den Inhalt der oben genannten Arbeiten:

Abhandlung II (1846) entwickelt den Begriff der planimetrischen Multiplikation, d. h. der Multiplikation von Punkten und Geraden

in der Ebene, beweist den ersten Theil des Hauptsatzes für ebene algebraische Kurven und erläutert ihn durch Anwendungen auf Kurven zweiter, dritter und n-ter Ordnung.

Abhandlung III (1848). Veranlasst durch einen Ausspruch Plückers nimmt Grassmann hier die in Abh. II gegebenen linealen Konstruktionen der ebenen Kurven dritter Ordnung wieder auf und zeigt, dass sich jede derartige Kurve vermöge linealer Konstruktion erzeugen lässt. Hier wird also der zweite Theil des Hauptsatzes für ebene Kurven dritter Ordnung bewiesen.

Abhandlung IV (1851) enthält den Beweis des zweiten Theiles des Hauptsatzes für ebene algebraische Kurven von beliebiger Ordnung. Es wird gezeigt, wie man aus einer vorgelegten Kurvengleichung in gewöhnlichen recht- oder schiefwinkligen Koordinaten stets eine lineale Erzeugungsweise der Kurve ableiten kann. Zum Schluss wird der Begriff der Verkettung ebener offener Figuren aufgestellt und bei einigen schon früher gegebenen linealen Konstruktionen der Kurven zweiter, dritter und vierter Ordnung angewendet.

Abhandlung V (1851). Während Grassmann, wohl um nicht von dem Lesen seiner Arbeiten abzuschrecken, in Abh. II bis IV nur den Begriff der planimetrischen Multiplikation benutzt, dagegen die methodische Anwendung der Gesetze dieses Kalkuls durch geometrische Ueberlegungen ersetzt hat, entwickelt er hier zunächst die einfachen Gesetze des Kalkuls. Die Betrachtung planimetrischer Produkte mit veränderlichen Faktoren führt ihn alsdann zum Begriff der höheren Projektivität, den man kurz so charakterisiren kann: An die Stelle projektiver Strahlenbüschel treten einander zugeordnete Büschel von Kurven höherer Ordnung. Auf diese und die folgende Arbeit gründet sich, wie wir an der betreffenden Stelle ausführen werden, ein Prioritätsanspruch zu Gunsten Grassmanns gegenüber Chasles und de Jonquières.

Abhandlung VI (1851) folgt in Crelles Journal unmittelbar auf die vorhergehende und stellt die höhere Projektivität in der Ebene mittels der Plückerschen Methode der abgekürzten Bezeichnung dar.

Abhandlung VII (1852). Die Fruchtbarkeit seines Hauptsatzes für die Theorie der ebenen algebraischen Kurven beleuchtet Grassmann hier insbesondere im Falle der Kurven vierter Ordnung. Mehrere lineale Konstruktionen dieser Kurven werden sehr gründlich erörtert; schliesslich wird gezeigt, wie man jede vorgelegte Kurve vierter Ordnung in der Ebene durch eine derartige Konstruktion erzeugen kann. Diese Abhandlung dürfte besonders geeignet sein, in die Art der Anwendung der planimetrischen Multiplikation einzuführen und deren Tragweite erkennen zu lassen.

Abhandlung VIII (1855). Hier wird nach einander der erste und der zweite Theil des Hauptsatzes für algebraische Flächen bewiesen.

Abhandlung IX (1855). In der unmittelbar vorhergehenden Arbeit hat Grassmann offenbar absichtlich vermieden, den Begriff der stereometrischen Multiplikation zu benutzen. Er führt ihn jetzt ein und entwickelt die Gesetze des Rechnens mit Punkten, Geraden und Ebenen. Schliesslich spricht er den Hauptsatz für algebraische Flächen unter Benutzung dieser Symbolik aus.

Abhandlung X (1855), die wieder auf die vorhergehende in Crelles

Journal unmittelbar folgt, giebt zuerst nochmals kurz die Gesetze der stereometrischen Multiplikation und darauf eine ausführliche Analyse der verschiedenen Gattungen von linealen Konstruktionen im Raume und ihrer Anwendung auf algebraische Flächen. Dabei wird der Begriff der Verkettung offener Figuren im Raume eingeführt.

Abhandlung XI (1855) folgt in Crelles Journal wieder unmittelbar auf Abh. X und enthält die lineale Erzeugung aller geradlinigen Flächen zweiter Ordnung.

Abhandlung XII (1855) schliesst sich hieran unmittelbar an und giebt lineale Erzeugungen von Flächen dritter Ordnung, insbesondere auch deren Erzeugung als Durchschnitt dreier projektiver Ebenenbüschel. Es wird endlich gezeigt, dass jede Fläche dritter Ordnung, die mindestens vier Gerade enthält, auf die letzte Weise gewonnen werden kann.

Abhandlung XIV (1856) wurde veranlasst durch die Behauptung Bellavitis', dass die allgemeine ebene Kurve dritter Ordnung nicht durch die von Grassmann in Abh. III angegebenen linealen Konstruktionen erzeugbar sei. Diese Behauptung als irrig nachzuweisen, machte Grassmann keine Mühe, da Bellavitis' Fehlschlüsse auf der Hand lagen. Grassmann benutzt die Gelegenheit, nochmals gründlich die linealen Erzeugungen aller ebenen Kurven dritter Ordnung zu untersuchen, und zeigt, wie man diese linealen Erzeugungen methodisch herleiten kann, wenn man neun Punkte einer Kurve dritter Ordnung kennt. Dabei beweist er den Satz. dass sich jeder Kurve dritter Ordnung zwei reelle Dreiecke einbeschreiben lassen, von denen entsprechende Seiten einander paarweise wieder in Punkten der Kurve schneiden. Das dabei angewandte Beweisverfahren hat allerdings mit Grassmanns Kalkul der planimetrischen Multiplikation nichts zu thun, es beruht vielmehr auf Stetigkeitsbetrachtungen. Ausserdem entwickelt Grassmann Sätze über die einer ebenen Kurve dritter Ordnung eingeschriebenen Zehnecke.

Abhandlung XVIII (1872) in den Göttinger Nachrichten nimmt die Stetigkeitsbetrachtungen, von denen soeben die Rede war, wieder auf und leitet aus ihnen einen Satz über Vielecke ab, die einer ebenen Kurve dritter Ordnung eingeschrieben werden können. Diese Abhandlung ist frei von den eigentlichen Grassmannschen Methoden.

Der Wunsch, seine Methode der linealen Erzeugung der ebenen Kurven in weiteren Kreisen bekannt zu machen, hat Grassmann davon abgehalten, in den Abhandlungen die Gesetze der planimetrischen Multiplikation mit voller Konsequenz anzuwenden. Vielmehr verweist er oft auf die Figur. Deshalb vermisst man zuweilen die Einheitlichkeit der gedanklichen Entwickelung; an einzelnen Stellen werden ferner Behauptungen aufgestellt, deren Richtigkeit man zwar leicht verificirt, deren eigentlicher Ursprung aber im Dunkeln bleibt, eben weil Grassmann ihre wahre Quelle, die Anwendung der Methode der planimetrischen Multiplikation, nicht aufdeckt. Wir glauben daher zur rechten Würdigung der Grassmannschen Arbeiten insbes. vom methodischen Standpunkte aus dadurch beitragen zu können, dass wir in den Anmerkungen an mehreren Stellen die ursprüngliche rechnerisch-symbolische Gestaltung der Schlussfolgerungen wiederherstellen. Es wird dabei nützlich sein, wenn wir gleich hier die anzuwendenden Ge-

setze der symbolischen Rechnung kurz ableiten, da sie bei Grassmann im Wesentlichen erst in Abh. V auftreten. Die stereometrische Multiplikation brauchen wir erst da, wo sie Grassmann selbst anwendet.

Objekte der planimetrischen Multiplikation sind die Zahlen (bezeichnet mit $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \ldots$), die Punkte (bez. mit $a, b, c \ldots$) und die Geraden (bez. mit $A, B, C \ldots$). Durch $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \Gamma \ldots$ wollen wir Objekte bezeichnen, bei denen es dahingestellt bleibt, ob sie Zahlen, Punkte oder Gerade sein sollen.

Die Produkte von zwei Faktoren werden so definirt:

1a) Das Produkt eines Punktes a mit einer Zahl $\mathfrak{a}$ ist der Punkt a selbst, sobald $\mathfrak{a} \neq 0$ ist:

$$a\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{a}a \equiv a.$$

1b) Das Produkt einer Geraden A mit einer Zahl $\mathfrak{a}$ ist die Gerade A selbst, sobald $\mathfrak{a} \neq 0$ ist:

$$\mathfrak{a}A \equiv A\mathfrak{a} \equiv A.$$

Statt des Gleicheitszeichens $=$ benutzt Grassmann nur deshalb das Zeichen der Kongruenz $\equiv$, weil in der Ausdehnungslehre z. B. $\mathfrak{a}a$ und a zwar zwei Punkte mit demselben geometrischen Ort, aber von verschiedenem Gewicht bedeuten, was für die Multiplikation nicht von Belang ist, wohl aber für die Addition, die jedoch in den geometrischen Abhandlungen über Kurven und Flächen nicht vorkommt.

2a) Das Produkt eines Punktes a mit Null ist gleich Null:

$$0 \,.\, a = a \,.\, 0 = 0.$$

2b) Das Produkt einer Geraden A mit Null ist gleich Null:

$$0 \,.\, A = A \,.\, 0 = 0.$$

3a) Das Produkt zweier Punkte, die nicht zusammenfallen, ist die Gerade durch beide Punkte.

3b) Das Produkt zweier Geraden, die nicht zusammenfallen, ist der Schnittpunkt beider Geraden.

4a) Das Produkt zweier zusammenfallender Punkte ist gleich Null.

4b) Das Produkt zweier zusammenfallender Geraden ist gleich Null.

5) Das Produkt eines Punktes a mit einer Geraden A, also aA und ebenso Aa, ist eine von Null verschiedene Zahl, sobald der Punkt nicht auf der Geraden liegt.

6) Das Produkt eines Punktes a mit einer Geraden A, die durch ihn geht, ist gleich Null:

$$aA = Aa = 0.$$

Die Produkte von mehreren Faktoren werden auf die von zwei Faktoren durch folgende Festsetzung zurückgeführt:

7) Produkte von mehr als zwei Faktoren sollen dadurch ausgewerthet werden, dass man zuerst den ersten Faktor mit dem zweiten multiplicirt, das Ergebniss mit dem dritten u. s. w. Dagegen sollen Klammern dieselbe Bedeutung wie in der gewöhnlichen Arithmetik haben, z. B.:

$$\mathsf{A}\mathsf{B}\Gamma \equiv (\mathsf{A}\mathsf{B})\Gamma.$$

Statt der Klammern benutzt Grassmann häufig zwei Punkte, z. B. ist:

$$\mathsf{A} \,.\, \mathsf{B}\Gamma \,.\, \Delta \equiv \mathsf{A}(\mathsf{B}\Gamma)\Delta.$$

Aus diesen Definitionen, zu denen der Vollständigkeit halber noch die selbstverständliche hinzugefügt werden kann, dass Zahlen wie in der ge-

wöhnlichen Arithmetik mit einander zu multipliciren sind*), ergiebt sich:

Jedes Produkt stellt eine Zahl oder einen Punkt oder eine Gerade dar.

Ist ein Faktor gleich Null, so ist das ganze Produkt gleich Null.

In einem Produkt, das einen Punkt oder eine Gerade bedeutet, dürfen alle Zahlenfaktoren gestrichen werden.

Das Gesetz der Kommutation

$$\mathsf{AB} \equiv \mathsf{BA}$$

gilt bei einem Produkte aus zwei Faktoren stets.

Dagegen gilt das Gesetz der Association, nach dem $\mathsf{AB\Gamma}$ dasselbe wie $\mathsf{A(B\Gamma)}$ wäre, nicht stets. Man kann sich dies an dem Beispiel abC sosofort klar machen.

Alle Definitionen sind zu einander dualistisch. Folglich steht jedem durch Anwendung der planimetrischen Multiplikation zu gewinnendem Satze der dualistische zur Seite wie in der projektiven Geometrie.

Das Unendlichferne behandelt Grassmann, wie es die projektive Geometrie thut, das heisst: Jede Gerade hat einen unendlich fernen Punkt. Das Produkt eines im Endlichen gelegenen Punktes mit dem unendlich fernen Punkte einer Geraden ist also die Gerade, die durch den ersten Punkt geht und der gegebenen Geraden parallel ist. (Vgl. S. 81.)

Die wesentlichen Abweichungen der planimetrischen Multiplikation von der gewöhnlichen, arithmetischen, sind, dass erstens in Produkten, die Punkte oder Gerade bedeuten, alle von Null verschiedenen Zahlenfaktoren gestrichen werden dürfen, und dass zweitens das Gesetz der Association nur ausnahmsweise gilt, z. B. für Produkte von drei Punkten oder drei Geraden, da ja offenbar:

$$abc \equiv a(bc), \quad ABC \equiv A(BC)$$

ist.

Nach den Definitionen kann ein Produkt von zwei Faktoren nur dann eine geometrische Bedeutung haben, wenn beide Faktoren Punkte oder beide Gerade sind. Da jedes Produkt von mehr als zwei Faktoren, z. B. $\mathsf{AB\Gamma\Delta}\ldots$, nach 7) successiv zu bilden ist, indem man zuerst AB, dann $\mathsf{(AB)\Gamma}$, dann $\mathsf{(AB\Gamma)\Delta}$ u. s. w. berechnet, so kann es nur dann eine geometrische Bedeutung haben, wenn A und B, ferner AB und $\mathsf{\Gamma}$, ferner $\mathsf{AB\Gamma}$ und $\mathsf{\Delta}$ u. s. w. jedesmal entweder zugleich Punkte oder zugleich Gerade sind. Sind A und B Punkte, so ist dann AB eine Gerade, also $\mathsf{\Gamma}$ eine Gerade, daher $\mathsf{AB\Gamma}$ ein Punkt, somit $\mathsf{\Delta}$ ein Punkt u. s. w. Sind A und B Gerade, so tritt das Dualistische ein. Mithin haben nur Produkte von den Formen

$$abCdEf\ldots \quad \text{und} \quad ABcDeF\ldots,$$

wobei also zuerst zwei gleichartige Faktoren, Punkte oder Gerade, alsdann immer abwechselnd Gerade und Punkte bez. Punkte und Gerade auftreten, eine geometrische Bedeutung.

---

*) Eigentlich müsste man sagen: Im Gebiete der planimetrischen Multiplikation werden alle Zahlen, die nicht gleich Null sind, einander gleich gesetzt, daher auch ihre Produkte. Vgl. die zweite Fussnote auf S. 53 und die Fussnote auf S. 146.

Sie heissen in engerem Sinne planimetrische Produkte (vgl. S. 87).*)

Die planimetrischen Produkte haben zwei Arten von Faktoren, einmal die fortschreitenden Faktoren (vgl. S. 87, 88):

$$a,\ b,\ C,\ d,\ E,\ f\ldots \quad \text{bez.} \quad A,\ B,\ c,\ D,\ e,\ F\ldots$$

und dann die Theilprodukte:

$$ab,\ abC,\ abCd\ \ldots \quad \text{bez.} \quad AB,\ ABc,\ ABcD\ \ldots,$$

während z. B. bC kein Faktor des ersten Produktes ist, weil das Gesetz der Association nicht gilt.

Ein planimetrisches Produkt kann auch eine anscheinend verwickeltere Form haben, z. B. kann im Produkt abC einer der Faktoren, etwa der Punkt b, selbst wieder ein Produkt, etwa $b \equiv DE$ sein, sodass das Produkt

$$a(DE)C$$

vorliegt. Aber hier sind doch nur a, DE, C, $a(DE)$ Faktoren des ganzen Produktes, während das darin enthaltene Produkt DE noch die fortschreitenden Faktoren D und E hat. In dem planimetrischen Produkt $a(DE)C$, um bei diesem Beispiel zu bleiben, kann nun sehr wohl der Faktor $DE = 0$ sein, was ja eintrifft, wenn die Geraden D und E zusammenfallen, nach 4b). Wenn wir also planimetrische Produkte allgemein betrachten wollen, so müssen wir auch solche Fälle einbeziehen, in denen einer der Faktoren weder ein Punkt, noch eine Gerade, dagegen gleich Null ist. Alsdann wird das ganze Produkt gleich Null, wie schon gesagt wurde.

Ein planimetrisches Produkt von zwei Faktoren, ab bez. AB, ist dann und nur dann gleich Null, wenn entweder einer der fortschreitenden Faktoren gleich Null ist oder wenn beide Faktoren zusammenfallen.

Hierauf reducirt sich die Erledigung der Frage, wann ein planimetrisches Produkt von beliebig vielen Faktoren gleich Null ist. Es wird das Beispiel abC zur Erläuterung genügen: Erstens ist dies Produkt als Produkt von zwei Faktoren zu schreiben: $(ab)C$. Nach dem Vorhergehenden ist dies Produkt nur dann gleich Null, wenn $ab = 0$ oder $C = 0$ ist oder ab mit C zusammenfällt. Aber ab ist nur dann gleich Null, wenn $a = 0$ oder $b = 0$ ist oder a mit b zusammenfällt. Also ist abC nur dann gleich Null, wenn $a = 0$ oder $b = 0$ oder $C = 0$ oder $a \equiv b$ oder $ab \equiv C$ ist.

Von grösster Wichtigkeit ist nun ein Satz, der sich auf die Reducirbarkeit von planimetrischen Produkten von drei Faktoren bezieht. Ein solches Produkt hat entweder die Form abC oder die Form ABc. Betrachten wir die erstere. Auch sei abC nicht gleich Null. Nach dem Vorhergehenden sind dann a und b wirkliche Punkte und nicht gleich Null; ebenso ist C eine wirkliche Gerade. Ausserdem fällt a nicht auf b, und die Gerade ab fällt nicht mit der Geraden C zusammen. Das Produkt abC ist nun der Schnittpunkt der Geraden ab mit der von ihr verschie-

*) Jedoch ist Grassmann selbst dieser Definition nicht immer treu geblieben, denn z. B. in dem Satz auf S. 115 nennt er auch ein Produkt, das wie die obigen gebaut ist, aber schliesslich mit zwei gleichartigen Faktoren endet, planimetrisch, so das Produkt $abCdEfg$.

denen Geraden C. Eine Reduktion auf weniger als drei Faktoren tritt nur dann ein, wenn dieser Schnittpunkt einer der beiden ausgezeichneten Punkte a, b der Geraden ab ist, das heisst wenn C durch a oder b geht. Analoges gilt von dem Produkte ABc.

Führt man daher die Redeweise ein, ein Punkt liege mit einer Geraden vereint*), wenn der Punkt auf der Geraden liegt, so kann man sagen:

Ein planimetrisches Produkt aus drei von Null verschiedenen Faktoren reducirt sich auf den ersten oder zweiten Faktor, wenn dieser, nicht aber auch der andere, mit dem dritten Faktor vereint liegt.

Diese „Reduktionsregel", wie wir sie in allem Folgenden kurz nennen wollen, weil sie sehr oft gebraucht wird, hat Grassmann auf S. 87 aufgestellt. Er drückt sie gelegentlich anders aus, so z. B. auf S. 88. Zur Abkürzung des Ausdrucks werden wir künftig das Zeichen $\frown$ zwischen einen Punkt a und eine Gerade A setzen, also $a \frown A$ oder $A \frown a$ schreiben, um auszudrücken, dass a mit A vereint liegt.

Grassmann wendet nur diese Reduktionsregel für Produkte von drei Faktoren an. Die Frage, ob es auch solche Reduktionsregeln giebt, die sich auf Produkte von mehr als drei Faktoren beziehen und die nicht etwa nur in wiederholter Anwendung dieser einen Regel bestehen, berührt er nicht. Es ist dies eine Lücke im Kalkul der planimetrischen Multiplikation. Thatsächlich giebt es im Gebiete der planimetrischen Multiplikation allein kein Mittel, um das identische Verschwinden eines Produktes von beliebig vielen Faktoren festzustellen, und entsprechend auch kein Mittel, die Gleichheit zweier Produkte zu erkennen. Auf diesen Umstand werden wir gelegentlich zurückkommen.

Nach diesen Vorbemerkungen geben wir jetzt die uns nützlich erscheinenden Erläuterungen zu einzelnen Stellen des Textes der Abhandlung II.

Zu S. 49, Z. 9 v. u. Jacob Steiner, Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander, I. Theil, Berlin 1832, bei Fincke, siehe auch Steiners Ges. Werke Bd. I, S. 229ff., Berlin 1882, bei Reimer, oder Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 82, 83, Leipzig 1896, bei Engelmann.

Zu S. 49, Z. 6 v. u. Die Bemerkungen über Möbius werden auf S. 70 erläutert.

Zu S. 51, Fig. 1. In dieser und den späteren Figuren haben wir die festen Punkte durch gefüllte, die beweglichen durch leere Kreise, die festen Geraden durch starke, die beweglichen durch schwache Linien gekennzeichnet.

Zu S. 59, Gleichungen (9). Dass die zweite Gleichung dasselbe wie die erste aussagt, folgt rechnerisch so: Die erste Gleichung enthält in der Schreibweise:

$$(axBcD)\,xe = 0$$

links das Produkt der drei Faktoren $axBcD$, x, e, die alle drei Punkte darstellen. Für Produkte von drei Punkten gilt aber, wie erwähnt, das Ge-

*) Grassmann braucht hierfür gelegentlich, S. 220 f., das Wort: incident. Wir benutzen dagegen die jetzt gebräuchliche Redeweise.

setz der Association und für Produkte von zwei Faktoren das der Kommutation. Also kommt:

$$ex(axBcD) = 0,$$

wofür wir auch schreiben können:

$$(ex)[(axBc)D] = 0.$$

Aber ex, $axBc$, D sind sämtlich Gerade. Das Gesetz der Association, das hier wieder gilt, gestattet uns daher zu schreiben:

$$(ex)D(axBc) = 0$$

oder:

$$exD(axBc) = 0.$$

Dieselbe Schlussweise liefert links weiterhin $exD(axB)c$ oder $exDc(axB)$, darauf $exDcB(ax)$ und schliesslich $exDcBxa$.

Zu S. 59, Z. 9 u. 8 v. u. Dass die namhaft gemachten fünf Punkte auf dem Kegelschnitte (9) liegen, erkennt man durch Rechnung so: Ist zunächst $x \equiv a$, so ist $ax \equiv 0$, also die erste Gleichung (9) erfüllt. Ebenso ist für $x \equiv e$ die zweite Gleichung (9) erfüllt. Ist $x \equiv BD$, so ist nach der Reduktionsregel:

$$axB \equiv x, \quad \text{da} \quad x \frown B,$$
$$axBcD \equiv xcD \equiv x, \quad \text{da} \quad x \frown D,$$
$$axBcDxe \equiv xxe = 0.$$

Mithin erfüllt $x \equiv BD$ die erste Gleichung (9). Ist ferner $x \equiv acD$, so ist

$$ax \equiv xa \equiv acDa \equiv ac \,.\, D \,.\, a \equiv ac, \quad \text{da} \quad ac \frown a,$$
$$axBc \equiv acBc \equiv ac \,.\, B \,.\, c \equiv ac, \quad \text{da} \quad ac \frown c,$$
$$axBcDxe \equiv acDxe \equiv acD \,.\, x \,.\, e \equiv x \,.\, x \,.\, e = 0.$$

Also erfüllt $x \equiv acD$ die erste Gleichung (9). Analog erfüllt $x \equiv ecB$ die zweite Gleichung (9).

Vom methodischen Standpunkte hat man aber noch zu fragen, wie Grassmann gerade zu diesen fünf Punkten kommt. Dies geschieht so: Man sucht x so zu bestimmen, dass eines der in der ersten Gleichung (9) auftretenden Theilprodukte

$$ax, \quad axB, \quad axBc, \quad axBcD, \quad axBcDx$$

gleich Null wird, weil dann die Gleichung befriedigt wird.

$ax = 0$ giebt sofort $x \equiv a$.

$ax \neq 0$, $axB = 0$ giebt nach der Regel für das Verschwinden eines Produktes von drei Faktoren: $B \equiv ax$. Da aber a im Allgemeinen nicht auf B liegt, ist dies auszuschliessen.

$axB \neq 0$, $axBc = 0$ oder $ax \,.\, B \,.\, c = 0$ zieht auf Grund derselben Regel nach sich: $ax \,.\, B \equiv c$. Aber c liegt im Allgemeinen nicht auf B.

$axBc \neq 0$, $axBcD = 0$ oder $axB \,.\, c \,.\, D = 0$ zieht ebenso nach sich: $axB \,.\, c \equiv D$, c liegt jedoch im Allgemeinen nicht auf D.

$axBcD \neq 0$, $axBcDx = 0$ oder $axBc \,.\, D \,.\, x = 0$ zieht nach sich: $axBc \,.\, D \equiv x$. Hiernach liegt x zunächst auf D. Um nun x selbst zu

finden, multipliciren wir beiderseits mit c. Da $axBc \frown c$, so liefert dann die Reduktionsregel:

$$axBc \equiv xc \quad \text{oder:} \quad axB \,.\, c \equiv xc.$$

Beiderseitige Multiplikation mit B giebt, da $axB \frown B$:

$$axB \equiv xcB.$$

Liegt x nicht auf B, so giebt Multiplikation mit x, da $ax \frown x$ und $xc \frown x$:

$$ax \equiv xc,$$

das heisst x liegt dann auf ac. Vorhin fanden wir, dass x auf D liegt, das heisst es kommt $x \equiv acD$. Liegt dagegen x auf B, so kommt $x \equiv BD$. Da wir diese Ergebnisse weiter unten noch einmal gebrauchen, so fassen wir sie zusammen:

Haben a, B, c, D allgemeine Lage, so ist das planimetrische Produkt $axBcDx$ nur für die folgenden drei Punkte

$$x \equiv a, \quad x \equiv acD, \quad x \equiv BD$$

gleich Null.

Die zweite Schreibweise der Gleichung (9) giebt analog:

$$x \equiv e, \quad x \equiv ecB, \quad x \equiv DB.$$

Der letztere Punkt trat schon soeben auf. Wir gelangen also genau zu den fünf von Grassmann angegebenen Punkten, ohne dabei die Anschauung der Figur zu benutzen.

Zu S. 60, Z. 9—15. Rechnerisch so: Es handelt sich darum, die Gleichungen:

$$BD \equiv k, \quad acD \equiv d, \quad ecB \equiv b$$

nach B, D und c aufzulösen. Da nach der ersten Gleichung $k \frown B$ und $k \frown D$, so geben die beiden letzten Gleichungen, wenn man sie mit k multiplicirt, nämlich:

$$ac \,.\, D \,.\, k \equiv dk, \quad ec \,.\, B \,.\, k \equiv bk$$

nach der Reduktionsregel:

$$D \equiv dk, \quad B \equiv bk,$$

wodurch B und D gefunden sind. Multipliciren wir dagegen die zweite und dritte Gleichung mit c:

$$ac \,.\, D \,.\, c \equiv dc, \quad ec \,.\, B \,.\, c \equiv bc,$$

so giebt die Reduktionsregel, da $ac \frown c$, $ec \frown c$:

$$ac \equiv dc, \quad ec \equiv bc,$$

das heisst, c liegt auf ad und auf eb, mithin ist:

$$c \equiv (ad)\,(be).$$

Bei dieser Ableitung ist stillschweigend vorausgesetzt, dass k nicht mit ac und ec und ebenso c nicht mit B und D vereint liege, was sich ja auch so verhält.

Zu S. 61, zweite Anmerkung. Es handelt sich hier um den Satz des Desargues, siehe Oeuvres de Desargues, éd. Poudra (Paris 1864), I. S. 413.

Zu dem vorletzten Satze der Anmerkung ist hervorzuheben, dass die Sätze der planimetrischen Multiplikation in der That **nicht** ausreichen, das identische Bestehen der angegebenen Gleichung nachzuweisen.

Zu S. 63, Z. 2. Auch rechnerisch zu folgern, vgl. unsere Anm. zu den Gleichungen (9), S. 59.

Zu S. 63, Z. 6—8. Methodisch gelangt man zu den in der Folge von Grassmann genannten neun Punkten, indem man die Punkte x sucht, für die eines der Theilprodukte von

$$axBcDxD_1c_1B_1xa_1 \quad \text{oder} \quad a_1xB_1c_1D_1xDcBxa$$

gleich Null ist. Wir haben schon vorhin diejenigen Punkte x bestimmt, für die $axBcDx = 0$ ist, nämlich:

$$x \equiv a, \quad x \equiv BD, \quad x \equiv acD.$$

Dies sind die im Texte mit a, k, d bezeichneten Punkte. Soll nun weiterhin

$$axBcDx \neq 0, \quad \text{aber} \quad axBcDxD_1 = 0$$

sein, so können wir dafür schreiben:

$$D_1 \equiv axBcDx \equiv axBcD \,.\, x.$$

Also liegt x auf D_1. Multipliciren wir diese Gleichung mit D, das Ergebniss mit c, dann mit B und schliesslich mit a, so kommt nach und nach durch Anwendung der Reduktionsregel:

$$D_1D \equiv axBcD \,.\, x \,.\, D \equiv axBcD, \quad \text{da} \quad axBcD \frown D,$$

$$D_1Dc \equiv axBc \,.\, D \,.\, c \equiv axBc, \quad \text{da} \quad axBc \frown c,$$

$$D_1DcB \equiv axB \,.\, c \,.\, B \equiv axB, \quad \text{da} \quad axB \frown B,$$

$$D_1DcBa \equiv ax \,.\, B \,.\, a \equiv ax, \quad \text{da} \quad ax \frown a.$$

Also liegt x auf D_1DcBa. Weil x auf D_1 liegt, wie wir vorher sahen, so folgt:

$$x \equiv D_1DcBaD_1.$$

Diesen Punkt nennt Grassmann e_1. Formuliren wir dies Ergebniss:

Haben a, B, c, D, D_1 allgemeine Lage, so ist das planimetrische Produkt $axBcDxD_1$ nur für folgende Punkte x gleich Null:

$$x \equiv a, \quad x \equiv BD, \quad x \equiv acD, \quad x \equiv D_1DcBaD_1.$$

Jetzt nehmen wir an:

$$axBcDxD_1 \neq 0, \quad \text{aber} \quad axBcDxD_1c_1 = 0.$$

Hierfür lässt sich schreiben:

$$axBcDx \,.\, D_1 \,.\, c_1 = 0,$$

das heisst c_1 muss mit $axBcDx$ und D_1 vereint sein. Aber im Allgemeinen liegt c_1 nicht auf D_1.

Nunmehr setzen wir:

$$axBcDxD_1c_1 \neq 0, \quad \text{aber} \quad axBcDxD_1c_1B_1 = 0,$$

wobei sich analog ergeben würde, dass c_1 auf B_1 liegen müsste, was im Allgemeinen nicht der Fall ist.

Setzen wir jetzt:

$$axBcDxD_1c_1B_1 \neq 0, \quad \text{aber} \quad axBcDxD_1c_1B_1x = 0$$

und nehmen wir, wie dies Grassmann auf S. 62 unten thut, $B \equiv B_1$ an, so folgt, dass x auf den beiden Geraden $axBcDxD_1c_1$ und B liegt. Daher ist

$$x \equiv axBcDxD_1c_1B.$$

Da $x \frown B$, so ist $axB \equiv x$, sodass bleibt:

$$x \equiv xcDxD_1c_1B.$$

Da $xc \frown x$, so ist $xcDx \equiv xc$, sodass bleibt:

$$x \equiv xcD_1c_1B.$$

Multiplikation mit c_1 giebt, da $xcD_1c_1 \frown c_1$:

$$xc_1 \equiv xcD_1c_1.$$

Multiplikation mit D_1 giebt, da $xcD_1 \frown D_1$:

$$xc_1D_1 \equiv xcD_1.$$

Liegt x nicht auf D_1, so giebt Multiplikation mit x, da $xc_1 \frown x$ und $xc \frown x$:

$$xc_1 \equiv xc,$$

das heisst x liegt auf cc_1. Da x auch auf B liegt, so ist dann $x \equiv cc_1B$. Diesen Punkt nennt Grassmann f. Wenn dagegen x auf D_1 liegt, so kommt $x \equiv BD_1$, und dies ist Grassmanns Punkt k_1. Wir sehen somit:

Haben a, B, c, D, D_1 und c_1 allgemeine Lage, so ist das planimetrische Produkt $axBcDxD_1c_1Bx$ nur für folgende Punkte x gleich Null:

$$x \equiv a, \quad x \equiv BD, \quad x \equiv acD,$$
$$x \equiv D_1DcBaD_1, \quad x \equiv cc_1B, \quad x \equiv BD_1.$$

Es sind dies Grassmanns Punkte a, k, d, e_1, f, k_1. Entsprechend ist

$$a_1xBc_1D_1xDcBx = 0$$

für die sechs Punkte:

$$x \equiv a_1, \quad x \equiv BD_1, \quad x \equiv a_1c_1D_1,$$
$$x \equiv DD_1c_1Ba_1D, \quad x \equiv c_1cB, \quad x \equiv BD,$$

die Grassmann mit a_1, k_1, d_1, e, f, k bezeichnet. Insgesamt erhalten wir also wirklich neun verschiedene Punkte wie im Text.

Zu S. 64, Z. 12—16. Hier haben wir den Originaltext abändern müssen, weil er einen für das Spätere belanglosen Irrthum enthält. Vgl. das Verzeichniss der Abweichungen.

Zu S. 64, Z. 20 u. f. Hier nimmt Grassmann eine Vereinfachung vor, bei der er stillschweigend voraussetzt, dass von den gegebenen Punkten und Geraden nur c und c_1 verändert werden. Diese wählt er so, dass k mit e und k_1 mit e_1 zusammenfällt. Um dies rechnerisch zu erreichen, verfahren wir so: Da

$$k \equiv BD, \quad e \equiv DD_1c_1Ba_1D,$$

also k und e von c unabhängig sind, so fragt es sich zunächst nur, wie c_1 zu wählen ist, damit $k \equiv e$ oder

$$(\alpha) \qquad BD \equiv DD_1 c_1 B a_1 D$$

wird. Wenn man diese Gleichung mit a_1 multiplicirt, so kommt:

$$BDa_1 \equiv DD_1 c_1 B a_1, \quad \text{da} \quad DD_1 c_1 B a_1 \frown a_1.$$

Multiplikation mit B giebt:

$$BD \equiv DD_1 c_1 B, \quad \text{da} \quad BD \frown B \text{ und } DD_1 c_1 B \frown B.$$

Multiplikation mit c_1 giebt:

$$BDc_1 \equiv DD_1 c_1, \quad \text{da} \quad DD_1 c_1 \frown c_1.$$

Liegt c_1 nicht auf D, so giebt die Multiplikation mit D die Gleichung $BD \equiv DD_1$, die falsch ist. Daher ist c_1 auf D zu wählen. Alsdann reducirt sich die ursprüngliche Forderung (α), da dann $DD_1 c_1 \equiv D$, $DBa_1 D \equiv DB$ ist, auf eine Identität. Entsprechend ist c auf D_1 zu wählen.

Durch diese besondere Wahl von c und c_1 wird erreicht, dass von den drei Schnittpunkten d, e, k bez. d_1, e_1, k_1 der Geraden D bez. D_1 mit der Kurve dritter Ordnung je zwei, nämlich e und k bez. e_1 und k_1 zusammenfallen, sodass D und D_1 die Tangenten der Kurve in e und e_1 werden.

Zu S. 65, Z. 1 Druckfehler: c und c_1 sind zu vertauschen.

Zu S. 65, Z. 7—15. Denn alle Kurven dritter Ordnung durch acht gemeinsame Punkte haben noch einen Punkt gemein. Durch die acht Punkte e, e_1 (beide doppelt zählend), d, d_1, a, a_1 lässt sich aber eine zerfallende Kurve dritter Ordnung legen, bestehend aus den Geraden ed, $e_1 d_1$ und aa_1, von denen die ersten beiden die ursprüngliche Kurve in e und e_1 berühren. Wählt man a und a_1 wie im Text, so liegt f nicht auf dieser zerfallenden Kurve und ist daher auch nicht der neunte Punkt, den alle diejenigen Kurven dritter Ordnung gemein haben, die durch e, e_1, d, d_1, a, a_1 gehen und ed und $e_1 d_1$ zu Tangenten in e bez. e_1 haben. Daher giebt es nur eine Kurve dritter Ordnung durch e, e_1, d, d_1, a, a_1 und f, die ed und $e_1 d_1$ zu Tangenten in e bez. e_1 hat.

Zu S. 66, Z. 1—6. Diese Erzeugung aller Kurven dritter Ordnung heisst heutzutage allgemein die Grassmannsche. Vgl. jedoch unsere ausführliche Anmerkung zu S. 97, aus der hervorgeht, dass es nicht richtig ist, blos diese specielle Erzeugung nach Grassmann zu benennen.

Zu S. 70, Z. 17f. v. u. A. F. Möbius, Der barycentrische Calcul u. s. w., Leipzig 1827, § 136—138 auf S. 172—177, § 70 auf S. 83, 84. Siehe auch Möbius Ges. Werke Bd. I, S. 161—166, S. 92f.

Zu S. 70, Z. 11 u. 10 v. u. Es handelt sich um die rationalen Kurven oder Kurven vom Geschlechte Null.

III. Ueber die Erzeugung der Kurven dritter Ordnung durch gerade Linien und über geometrische Definitionen dieser Kurven.

Crelles Journal Bd. 36 (1848).

Zu S. 73, Z. 2 des Textes. Julius Plücker, Ueber Kurven dritter Ordnung und analytische Beweisführung, Crelles Journal Bd. 34 (1847), S. 329—336. Wir führen folgende Stelle daraus an:

„Die Geometrie der höheren Kurven kann der Algebra und ihrer Begriffs-Bestimmungen nicht entbehren. Es giebt nicht einmal eine geometrische Definition einer Kurve dritter Ordnung, und wo es keine allgemeine Definition giebt, da giebt es auch keine methodische Behandlung. Die Bestimmung einer Kurve dritter Ordnung als einer solchen, die von einer geraden Linie in drei Punkten geschnitten wird, ist die geometrische Umschreibung einer algebraischen Definition. .... Die allgemeinste geometrische Definition einer Kurve dritter Ordnung wäre nach meiner Meinung immer noch diejenige, welche als Interpretation der Gleichung .... sich ergiebt ....:

„„Wenn vier gerade Linien (p), (q), (r) und (s) gegeben sind, so ist der geometrische Ort solcher Punkte, für welche das Produkt aus den Abständen von den drei ersten gegebenen geraden Linien zu dem Kubus des Abstandes von der vierten geraden Linie in einem gegebenen Verhältniss steht, eine Kurve dritter Ordnung."" ..... Aber wer würde es unternehmen, aus der vorstehenden, oder aus irgend einer andern Definition, auf geometrischem Wege, die Eigenschaften der Kurven dritter Ordnung systematisch abzuleiten?".

Als Plücker dies schrieb, kannte er vermuthlich die Grassmannsche Definition (oben S. 66) nicht. Das Heft von Crelles Journal, in dem die Plückersche Abhandlung steht, ist übrigens das letzte, in dem sich rein mathematische Abhandlungen von Plücker finden, der bekanntlich damals genöthigt wurde, sich der Physik zuzuwenden. Plücker ist auf die Grassmannsche Reklamation nicht zurückgekommen.

Zweifellos ist Plücker im Unrecht, wenn er behauptet, dass es keine rein geometrische Definition der Kurven dritter Ordnung gebe, denn die Grassmannsche Definition ist rein geometrisch und allgemein; die Frage, ob man mit Hülfe dieser Definition nun auch die Kurven etwa punktweise, vielleicht mittels Lineals und Zirkels, zu zeichnen vermöge, kommt ja hierbei nicht in Betracht. Wenn aber Plücker wünscht, „auf geometrischem Wege die Eigenschaften der Kurven dritter Ordnung systematisch abzuleiten", so thut wohl das, was Grassmann in der Abhandlung II über die Kurven dritter Ordnung beigebracht hat, diesem Wunsche nicht Genüge.

Zu S. 75, Fig. 15. Diese Figur ist im Original nicht vorhanden. Sie soll das Verstehen der Betrachtung auf S. 75 unten erleichtern.

Zu S. 75, Z. 11—17. Der rechnerische Nachweis gestaltet sich so: Nach Fig. 14 ist die Gleichung der Kurve:

$$xaCb(xa_1C_1b_1)xd = 0.$$

Nun ist $xaCb = 0$ für $x \equiv a$, $xa_1C_1b_1 = 0$ für $x \equiv a_1$, $xd = 0$ für $x \equiv d$. Hiermit sind drei der neun Punkte gefunden. Auch aus der For-

derung, dass das Theilprodukt $xaCb \, . \, xa_1 C_1 b_1 = 0$ sei, könnten wir einen Punkt finden [nämlich $x \equiv bb_1 Ca \, . \, (bb_1 C_1 a_1)$], aber diesen Punkt benutzt Grassmann nicht. Da die drei Faktoren $xaCb$, $xa_1 C_1 b_1$, xd gerade Linien sind und deshalb in beliebiger Reihenfolge geschrieben werden können, so kommen wir dazu, das Theilprodukt

$$xaCb \, . \, xd = 0$$

zu setzen unter der Voraussetzung: $xaCb \neq 0$, $xd \neq 0$. Dann ist:

$$(\alpha) \qquad xaCb \equiv xd.$$

Multiplikation mit C giebt, da $xaC \frown C$:

$$xaC \equiv xdC.$$

Liegt x nicht auf C, so giebt Multiplikation mit x, da $xa \frown x$, $xd \frown x$:

$$xa \equiv xd,$$

das heisst x liegt auf ad; aber dann ist $xa \equiv xd \equiv ad$, sodass die Forderung (α) ergeben würde: $adCb \equiv ad$, was im Allgemeinen nicht der Fall ist. Demnach ist x auf C zu wählen. Dann giebt (α) sofort $xb \equiv xd$, das heisst x liegt auch auf db; demnach ist $x \equiv dbC$ ein Punkt der Kurve. Dieser sowie der analog zu findende Punkt $x \equiv db_1 C_1$ kommt im Texte vor.

Jetzt setzen wir das Theilprodukt

$$(\beta) \qquad xaCb \, (xa_1 C_1 b_1) x = 0$$

unter der Voraussetzung: $xaCb \, (xa_1 C_1 b_1) \neq 0$. Hierfür lässt sich schreiben:

$$xaCb \, (xa_1 C_1 b_1) \equiv x.$$

Multiplikation mit b giebt:

$$(\gamma) \qquad xaCb \equiv xb, \quad \text{da} \quad xaCb \frown b,$$

vorausgesetzt, dass nicht auch $xa_1 C_1 b_1 \frown b$ wäre. Aber in diesem Falle käme $xb = 0$, das heisst $x \equiv b$, und dieser Punkt erfüllt die Forderung (β) im Allgemeinen nicht. Analog (γ) kommt auch:

$$(\delta) \qquad xa_1 C_1 b_1 \equiv xb_1.$$

Multipliciren wir (γ) mit C und (δ) mit C_1, so kommt:

$$xaC \equiv xbC, \quad xa_1 C_1 \equiv xb_1 C_1.$$

Liegt x weder auf C noch auf C_1, so giebt Multiplikation mit x:

$$xa \equiv xb, \quad xa_1 \equiv xb_1,$$

das heisst es geht der Kurvenpunkt $x \equiv ab \, . \, a_1 b_1$ hervor. Liegt dagegen x auf C, aber nicht auf C_1, so giebt die erste Gleichung durch Multiplikation mit x eine Identität, die zweite aber $xa_1 \equiv xb_1$, das heisst x liegt auch auf $a_1 b_1$, demnach ist $x \equiv a_1 b_1 C$. Liegt drittens x nicht auf C, wohl aber auf C_1, so kommt analog $x \equiv abC_1$. Liegt endlich x auf C und auf C_1, so ist $x \equiv CC_1$.

Dass alle gefundenen neun Punkte wirklich die Kurvengleichung er-

füllen, erkennt man ohne Mühe. Z. B. für $x \equiv CC_1$ ergiebt sich, da dann $xaC \equiv CC_1$, $xa_1C_1 \equiv CC_1$ ist, sofort:

$$xaCb(xa_1C_1b_1)x \equiv CC_1b(CC_1b_1)(CC_1) \equiv 0,$$

weil $CC_1b \frown CC_1$ und $CC_1b_1 \frown CC_1$.

Zu S. 76, Z. 20 u. 19 v. u. Diese Festsetzung ist nöthig wegen des Späteren, siehe Z. 7 v. u.

Zu S. 77, Z. 9 u. 8 v. u. Grassmann selbst beweist dies Abh. XIV, S. 225.

Zu S. 78, Z. 17 u. 18. Deutlicher: „Die Punkte und die Geraden will ich Elemente nennen".

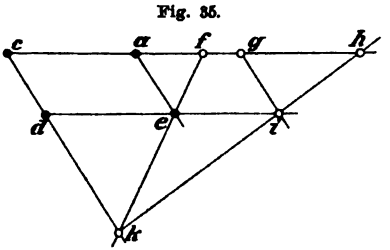
Zu S. 79, Z. 1 u. 2, 5—9. Dies ist nicht genügend begründet. Wir kommen hierauf bei einer Stelle der nächsten Abhandlung zurück (siehe Anm. zu S. 83, Z. 7 v. u. u. f.).

IV. Der allgemeine Satz über die Erzeugung aller algebraischer Kurven durch Bewegung gerader Linien.

Crelles Journal Bd. 42 (1851).

Zu S. 82, Z. 11 u. 10 v. u. Nämlich so: d wird beliebig gewählt (vgl. Fig. 35), darauf durch Parallelenziehen de gleich ca bestimmt, ebenso di gleich cg, nunmehr cd mit fe in k zum Schnitt gebracht und cg mit ki in h. Alsdann ist

Fig. 35.



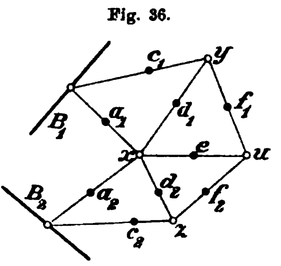
$$ca : cf = de : cf = di : ch = cg : ch.$$

Zu S. 82, Z. 3—1 v. u. Aus dem Beweise erhellt, wie der auf S. 81 ausgesprochene zweite Theil des Hauptsatzes, „dass jede algebraische Kurve auf die in dem Satze angegebene Weise erzeugt werden kann", aufgefasst werden soll. Während nämlich zuerst gezeigt worden ist, dass ein solcher linealer Mechanismus, der durch eine planimetrische Gleichung vom n-ten Grade hinsichtlich des veränderlichen Punktes dargestellt wird, eine Kurve von höchstens n-ter Ordnung erzeugt, wird zweitens bewiesen, dass sich jede Kurve n-ter Ordnung durch einen solchen linealen Mechanismus erzeugen lässt, dessen planimetrische Gleichung hinsichtlich des veränderlichen Punktes von **mindestens** n-ter Ordnung ist. Die niedrigste Ordnung n wird nur in Ausnahmefällen erreicht. Allerdings zeigt Grassmann in den Abhandlungen III und VII, dass für jede Kurve bis zur vierten Ordnung ein linealer Mechanismus von entsprechender Ordnung angegeben werden kann. Worauf es beruht, dass die Verwandlung der analytischen in eine planimetrische Gleichung im Allgemeinen mit einer Erhöhung der Ordnung verbunden ist, deutet Grassmann selbst weiter unten an, und wir werden darauf zurückkommen.

Zu S. 83, Z. 9. Deutlicher: „Sowohl die Punkte als auch die Geraden nenne ich Elemente".

Zu S. 83, Z. 7 v. u. u. f. Nicht jeder lineale Mechanismus ist das, was Grassmann eine Verkettung gerader Linien nennt. Man betrachte z. B. den in Fig. 36 angegebenen Mechanismus, bei dem die Punkte und Geraden a_1, a_2, B_1, B_2, c_1, c_2, d_1, d_2, e, f_1, f_2 fest, dagegen die Punkte x, y, z, u und die sonstigen Verbindungsgeraden und Schnittpunkte beweglich sind. Der Punkt x beschreibt die durch die Gleichung

Fig. 36.



$$x a_1 B_1 c_1 (x d_1) f_1 [x a_2 B_2 c_2 (x d_2) f_2] x e = 0$$

dargestellte Kurve fünfter Ordnung. Die Punkte y und z beschreiben je eine Kurve siebenter Ordnung, z. B. y die Kurve;

$$y c_1 B_1 a_1 (y d_1) e (y f_1) f_2 [y c_1 B_1 a_1 (y d_1) a_2 B_2 c_2] d_2 [y c_1 B_1 a_1 (y d_1)] = 0.$$

Dagegen ist es unmöglich, für den Punkt u eine planimetrische Gleichung aufzustellen, obgleich dieser Punkt eine algebraische Kurve beschreibt, die von höchstens achter Ordnung ist. Denn, um die Bahn von u zu untersuchen, fragen wir uns, wie viele Punkte u auf einer beliebig, aber bestimmt gewählten Geraden G gelegen sind. Wird u auf G gewählt, so muss einerseits

$$x a_1 B_1 c_1 (x e G f_1) x d_1 = 0$$

und andererseits

$$x a_2 B_2 c_2 (x e G f_2) x d_2 = 0$$

sein. Erfüllt x diese beiden Bedingungen, so ist xeG einer der gesuchten Punkte u, sobald x nicht mit e zusammenfällt. Nun aber stellt jede der beiden angegebenen Gleichungen eine Kurve dritter Ordnung dar, deren Allgemeinheit Grassmann auf S. 76, 77 nachgewiesen hat. Sie haben neun Punkte gemein, aber einer davon ist der auszuschliessende Punkt e. Demnach giebt es höchstens acht Punkte u, die auf G gelegen sind. Die Bahn des Punktes u ist somit eine Kurve von höchstens achter Ordnung.

Wendet man auf diesen Mechanismus den Text Grassmanns, S. 83, an, so erkennt man sofort, dass der Mechanismus allerdings für die Punkte x, y und z jedesmal eine geschlossene Verkettung gerader Linien vorstellt, aber nicht für den Punkt u. Denn von u gehen drei offene Figuren $u f_1 y$, $u e x$, $u f_2 z$ aus, von denen aber keine zwei, wie es der Text verlangt, unmittelbar an einander geschlossen werden.

Andererseits darf man aber gewiss die Art, wie hier der Punkt u sich zu bewegen gezwungen ist, eine „durch blosse gerade Linien bedingte Erzeugung" einer algebraischen Kurve nennen, wie sich Grassmann auf S. 79, Z. 1 u. 2, ausdrückt. Infolgedessen hat die Bemerkung auf S. 79, Z. 5—9, keine Beweiskraft.

Wir sehen: Ausser den Grassmannschen geschlossenen Verkettungen gerader Linien giebt es noch andere lineale Mechanismen zur Erzeugung algebraischer Kurven. Jedoch können wir sogleich einschränkend hinzufügen: Grassmann hat bewiesen, dass sich jede algebraische Kurve durch eine geschlossene Verkettung gerader Linien erzeugen lässt.

Zu S. 83, Z. 7 v. u. Nach dem unmittelbar Vorhergehenden müsste hier vor Verkettung das Wort „geschlossene" eingeschaltet sein.

Zu S. 84, Z. 12—9 v. u. Die Doppelpunkte kann man so nachweisen: Geht von x eine doppelt zählende offene Figur $xa \ldots$ aus, so tritt die Gerade xa oder ax zweimal in der planimetrischen Gleichung auf. Insbesondere können wir mit ihr die Verkettung schliessen, sodass die Kurvengleichung die Form hat:

$$\ldots\ldots (ax) \ldots ax = 0,$$

wobei die Punkte Faktoren darstellen, die ausser festen Punkten und Geraden den Punkt x noch $(n-2)$-mal enthalten, sobald die ganze Gleichung vom n-ten Grade ist. Wird das Theilprodukt, das nach Streichung der beiden letzten fortschreitenden Faktoren a, x übrig bleibt, mit u_x bezeichnet, so ist u_x vom $(n-1)$-ten Grade und enthält dabei einmal den Faktor ax, während

$$u_x ax = 0$$

die Gleichung der Kurve n-ter Ordnung ist. Vom Kurvenpunkte a aus ziehen wir eine beliebige Gerade, etwa nach dem beliebig, aber fest gewählten Punkte m. Wir fragen nach den Schnittpunkten x der Geraden am mit der Kurve. Für solche Punkte x ist $ax \equiv am$. Setzen wir in u_x für den Faktor ax demnach am, so geht ein Produkt v_x hervor, das x nur noch $(n-2)$-mal enthält. Nach der Kurvengleichung liegen die gesuchten Punkte x einerseits auf der mit x veränderlichen Geraden $v_x a$, andererseits auf der festen Geraden am. Sind beides verschiedene Gerade, so ist a ihr Schnittpunkt. Sie liefern also dann den schon bekannten Punkt $x \equiv a$. Fallen beide Gerade zusammen, so liegen die drei Punkte v_x, a, m auf einer Geraden, sodass

$$v_x am = 0$$

ist. Dies aber ist eine planimetrische Gleichung $(n-2)$-ten Grades in x. Also hat die durch a beliebig gezogene Gerade am mit der Kurve n-ter Ordnung ausser a nur noch $n-2$ Punkte gemein. Daher ist a ein Doppelpunkt der Kurve.

Zum letzten Absatz der Abhandlung: Die Grassmann'sche Methode der Verwandlung einer algebraischen Gleichung $f(x, y) = 0$ in eine planimetrische Gleichung genügt zwar vollständig zum Beweise des zweiten Theiles des Hauptsatzes, ist jedoch, wie Grassmann hier selbst zugiebt, praktisch nicht vollkommen. Um dies klar zu machen, geben wir hier das Grassmannsche Verfahren in symbolischer Darstellung wieder:

Es sei A_1 die x-Axe, A_2 die y-Axe, A_3 die unendlich ferne Gerade, ferner a_1 der unendlich ferne Punkt von A_1 und a_2 der unendlich ferne Punkt von A_2. Der Punkt mit den Koordinaten $x = 1$, $y = 1$ sei mit e bezeichnet, die Parallele zu A_2 durch ihn treffe A_1 in e_1, und die Parallele zu A_1 durch e treffe A_2 in e_2. (Siehe Fig. 37, nächste Seite.)

Alsdann besteht die Grassmannsche Methode in Folgendem: Man muss erstens ein Mittel haben, die Koordinaten x, y eines beliebigen Punktes p der Ebene durch Punkte $[x]$, $[y]$ der x-Axe A_1 darzustellen, die x bez. y zur Abscisse haben. Zweitens muss man, wenn u und v irgend zwei Punkte der x-Axe sind, den Punkt $[u + v]$ der x-Axe zu finden wissen, dessen

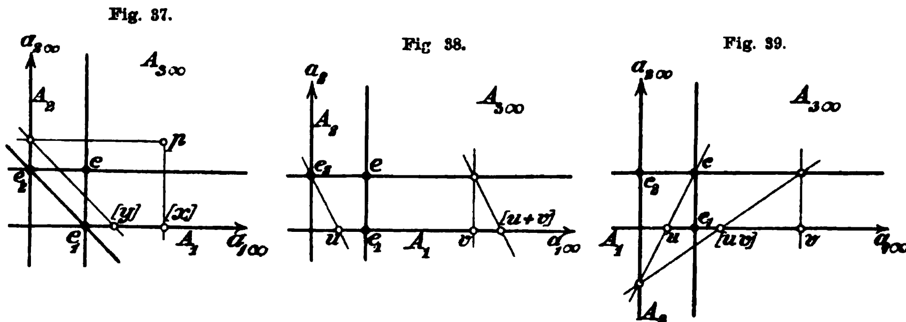
Abscisse gleich der Summe der Abscissen von u und v ist, und drittens muss man den Punkt $[uv]$ der x-Axe finden können, dessen Abscisse gleich dem Produkt der Abscissen von u und v ist. Die planimetrischen Formeln:

$$(1)\qquad [x] \equiv p a_2 A_1 \qquad\qquad \text{siehe Fig. 37,}$$

$$(2)\qquad [y] \equiv p a_1 A_2 (e_1 e_2 A_3) A_1,$$

$$(3)\qquad [u+v] \equiv u e_2 A_3 [v a_2 (e a_1)] A_1, \qquad \text{siehe Fig. 38,}$$

$$(4)\qquad [uv] \equiv u e A_2 [v a_2 (e a_1)] A_1, \qquad \text{siehe Fig. 39,}$$



geben die Lösungen dieser Aufgaben.

Will man nun eine analytische Gleichung $f(x, y) = 0$ planimetrisch schreiben, so stellt man zunächst jeden darin auftretenden konstanten Faktor durch einen Punkt der x-Axe dar, dessen Abscisse die betreffende Konstante ist. Durch (1) und (2) werden auch x und y selbst so dargestellt. Durch fortwährende Anwendung von (3) und (4) auf x, y, auf die Konstanten und auf die aus ihnen durch Addition und Multiplikation hervorgehenden Ausdrücke ergeben sich dann nach und nach alle in $f(x, y)$ auftretenden Summen und Produkte. Schliesslich wird dadurch die Summe aller in $f(x, y)$ auftretenden Glieder, die x und y enthalten, durch einen Punkt w der x-Axe dargestellt, dessen Abscisse der Werth dieser Summe ist. Ist ferner c das in $f(x, y)$ auftretende konstante Glied, so sei C die Parallele zur y-Axe mit der Abscisse $-c$. Alsdann verlangt $f(x, y) = 0$, dass jener Punkt w im Schnittpunkt der x-Axe mit C liege, sodass $wC = 0$ die gesuchte planimetrische Gleichung ist. Dabei ist w ein planimetrisches Produkt, das ausser dem veränderlichen Kurvenpunkt p nur feste Punkte und Geraden enthält.

Um z. B. die Hyperbel

$$xy + c = 0$$

darzustellen, bilden wir den Punkt $[xy]$ der x-Axe, dessen Abscisse xy ist, indem wir (4) anwenden, worin für u und v die Werthe (1) und (2) zu setzen sind. Dann kommt die zugehörige planimetrische Gleichung:

$$p a_2 A_1 e A_2 [p a_1 A_2 (e_1 e_2 A_3) A_1 a_2 (e a_1)] A_1 C = 0,$$

die, wie man sieht, auch vom zweiten Grade in p ist.

Im allgemeinen jedoch wird der Grad der planimetrischen Gleichung in p höher als der Grad der analytischen Gleichung $f(x, y) = 0$. Der Grund dafür ist, dass sich der Summenpunkt $[u + v]$ zweier Punkte u

und v der x-Axe nach (3) als Produkt darstellt, das u und v als Faktoren enthält. Ist also z. B. u ein planimetrisches Produkt, das α-mal den Faktor p enthält, v eines, das β-mal den Faktor p enthält, so enthält das planimetrische Produkt, das $[u+v]$ darstellt, den Faktor p $(\alpha+\beta)$-mal. Wenn z. B. der Kreis:

$$x^2+y^2+c=0$$

dargestellt werden soll, so findet man: Das Produkt, das x^2 darstellt, enthält p zweimal, ebenso das Produkt, das y^2 darstellt. Das Produkt also, das x^2+y^2 darstellt, enthält p viermal. Die zugehörige planimetrische Gleichung wird also eine vom vierten Grade. Allgemein:

Die planimetrische Gleichung, die durch das Grassmannsche Verfahren aus einer geordneten algebraischen Gleichung $f(x,y)=0$ hervorgeht, ist in dem veränderlichen Punkte p von demjenigen Grade, der gleich der Summe der Grade aller Glieder in $f(x,y)$ hinsichtlich x und y ist.

So giebt z. B. die Hyperbel $xy+c=0$ eine Gleichung zweiten Grades, dagegen die Parabel $x^2-y=0$ eine dritten und der Kreis $x^2+y^2+c=0$ eine vierten Grades.

Nun erhebt sich die Frage: Angenommen, eine algebraische Gleichung n-ten Grades $f(x,y)=0$ ist durch das Grassmann'sche Verfahren in eine planimetrische Gleichung $(n+m)$-ten Grades verwandelt worden, was für Kurven werden alsdann durch die letztere Gleichung ausser der Kurve n-ter Ordnung dargestellt? Grassmann behauptet auf S. 85 zum Schluss, dass dies nur die m-fach zählende unendlich ferne Gerade A_3 sei.

In der That erkennt man dies, wenn man homogene Koordinaten einführt: Das Koordinatendreieck bestehe aus den Geraden A_1, A_2, A_3, sodass der unendlich ferne Punkt a_1 der x-Axe die Koordinaten 1, 0, 0, der unendlich ferne Punkt a_2 der y-Axe die Koordinaten 0, 1, 0 und der Anfangspunkt die Koordinaten 0, 0, 1 hat. Der Punkt e, der Einheitspunkt, soll die Koordinaten 1, 1, 1 haben. Alsdann hat A_1 die Linienkoordinaten 0, 1, 0, A_2 die Linienkoordinaten 1, 0, 0 und A_3 die Linienkoordinaten 0, 0, 1. Ferner sind die Koordinaten von e_1 gleich 1, 0, 1, die von e_2 gleich 0, 1, 1. Hat nun p die Koordinaten x_1, x_2, x_3, so findet man durch fortgesetzte Matricenbildung aus (1) und (2) sofort die der Punkte $[x]$ und $[y]$ der x-Axe und zwar, wie von vornherein zu erwarten ist, die Koordinaten x_1, 0, x_3 für $[x]$ und die Koordinaten x_2, 0, x_3 für $[y]$.

Wenn nun der Punkt u der x-Axe die Koordinaten u_1, 0, u_3 und der Punkt v der x-Axe die Koordinaten v_1, 0, v_3 hat, so liefert fortgesetzte Matricenbildung nach (3) und (4) die von $[u+v]$ und $[uv]$. Danach hat der Summenpunkt $[u+v]$ die Koordinaten:

$$u_1 v_3 + u_3 v_1, \quad 0, \quad u_3 v_3 \tag{5}$$

und der Produktpunkt $[uv]$ die Koordinaten

$$u_1 v_1, \quad 0, \quad u_3 v_3.$$

Wendet man dies an auf die Bildung derjenigen Punkte der x-Axe, deren Abscissen x^2, xy, y^2 u. s. w. sind, so findet man, dass allgemein $[x^\alpha y^\beta]$ die Koordinaten $x_1^\alpha x_2^\beta$, 0, $x_3^{\alpha+\beta}$ hat. Ferner hat der Punkt der x-Axe, dessen Abscisse gleich $ax^\alpha y^\beta$ ist, die Koordinaten $ax_1^\alpha x_2^\beta$, 0, $x_3^{\alpha+\beta}$, da der

Punkt $[a]$ der x-Axe die Koordinaten a, 0, 1 hat. Wollen wir aber die Summe:

$$ax^\alpha y^\beta + bx^\gamma y^\delta \tag{6}$$

durch einen Punkt der x-Axe darstellen, so haben wir in den Werthen (5) für u_1 und u_3 die Werthe $ax_1^\alpha x_2^\beta$, $x_3^{\alpha+\beta}$ und für v_1 und v_3 die Werthe $bx_1^\gamma x_2^\delta$, $x_3^{\gamma+\delta}$ zu setzen, sodass der gesuchte Punkt der x-Axe die Koordinaten hat:

$$ax_1^\alpha x_2^\beta x_3^{\gamma+\delta} + bx_1^\gamma x_2^\delta x_3^{\alpha+\beta}, \quad 0, \quad x_3^{\alpha+\beta+\gamma+\delta}. \tag{7}$$

Ist etwa $\alpha + \beta \geqq \gamma + \delta$, so hat also derjenige Punkt der x-Axe, der die Summe (6) darstellt, solche homogene Koordinaten (7), von denen sich der Faktor $x_3^{\gamma+\delta}$ absondern lässt, sodass die übrigbleibenden Koordinaten:

$$ax_1^\alpha x_2^\beta + bx_1^\gamma x_2^\delta x_3^{\alpha+\beta-\gamma-\delta}, \quad 0, \quad x_3^{\alpha+\beta}$$

genau von dem Grade $\alpha + \beta$ sind, der der höchste Grad in (6) ist.

So ergiebt sich, indem man alle Glieder in $f(x, y)$ summirt, dass schliesslich derjenige Punkt der x-Axe, der die Summe aller veränderlichen Glieder in $f(x, y)$ darstellt, homogene Koordinaten hat, von denen sich x_3 so oft absondern lässt, als die Summe s aller Grade aller einzelnen Terme die Ordnung n der Kurve $f(x, y) = 0$ übersteigt. Mithin stellt die schliesslich hervorgehende planimetrische Gleichung, sobald man sie in homogenen Koordinaten schreibt, analytisch eine Gleichung von der Form dar:

$$x_3^{s-n}\varphi(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

wo φ homogen und ganz vom n-ten Grade in x_1, x_2, x_3 ist. Demnach stellt die planimetrische Gleichung ausser der Kurve n-ter Ordnung $\varphi = 0$ oder $f(x, y) = 0$ noch die $(s - n)$-fach zählende unendlich ferne Gerade $x_3 = 0$ dar. Dabei ist s die Summe der Grade aller Terme der Gleichung $f(x, y) = 0$.

Immerhin lässt sich die Potenz, in der die unendlich ferne Gerade auftritt, häufig dadurch erniedrigen, dass man vor der Anwendung des Grassmannschen Verfahrens die Gleichung $f(x, y) = 0$ anders schreibt. Man bemerkt nämlich nach (5), dass derjenige Punkt der x-Axe, der die Summe aus $ax^\alpha y^\beta$ und aus einer Konstanten b darstellt, die homogenen Koordinaten:

$$ax_1^\alpha x_2^\beta + bx_3^{\alpha+\beta}, \quad 0, \quad x_3^{\alpha+\beta}$$

hat, die vom selben Grade wie die Summe $ax^\alpha y^\beta + b$ selbst sind. Wenn man also die algebraische Gleichung $f(x, y) = 0$ vor der Anwendung des Grassmannschen Verfahrens auf eine solche Form bringen kann, in der sie ausser Produkten nur solche Summen enthält, die aus nur zwei Summanden bestehen, von denen der eine konstant ist, so hat die planimetrische Gleichung denselben Grad wie die analytische, vorausgesetzt natürlich, dass man die analytische Gleichung entsprechend der besonderen Form, auf die man sie gebracht hat, in eine planimetrische umwandelt. So z. B. kann man die Gleichung der Hyperbel:

$$\alpha xy + \beta x + \gamma y + \delta = 0,$$

deren direkte Umwandlung eine Gleichung vierten Grades liefern würde, zunächst auf die Form:

$$(ax + b)(cy + d) + m = 0$$

bringen. Konstruirt man nun nach und nach $ax + b$, $cy + d$ u. s. w., so kommt man zu einer planimetrischen Gleichung von nur zweitem Grade.

Man kann das Grassmannsche Verfahren noch etwas verbessern: Durch Veränderung des Axenkreuzes kann man ja jeden in x, y linearen Ausdruck zur Abscisse machen. Darin liegt, dass sich jeder Ausdruck von der Form

$$\alpha x + \beta y + \gamma$$

durch einen Punkt der x-Axe darstellen lässt, der p nur einmal als Faktor enthält. Verstehen wir nämlich unter G irgend eine solche feste Gerade, die eine Gleichung von der Form $\alpha x + \beta y =$ Const. hat, so hat derjenige Punkt der x-Axe, der aus dem Punkte p oder (x, y) durch Ziehen der Parallelen zu G hervorgeht, das heisst der Punkt $p(GA_3)A_1$, die Abscisse $(\alpha x + \beta y) : \alpha$. Ferner sei c derjenige feste Punkt der x-Axe, dessen Abscisse gleich $1 : \alpha$ ist. Nach (4) hat dann, wenn $u \equiv p(GA_3)A_1$, $v \equiv c$ gesetzt wird, der Punkt

$$p(GA_3)A_1eA_2[ca_2(ea_1)]A_1$$

der x-Axe die Abscisse $\alpha x + \beta y$. Ist ferner d der Punkt der x-Axe mit der Abscisse γ, so giebt (3), wenn darin für u der soeben gefundene Punkt und d für v gesetzt wird, den Punkt:

$$p(GA_3)A_1eA_2[ca_2(ea_1)]A_1e_2A_3[da_2(ea_1)]A_1$$

der x-Axe, dessen Abscisse $\alpha x + \beta y + \gamma$ ist. Dies Produkt enthält aber der veränderliche Faktor p nur einmal. Hieraus folgt:

Der Grad der planimetrischen Gleichung ist nicht höher als der Grad der analytischen Gleichung, sobald letztere Gleichung vor der Umwandlung auf eine solche Form gebracht werden kann, in der ausser Produkten nur zwei Arten von Summen auftreten, nämlich entweder lineare Summen (wie $\alpha x + \beta y + \gamma$) oder Summen von nur zwei Summanden, von denen der eine konstant ist.

Dass Grassmann selbst die schwache Seite seiner Methode, sobald sie praktisch angewandt werden soll, erkannt hat, zeigen seine Ausführungen in der zweiten Ausdehnungslehre, Ges. Werke I, 2, S. 207, Z. 3—7. Wie er dort sagt, „ist es zweckmässig, zuerst die algebraische Gleichung durch Veränderung des Koordinatensystemes so umzugestalten, dass sie möglichst wenig variable Glieder enthält, ehe man zur Ableitung der planimetrischen Formel schreitet". Ebenda, Z. 10—15, behauptet er, dass die Kurve dritter Ordnung:

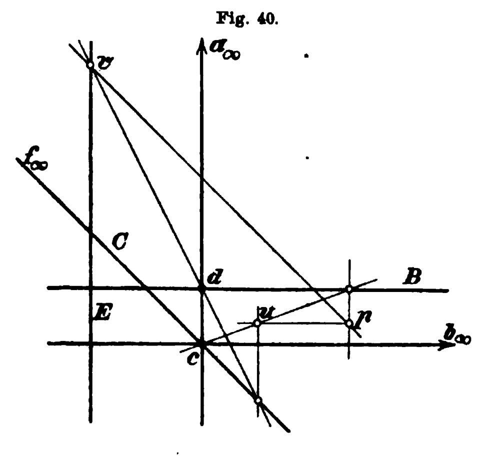
$$pqr = m,$$

bei der p, q, r lineare ganze Funktionen von x, y sind und m eine Konstante bedeutet, die folgende planimetrische Gleichung liefert (in der wir wie überall im Vorhergehenden p statt x schreiben, trotzdem p soeben in anderer Bedeutung vorkam):

$$paBc(pb)aCdEfp = 0.$$

Wir wollen dies hier zeigen und dadurch ein Versprechen erfüllen, das Herr Engel in Bd. I, 2, S. 436, Z. 10—13 gemacht hat. Dabei wollen wir so vorgehen, dass wir wahrscheinlich gerade den Gedankengang wiedergeben, der Grassmann selbst zu jener Behauptung geführt hat, indem wir einige Bemerkungen in einem Manuscripte Grassmanns zur Richtschnur nehmen: Durch projektive Koordinatenänderung verwandeln wir die drei Geraden $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$ in die Geraden:

Fig. 40.



$$x = 0,\ y = 0,\ 1 - x - y = 0,$$

sodass

$$xy(1 - x - y) = m$$

die Gleichung der Kurve ist. Es sei (siehe Fig. 40) der unendlich ferne Punkt der y-Axe mit a, der der x-Axe mit b, der Anfangspunkt mit c, der Punkt $x = 0$, $y = 1$ mit d und der unendlich ferne Punkt der Geraden $x + y = 0$ mit f bezeichnet. Ferner sei C diese Gerade selbst, B die Gerade $y = 1$ und E die Gerade $x = m$. Ist nun p ein beliebiger Punkt (x, y), so giebt die Konstruktion $paBc(pb)$ einen Punkt u mit der Abscisse xy. Daher ist $paBc(pb)a$ diejenige Gerade parallel zur y-Axe, deren Abscisse xy ist. Mithin hat der Punkt

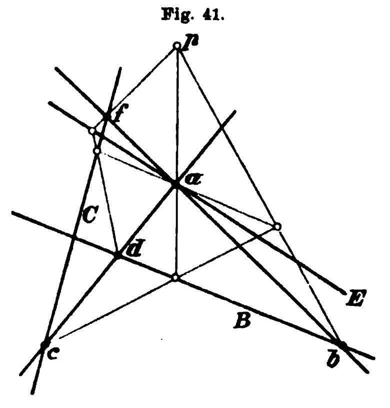
$$v \equiv uaCdE \equiv paBc(pb)aCdE$$

die Abscisse m und die Ordinate $1 - \frac{m}{xy} - m$, sodass er auf der Geraden

$$\mathfrak{x} + \mathfrak{y} = 1 - \frac{m}{xy}$$

mit den laufenden Koordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ liegt. Diese Gerade ist zu C parallel, geht also durch f. Für $\mathfrak{x} = x$, $\mathfrak{y} = y$ geht die Gleichung der Geraden in die der Kurve dritter Ordnung in den laufenden Koordinaten x, y über. Demnach muss, wenn p der Kurve angehören soll, p auf dieser Geraden liegen, die ihrerseits in der Form vf darstellbar ist. Folglich ist $vfp = 0$ oder:

Fig. 41.



$$paBc(pb)aCdEfp = 0$$

in der That die gesuchte planimetrische Gleichung.

Führt man die vorhin benutzte projektive Koordinatenänderung nun wieder rückwärts aus, so geht die in Fig. 41 dargestellte Konstruktion der Kurve dritter Ordnung hervor.

Schliesslich sei hervorgehoben, dass die Grassmannsche Methode der Umwandlung der analytischen Gleichung in eine planimetrische, wie er sie in der gegenwärtigen Abhandlung giebt, die Koordinatenaxen ungleichartig benutzt, was sich wohl verbessern liesse. Es sei uns gestattet, hier überhaupt die Vermuthung auszusprechen, dass sich die Methode der Umwandlung noch erheblich verbessern lässt, und auf dies interessante Problem hinzuweisen.

V. Die höhere Projektivität und Perspektivität in der Ebene; dargestellt durch geometrische Analyse.

Crelles Journal Bd. 42 (1851).

Diese und die folgende Abhandlung haben noch weniger als die übrigen Arbeiten Grassmanns Beachtung gefunden, obgleich sie von besonderer Wichtigkeit sind, was wir in einer nachfolgenden Anmerkung zu S. 97 noch näher begründen werden. In dem Lebensbilde, das R. Sturm, E. Schröder und L. Sohncke im 14. Bande der Mathematischen Annalen, 1879, S. 1—45, von Grassmann gegeben haben, wird die vorliegende und die folgende Arbeit — ausser in der tabellarischen Uebersicht — überhaupt nicht berücksichtigt, was wohl dort bei den Erörterungen auf S. 18, 19 hätte geschehen sollen.

Zu S. 89, Z. 14—8 v. u. Dies ist ein Irrthum; die „aufgestellten Principien" allein reichen bekanntlich nicht zur Begründung dieses Fundamentalsatzes der projektiven Geometrie aus. Es ist merkwürdig, dass Grassmann den hier erwähnten Satz nicht mit zu den „wichtigeren Ergebnissen" rechnet.

Zu S. 91, Z. 3—7. Wie der Kegelschnitt (8) bei der Annahme, dass c auf D liegt, in zwei Gerade zerfällt, erkennt man methodisch so: Wenn xaB nicht mit D vereint ist, so ist nach der Reduktionsregel $xaBcD \equiv c$, da $c \frown D$, sodass (8) ergiebt:

$$cxg = 0,$$

das heisst, dann liegt x auf cg. Wenn dagegen xaB mit D vereint ist, so ist

$$xaBD = 0,$$

das heisst, x liegt auf BDa.

Zu S. 91, Z. 14 u. f. Die Frage, wann $xaBcDxB_1 = 0$ ist, haben wir in einer Anmerkung zu S. 63 methodisch beantwortet. Dort stand allerdings D_1 statt B_1. Das Ergebniss stimmt also mit dem auf S. 91, Z. 3 v. u., überein.

Zu S. 91, Z. 17—15 v. u. Dass der Kegelschnitt $xaBcx = 0$ zerfällt, erkennt man methodisch so. Wir schreiben:

$$xaBxc = 0.$$

Ist x nicht vereint mit B, so ist nach der Reduktionsregel

$$xaBx \equiv (xa)Bx \equiv xa,$$

das heisst, $xac = 0$; x liegt dann irgendwo auf ac. Ist dagegen x mit B

vereint, so ist $xaB \equiv x$, sodass die Gleichung des Kegelschnitts zur Identität wird.

Zu S. 91, Z. 9—8 v. u. Streng genommen ist diese Umkehrbarkeit auf S. 88 unten nicht bewiesen, da die beiden ersten Faktoren von $xaBcDB_1$ Punkte und die beiden letzten Geraden sind; aber der Beweis ist leicht analog zu bilden.

Zu S. 93, Z. 9 v. u. Nämlich die auf S. 91 unten angegebenen vier Punkte.

Zu S. 94, Z. 4—6 v. o. Denn offenbar wird die Gleichung erfüllt, wenn x auf B_1 liegt. Wenn aber x nicht auf B_1 liegt, so ist xB_1 ein von Null verschiedener Zahlfaktor, der gestrichen werden darf, sodass die Gleichung (11) hervorgeht.

Zu S. 94, Z. 18. Zunächst nämlich kann die Gleichung auf Z. 14 nach Umkehrung so geschrieben werden:

$$B_2 D_1 c_1 B_1 x D c B a x = 0.$$

Nun wird $B_2 D_1 c_1 B_1 \equiv e_1$ gesetzt, also:

$$e_1 x D c B a x = 0.$$

Wird diese Gleichung wieder umgekehrt, so geht die auf Z. 18 hervor.

Zu S. 95, Z. 7. Die Punkte x, für die $XA = 0$ ist, werden erst von Z. 15 v. u. an betrachtet.

Zu S. 95, Z. 9. Mit dem bestimmten Punkt ist der Punkt XA gemeint.

Zu S. 95, zweite Formel (12). Hier hat sich in unseren Abdruck ein Druckfehler: B statt A eingeschlichen.

Zu S. 95, Z. 6—3 v. u. Stillschweigend wird vorausgesetzt, dass weder pA noch qA für alle Punkte x gleich Null ist und dass die Kurven $pA = 0$ und $qA = 0$ nicht derart zerfallen, dass beide eine Kurve niederer Ordnung gemein haben. Im ersteren Falle würde die Zuordnung ausarten, im letzteren Falle müsste man diese gemeinsame Kurve eliminiren.

Zu S. 96, Z. 9—13. Der nachfolgende Beweis dieses Satzes, der übrigens, wie der Text lehrt, auch für Produkte PQ von Geraden gilt, ist nicht ganz einwandfrei, da er wesentlich voraussetzt, dass die Kurven $pR = 0$ und $qR = 0$ keinen Zweig gemein haben. Er wäre daher besser so zu formuliren: Die Anzahl der Punkte x, die ein von x abhängiges fortschreitendes Produkt pq oder PQ gleich Null machen, ist, sobald es nicht unendlich viele derartige Punkte giebt, gleich $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2$, wenn x in p oder P gerade α-mal und in q oder Q gerade β-mal auftritt. Ausserdem ist zu beachten, dass es vorkommen kann, dass ein Punkt x sowohl $pq = 0$ macht als auch den beiden Kurven $pR = 0$, $qR = 0$ angehört. Er ist alsdann doppelt zu zählen, wie der Gang des Beweises lehrt.

Zu S. 96, Z. 10 v. u. Gemeint ist: Die Kurven der Schar (12) haben die n^2 festen Punkte gemein.

Zu S. 97, Z. 17—15 v. u. Zwar erwähnt Grassmann hier nicht die Umkehrung dieses Satzes, wohl aber ist sie in dem Satze auf S. 102, 103 der folgenden Abhandlung VI enthalten. Vgl. auch S. 103, Z. 17—19, wo er als Beispiel einen speziellen Fall herausgreift. Dass jede Kurve $(n + m)$-ter Ordnung in der im Satze angegebenen Weise erzeugbar ist,

hätte Grassmann hier auf Seite 97 mit wenigen Worten sagen können: Nach dem Satze auf S. 80, 81 lässt sich ja jede Kurve $(n+m)$-ter Ordnung durch eine planimetrische Gleichung darstellen, die den veränderlichen Punkt x der Kurve $(n+m)$-mal als Faktor enthält. Man sieht ohne weiteres, dass sich diese Gleichung stets auf eine solche Form

$$XAY = 0$$

bringen lässt, in der X gewisse n Faktoren x und Y die übrigen m Faktoren x enthält, während A eine feste Gerade ist. Nun liegt der Fall des Textes vor, auf den der Satz von S. 97 anwendbar ist, das heisst:

Jede ebene algebraische Kurve $(n+m)$-ter Ordnung kann als Durchschnitt zweier projektiver Kurvenbüschel n-ter bez. m-ter Ordnung erzeugt werden. Die n^2 bez. m^2 Scheitel der Büschel liegen auf der Kurve $(n+m)$-ter Ordnung.

Man vergleiche hierzu noch S. 103 unten. Die Abhandlungen V und VI von Grassmann sind 1851 erschienen, während M. Chasles den speciellen Satz für $n = 2$, $m = 1$ erst 1853 in den Comptes Rendus Bd. 36, S. 943, und E. de Jonquières den allgemeinen Satz erst 1858 in seinem Essai sur la génération des courbes géométriques, Mém. présentés par divers savants etc. Bd. 16, gab. Dennoch wird diese Erzeugungsweise der Kurven höherer Ordnung durch projektive Büschel von Kurven niederer Ordnung beständig Chasles und de Jonquières zugeschrieben*). Man sehe z. B. A. Clebsch, Vorlesungen über Geometrie, bearb. von F. Lindemann, 1. Band, Leipzig 1876, S. 376, ferner G. Salmon, Analytische Geometrie der höheren ebenen Kurven, deutsch bearb. von W. Fiedler, 2. Aufl., Leipzig 1882, S. 494, und E. Pascal, Repertorium der höheren Mathematik, deutsch von A. Schepp, 2. Theil, Leipzig 1902, S. 148. In Clebsch' obengenannten Vorlesungen finden sich in der Anmerkung zu S. 541 die Worte: „Es lässt sich zeigen, dass man so jede Grassmannsche Erzeugungsweise auf eine Chaslessche zurückführen, das heisst aus den Elementen der einen die der andern bestimmen kann". Und auch H. Schröter in seiner Arbeit: „Zurückführung der Grassmannschen Definitionen einer Kurve dritter Ordnung auf die von Chasles, Cayley und Hesse angegebenen Erzeugungsweisen", Crelles Journal Bd. 104 (1889), S. 62—84, scheint nicht bemerkt zu haben, dass Grassmann selbst die Zurückführung der sogenannten Grassmannschen auf die sogenannte Chaslessche Erzeugungsweise in der gegenwärtigen Arbeit schon geleistet hatte.

Dass dem in der That so ist, erläutern wir zum Ueberfluss an solchen Beispielen, die H. Schröter selbst in seiner Abhandlung benutzt. Zunächst knüpft er an die Grassmannsche Definition der Kurve dritter Ordnung an:

$$axBcDxD_1c_1B_1xa_1 = 0,$$

die in der Arbeit II, in Crelles Journal Bd. 31 (1846), vgl. oben S. 62, 63,

*) Doch erkennt zum Beispiel Gino Loria in seinem Nekrologe auf Jonquières, Bibliotheca Mathematica, 3. Folge, Bd. 3, S. 288, Anm. 5 (1902) die Priorität Grassmanns an, fügt aber hinzu: „mais qui lisait ou connaissait, vers l'année 1860, les travaux de l'inventeur de l'Ausdehnungslehre?"

gegeben ist. Nach Grassmann verfahren wir nun so, dass wir die Gleichung auf die Form

$$XAY = 0$$

bringen, was sofort erreicht ist, wenn wir:

$$X \equiv axBcDxD_1c_1, \quad Y \equiv xa_1, \quad A \equiv B_1$$

setzen. B_1 spielt also die Rolle der Geraden A des Textes. Auf ihr wird g beliebig gewählt. Dann ist nach (12), S. 95:

$$Xg = 0$$

bei längs A (oder B_1) variirendem g die Gleichung eines Büschels und zwar eines Büschels von Kegelschnitten ($n = 2$), während analog

$$Yg = 0$$

die eines Strahlenbüschels mit dem Scheitel a_1 ist. Beide Büschel sind zur Punktreihe g auf A (oder B_1) projektiv und daher auch aufeinander projektiv bezogen. Entsprechende Kegelschnitte und Strahlen beider Büschel schneiden sich in Punkten der Kurve dritter Ordnung. Nach S. 95, 96 findet man methodisch die n^2 oder vier Scheitel des Kegelschnittbüschels, indem man die Punkte x sucht, für die $XB_1 = 0$ ist. Grassmann selbst hat auf S. 63, 64 gezeigt, dass es die vier Punkte

$$a, \quad BD, \quad acD, \quad D_1DcBaD_1$$

sind (vgl. auch unsere Anm. zu S. 63). Der in Schröters Arbeit S. 64 erwähnte Kegelschnitt $\mathfrak{X}^{(2)}$ ist nichts anderes als unser Kegelschnitt $Xg = 0$, und Schröter bestimmt auf S. 64, 65 auch diese vier Punkte von neuem. Zur Vergleichung diene die Angabe der Bezeichnungen. Statt

$$x \quad a \quad B \quad c \quad D \quad D_1 \quad c_1 \quad B_1 \quad a_1 \quad g$$

schreibt Schröter:

$$\mathfrak{z} \quad \mathfrak{B}_2 \quad a_2 \quad \mathfrak{A}_2 \quad b_2 \quad b_1 \quad \mathfrak{A}_1 \quad a_1 \quad \mathfrak{B}_1 \quad \mathfrak{x}_1.$$

Schröter wendet sich dann zu der bei Grassmann oben auf S. 74 angegebenen zweiten Definition der Kurve dritter Ordnung, die — vgl. Fig. 14 — so lautet:

$$(xa_1C_1b_1)(xd)(xaCb) = 0.$$

Nach Grassmanns eigener Methode bringen wir diese Gleichung wieder auf die Form

$$XAY = 0,$$

indem wir etwa:

$$X \equiv (xa_1C_1b_1)(xd)b, \quad Y \equiv xa, \quad A \equiv C$$

setzen, sodass jetzt C der Träger der Punktreihe g ist und

$$Xg = 0 \quad \text{bez.} \quad Yg = 0$$

das Büschel von Kegelschnitten und das dazu projektive Strahlenbüschel mit dem Scheitel a darstellen. Die vier Scheitel des Kegelschnittbüschels gehen nach Grassmann, S. 95, 96, hervor, wenn man die Punkte x sucht, für die

$$XA \equiv (xa_1C_1b_1)(xd)bC = 0$$

ist. Methodisch findet man sie so: Erstens ist $x a_1 C_1 b_1 = 0$ für

$$x \equiv a_1.$$

Ist x nicht $\equiv a_1$, so muss dann $x a_1$ und C_1 mit b_1 vereint sein, das heisst

$$x \equiv a_1 b_1 C_1.$$

Zweitens ist $xd = 0$ für

$$x \equiv d.$$

Drittens könnte

$$x a_1 C_1 b_1 \equiv xd$$

sein. Dann müsste b_1 auf xd oder also x auf $b_1 d$ liegen. Multiplikation mit C_1 ergäbe:

$$x a_1 C_1 \equiv x d C_1,$$

das heisst $x \equiv a_1 d C_1$. Aber $a_1 d C_1$ liegt im Allgemeinen nicht auf $b_1 d$. Dieser dritte Fall ist daher ausgeschlossen. Endlich ist $X = 0$ auch dann, wenn $x a_1 C_1 b_1$ und xd mit b vereint sind. Dann liegt x auf $b b_1 C_1 a_1$ und auf bd, also:

$$x \equiv b b_1 C_1 a_1 (bd).$$

Die vier gefundenen Punkte:

$$a_1, \quad a_1 b_1 C_1, \quad d, \quad b b_1 C_1 a_1 (bd)$$

findet auch Schröter S. 67 für den von ihm $\mathfrak{X}^{(2)}$ genannten Kegelschnitt, der eben unser Kegelschnitt $Xg = 0$ ist. Seine Bezeichnungen statt

$$x \quad a_1 \quad C_1 \quad b_1 \quad d \quad a \quad C \quad b \quad g$$

sind

$$\mathfrak{z} \quad \mathfrak{B} \quad b \quad \mathfrak{B}_1 \quad \mathfrak{C} \quad \mathfrak{A} \quad a \quad \mathfrak{A}_1 \quad \mathfrak{x}.$$

Wir kommen zu Grassmanns dritter Definition der Kurve dritter Ordnung auf Seite 74, die — vgl. Fig. 16 auf S. 77 — die Form hat:

$$(xaA)(xbB)(xcC) = 0.$$

Wir bringen sie auf die Form:

$$XAY = 0,$$

indem wir etwa:

$$X \equiv (xbB)\,(xcC), \quad Y \equiv xa$$

setzen, sodass, wenn g ein veränderlicher Punkt auf A ist, $Xg = 0$ das Kegelschnitt- und $xag = 0$ das Strahlenbüschel darstellt. Die Scheitel des Kegelschnittbüschels sind die Punkte x, für die

$$XA \equiv (xbB)\,(xcC)\,A = 0$$

ist. Es ist erstens $xbB = 0$ für

$$x \equiv b,$$

zweitens ist $xcC = 0$ für

$$x \equiv c.$$

Drittens ist zu setzen:

$$xbB \equiv xcC.$$

Multiplikation mit x gäbe entweder $xb \equiv xc$, was zu Punkten x auf bc

führen würde, die jedoch keine Lösungen ergeben, oder aber, dass x mit B und C vereint ist, das heisst

$$x \equiv BC.$$

Endlich kann noch xbB und xcC mit A vereint sein, was zum Punkte

$$x \equiv (ABb)(ACc)$$

führt, wie man sofort sieht. Dies deckt sich wieder mit Schröters Ergebniss auf S. 73, wo er statt

$$x \quad a \quad A \quad b \quad B \quad c \quad C \quad g$$

schreibt:

$$\mathfrak{z} \quad \mathfrak{A}_1 \quad a \quad \mathfrak{B}_1 \quad b \quad \mathfrak{C}_1 \quad c \quad \mathfrak{x}.$$

Schröter betrachtet alsdann noch die allgemein gefassten Grassmannschen Definitionen der Kurve dritter Ordnung auf (S. 75 und 81). Doch wollen wir diese Erläuterung nicht so weit ausdehnen. Das Vorhergehende dürfte zur Genüge zeigen, dass Schröters Ergebnisse direkt aus Grassmanns eigenen Vorschriften in Grassmanns Abhandlung V folgen. Natürlich sehen wir hierbei von den Bemerkungen Schröters über die Cayley-Hessesche Erzeugungsweise ab, die uns hier nichts angeht. Wir fassen unsere Betrachtung zusammen in der Behauptung:

Die Chasles und de Jonquières zugeschriebene Erzeugung der algebraischen Kurven der Ebene ist schon vor Chasles und Jonquières von Grassmann gegeben worden. Zugleich hat Grassmann gezeigt, wie aus der linealen Konstruktion der algebraischen Kurve diese neue Erzeugung abzuleiten ist.

Zu S. 97, letzter Absatz, und S. 98. Diese Betrachtungen sind wohl nicht einwandfrei. Die Sache liegt so: Es ist X ein Produkt, das n-mal x als Faktor enthält. Wird g irgendwie auf A gewählt, so ist $Xg = 0$ die Gleichung der dem Punkte g projektiv zugeordneten Kurve n-ter Ordnung, die durch die n^2 Scheitel geht, für die $XA = 0$ ist. Insbesondere heisse diese Zuordnung Perspektivität, wenn die Kurve $Xg = 0$ durch g geht, wie auch g auf A gewählt sei. Also muss im Falle der Perspektivität X so beschaffen sein, dass die Kurve $(n+1)$-ter Ordnung $Xx = 0$ von allen Punkten g der Geraden A erfüllt wird. Dies ist zum Beispiel der Fall, wenn X die im Text angegebene Form px hat, aber es ist nicht bewiesen, dass dies die einzige Möglichkeit ist. Es ist ausserdem zu bemerken, dass Grassmanns Definition der Perspektivität (im Gegensatze zu der der Projektivität) sich nur auf die Darstellung der Kurven durch planimetrische Produkte bezieht, dagegen vag wird, wenn man die Betrachtungen rein geometrisch anstellen will. In der That ist der Satz, den Grassmann auf S. 98 aufstellt, in der nächsten Abhandlung, S. 104, Z. 9—12, eine Definition, und mit Recht hebt Grassmann daselbst, Z. 13—15, hervor, dass man noch beweisen muss, dass die so definirte Perspektivität ein specieller Fall der Projektivität ist.

VI. Die höhere Projektivität in der Ebene; dargestellt durch Funktionsverknüpfungen.

Crelles Journal Bd. 42 (1851).

Zu S. 99, Z. 4 v. u. Gemeint sind ganze rationale Funktionen.

Zu S. 100, Z. 3. Der Faktor ist natürlich konstant.

Zu S. 100, Z. 9. Vorausgesetzt, dass die Kurven $A = 0$ und $B = 0$ keine Kurve niederer Ordnung gemein haben, indem sie zerfallen. Dann müsste man von dem A und B gemeinsamen veränderlichen Faktor natürlich absehen.

Zu S. 100, Z. 11 u. 13. Grassmann schreibt α statt a, aber α tritt doch schon in (1) in anderer Bedeutung auf. Auf S. 102 schreibt er selbst übrigens a.

Zu S. 100, Z. 19, 20. Die Worte: „oder durch einen Punkt dieser Kurve" gehören zum Hauptsatz, nicht zum vorhergehenden Relativsatz.

Zu S. 100, Z. 17 v. u. Die Kurven $A = 0$ und $B = 0$ werden kurz mit A und B bezeichnet.

Zu S. 102, Z. 12. Denn A und C haben $n(m + n)$ Punkte gemein. Also bleiben noch $n(m + n) - mn = n^2$ Punkte übrig.

Zu S. 102, Z. 13. In der That ist $a - 1 = \frac{1}{2}m^2 + \frac{3}{2}m - 1 < m^2$.

Zu S. 102, Z. 15. Gemeint ist: Auf C wird ein Punkt beliebig gewählt; durch ihn und jene Punkte legt man die einzige vorhandene Kurve A_1 vom m-ter Ordnung u. s. w.

Zu S. 102, Z. 18. AB_1 und A_1B bedeuten natürlich die aus A und B_1 bez. A_1 und B bestehenden zerfallenden Kurven $(n + m)$-ter Ordnung.

Zu S. 102, Z. 13, 12 v. u. Denn nach S. 102 oben bestimmen gerade $c - 1$ Punkte eine Kurve $(m + n)$-ter Ordnung.

Zu S. 102, Z. 12—10 v. u. Denn die m^2 Schnittpunkte von A und A_1 gehören den beiden Kurven AB_1 und A_1B, also auch der Kurve C an.

Zu S. 102, Z. 5 u. 3 v. u. Beweglich wie in früheren Abhandlungen im Sinne von veränderlich gemeint. Man vergleiche übrigens zu diesem Satze unsere Anmerkungen zu S. 97.

Zu S. 103, Z. 5. Denn als die mn Punkte der C wählt man, da $m = 1$ ist, solche n Punkte, die in einer Geraden A liegen. Durch diese n Punkte wird eine Kurve n-ter Ordnung B gelegt, die also C noch in n^2 Punkten trifft, durch die sich eine veränderliche Kurve B_1 von n-ter Ordnung legen lässt, nämlich eine Kurve, die C noch in einem beliebig wählbaren Punkte trifft und durch die Wahl dieses Punktes bestimmt ist. Legt man durch diesen und durch den $(n + 1)$-ten Schnittpunkt von A und C eine Kurve erster Ordnung, das heisst eine Gerade A_1, so trifft A_1 nach dem vorhergehenden Satze B_1 ausser in jenem gewählten Punkte von C noch in $n - 1$ Punkten, die auf C liegen. Anders ausgesprochen: Alle n Schnittpunkte, die B_1 mit C ausser den n^2 mit B gemeinsamen Punkten noch sonst gemein hat, liegen auf einer Geraden A_1 durch den $(n + 1)$-ten Schnittpunkt von A und C.

Zu S. 103, Z. 13—15. Denn eine Kurve n-ter Ordnung wird durch $\frac{1}{2}n(n + 3)$ Punkte bestimmt. Es muss also $mn \leqq \frac{1}{2}n(n + 3)$, das heisst $n \geqq 2m - 3$ sein. Dies ist erst von $m = 3$ an eine Bedingung für n.

Zu S. 103, Z. 18. Wir legen hier Gewicht auf das Wörtchen: „na-

mentlich". Es zeigt deutlich, dass Grassmann hier auch an den allgemeinern Fall der Erzeugung der Kurven durch zwei projektive Kurvenbüschel gedacht hat. Man vergleiche unsere Auseinandersetzungen zu S. 97.

Zu S. 103, zweite Hälfte. Es sind jetzt statt einer Kurve B_1 deren zwei, B_1 und B_2, durch die n^2 Punkte gelegt worden, in denen B ausser in den n Schnittpunkten mit A nochmals die Kurve C trifft. Durch diese n^2 Punkte gehen also drei Kurven n-ter Ordnung B, B_1, B_2. Jede trifft C noch in n weiteren Punkten, die jedesmal auf einer Geraden A, A_1, A_2 liegen. Diese drei Geraden treffen sich in dem nachher mit k bezeichneten Punkte, in dem A die Kurve C zum $(n+1)$-ten Male trifft. A, A_1, A_2 sind also Strahlen eines Strahlenbüschels mit dem Scheitel k und B, B_1, B_2 Kurven eines Kurvenbüschels n-ter Ordnung mit n^2 Scheiteln (Mittelpunkten). Nach dem ersten Satze auf S. 101 besteht zwischen beiden Büscheln eine projektive Bezeichnung.

Zu S. 103, Z. 7 v. u. Die $3n$ Durchschnitte sind die Punkte, in denen A und B, ferner A_1 und B_1, endlich A_2 und B_2 einander treffen.

Zu S. 103, Z. 6, 5 v. u. Da zwei verschiedene Kurven $(n+1)$-ter Ordnung nur $(n+1)^2$ Punkte gemein haben, müssen hier beide Kurven nothwendig zusammenfallen.

Zu S. 104, Z. 9—15. Vgl. unsere Bemerkung zu S. 97, letzter Absatz, und S. 98.

Zu S. 105, letzter Absatz, und S. 106. Etwas unklar. Grassmann geht darauf aus, von den n^2 Scheiteln (Mittelpunkten) des auf S. 103 gefundenen Büschels $n-1$ auf eine Gerade zu bringen. Zu diesem Zweck zieht er eine Hülfsgerade B, die aber mit der früheren Kurve B nichts zu thun hat. Uebereinstimmung in den Bezeichnungen wird mit dem Früheren erreicht, wenn man diese Gerade anders, etwa G, nennt und statt

$$\Omega \;\; B \;\; \Gamma_1 \;\; \Gamma_2 \;\; \Gamma_3 \;\; p_1 \;\; p_2 \;\; p_3 \;\; kp_2 \;\; kp_3$$

liest:

$$C \;\; G \;\; B \;\; B_1 \;\; B_2 \;\; p \;\; p_1 \;\; p_2 \;\; A_1 \;\; A_2.$$

Zu S. 106, mittlerer Absatz. Zu jedem Punkte p_1, p_2, $p_3 \ldots$ auf B gehört eine Kurve Γ_1, Γ_2, $\Gamma_3 \ldots$, aber auch ein projektiv zugeordneter Strahl durch k. In Fig. 23, S. 105, wird die aus der projektiven synthetischen Geometrie wohlbekannte Konstruktion ausgeführt.

Zu S. 106 Z. 3 v. u. Denn x liegt auf kg, dem der Kurve Γ zugeordneten Strahl durch k.

Zu S. 107, Z. 1, 2. In einer späteren Abhandlung geschieht dies nicht, wohl aber in der vorhergehenden in § 5. Beachtet man noch, dass die vorliegende Arbeit, siehe S. 108, vom Juli 1850, aber die vorhergehende, siehe S. 98, vom Juli 1851 datirt ist, was man zunächst für einen Druckfehler halten könnte, so lassen beide Umstände darauf schliessen, dass höchst wahrscheinlich die Arbeit VI älter als die Arbeit V ist. Nur die ersten Worte auf S. 98 und die Seiten 107, 108 wären also vor der Drucklegung von VI, da inzwischen auch V fertig war, hinzugekommen, wobei dann Grassmann den Hinweis S. 107, Z. 1, 2, in einen Hinweis auf die vorhergehende Arbeit umzuwandeln vergessen hätte.

Zu S. 107, Z. 4. Früher, das heisst in der Arbeit V auf S. 95 u. f.

VII. Erzeugung der Kurven vierter Ordnung durch Bewegung gerader Linien.

Crelles Journal Bd. 44 (1852).

Zu S. 109, Z. 13 v. u. Siehe S. 83.

Zu S. 111, Z. 8. Hier müsste eigentlich noch bemerkt werden, dass diejenigen Ecken des Polygons, die von der Diagonale getroffen werden, nämlich x und y, nicht an Gerade gebunden sind.

Zu S. 111, Z. 10, 11. Der gemeinschaftliche Schenkel ist Z.

Zu S. 111, Z. 12, 11 v. u. „Statt der Diagonale" bezieht sich auf die unter 4) erwähnte Diagonale.

Zu S. 112, Z. 11 v. u. Grassmann wählt ein Sechseck und kein Fünfeck, weil sich sonst nicht die allgemeinste Kurve vierter Ordnung ergiebt, denn später, vgl. Anm. zu S. 126, Z. 1—5, braucht er alle festen Elemente des Sechsecks.

Zu S. 112, Z. 1 v. u. „Spitze", um die Gegenseite des Fünfecks nachher als Grundseite bezeichnen zu können.

Zu S. 113, Z. 1 u. 4. Hier hat sich der Druckfehler p statt p_1 eingeschlichen.

Zu S. 114, Formeln (7) und (8). Vgl. S. 59, 60.

Zu S. 115, Satz. Vgl. S. 88.

Zu S. 117, Z. 1. Gemeint ist, dass die erstere durch alle Punkte geht, die A gleich Null machen, u. s. w.

Zu S. 118, Z. 21, 22. Denn xaB ist nach dem Satze auf S. 117 theilbar, wenn a in B liegt, ebenso $xaBb_1$, dies ausserdem, wenn b_1 in B liegt, endlich xbC, wenn b in C liegt. Nach dem Satze, der auf S. 118 vorangeht, ist ferner $xaBb_1(xb)$ oder also $[(xaB)b_1](xb)$ auch dann theilbar, wenn b_1 mit b zusammenfällt, und $xaB(xbC)$ oder also $[(xa)B]\,[(xb)C]$ dann, wenn B mit C zusammenfällt.

Zu S. 118, Z. 19, 18 v. u. Dies folgt aus dem Satze auf S. 117.

Zu S. 118, Z. 17 v. u. Dies folgt aus dem obigen Satze auf S. 118, sobald man das Produkt so schreibt: $[x(aB)b_1](xb)$, wo also b_1 und b die konstanten und xaB und x die veränderlichen Faktoren sind.

Zu S. 118, Z. 8—4 v. u. Die Theilgeraden sind nämlich: B, wenn a in B fällt, ferner ab_1, wenn b_1 in B fällt, ferner ab, wenn b_1 in b fällt, endlich bb_1, wenn a, b, b_1 auf einer Geraden liegen.

Zu S. 119, Z. 5—9. Die Theilgeraden sind: B, wenn a in B fällt, ferner C, wenn b in C fällt, ferner ab, wenn $B \equiv C$, endlich ab, wenn ab, B und C durch einen Punkt gehen.

Zu S. 119, Z. 15 v. u. Nämlich nach dem letzten Satze auf S. 118.

Zu S. 119, Z. 9 v. u. Gemeint ist der Satz auf S. 116, in dem $xaBb_1$ für A, ferner xb für B und d_1 für c zu setzen ist.

Zu S. 119, Z. 7 v. u. Hier ist derselbe Satz anzuwenden, indem $xaBb_1(xb)d_1$ für A, xe für B und f_1 für c zu setzen ist.

Zu S. 119, Z. 4 v. u. Gemeint ist der erste Satz auf S. 118, wobei $xaBb_1(xb)d_1$ und xe die beiden Faktoren sind. In ihnen sind wieder $xaBb_1(xb)d_1$ und x die veränderlichen, dagegen d_1 und e die konstanten Faktoren.

Zu S. 120, Z. 8, 7 v. u. In jenem Satze auf S. 114 ist nämlich c_1 durch b_1, D durch $d_1 f_1$ und e durch b zu ersetzen. Der Punkt BD des Satzes ist der noch fehlende Punkt $d_1 f_1 B$.

Zu S. 121, (2). Wir wollen dies unter Benutzung der Reduktionsregel (siehe S. 377) methodisch ableiten: Es ist $xaB = 0$, wenn $x \equiv a$, ferner $xbC = 0$, wenn $x \equiv b$, drittens $xeE = 0$, wenn $x \equiv e$. Treten diese Fälle nicht ein, so kann:

$$xaB \equiv xbC$$

sein. Multiplikation mit b giebt:

$$xaBb \equiv xb, \quad \text{da} \quad xb^\frown b,$$

und, wenn dies mit B multiplicirt wird:

$$xaB \equiv xbB, \quad \text{da} \quad xaB^\frown B$$

das heisst: x liegt auf B. Ebenso ergiebt sich x auf C, also $x \equiv BC$. In der That ist dann $xaB \equiv (BC)aB \equiv BC$, $xbC \equiv (BC)bC \equiv BC$. Nun ist anzunehmen:

$$xaB(xbC)D = 0,$$

das heisst: xaB und xbC sind mit D vereint. Also:

$$xaB(xbC) \equiv D.$$

Multiplikation mit B oder C giebt, da $xaB^\frown B$, $xbC^\frown C$:

$$xaB \equiv DB \quad \text{und} \quad xbC \equiv DC.$$

Multiplikation mit a bez. b giebt weiterhin:

$$xa \equiv DBa \quad \text{und} \quad xb \equiv DCb.$$

Also ist

$$x \equiv DBa(DCb).$$

In der That ist dann $xa \equiv DBa$, $xaB \equiv DB$, $xb \equiv DCb$, $xbC \equiv DC$, daher $xaB(xBC)D \equiv DB(DC)D = 0$. Nun sei:

$$xaB(xbC)D(xeE) = 0.$$

Multiplikation mit D giebt entweder den schon erledigten Fall

$$xaB(xbC)D = 0$$

oder, dass auch xeE mit D vereint sein muss, also x vereint mit DEe. Dagegen giebt Multiplikation mit E, weil $xeE = 0$ schon erledigt ist, dass $xaB(xbC)D$ mit E vereint ist, also:

$$xaB(xbC)DE = 0.$$

Dies ist die Gleichung eines durch die schon gefundenen Punkte a, b, BC, $DBa(DCb)$ oder a, b, c, d gehenden Kegelschnitts, von dem man nach folgender Methode beliebig viele Punkte finden kann: Jede Gerade durch b, z. B. die Gerade mb — wo m ein beliebiger Punkt ist — trifft den Kegelschnitt außer in b noch in einem zweiten Punkte x. Nach der Gleichung des Kegelschnittes liegt dieser Punkt auf der Geraden $xbC(DE)Ba$

oder, da $xb \equiv mb$ ist, auf der Geraden $mbC(DE)Ba$. Da er außerdem auf mb liegt, so ist:

$$x \equiv mbC(DE)Ba(mb).$$

Wie auch m gewählt sein mag, stets ist dies ein Punkt des Kegelschnittes. Setzen wir z. B. $m \equiv DE$, so ist $mbC(DE) \equiv DEb$, also

$$x \equiv DEbBa(DEb) \equiv DEbB,$$

nach der Reduktionsregel. Dies ist der von Grassmann mit r bezeichnete Punkt. Wir kennen nun von dem Kegelschnitt die fünf Punkte a, b, c, d, r. Für die oben gesuchten Punkte x, für die $xaB(xbC)D(xeE) = 0$ ist, liegen jetzt zwei Bedingungen vor: Erstens sollen sie mit DEe vereint sein und zweitens auf diesem Kegelschnitt liegen. Sie sind demnach die Schnittpunkte f und g der Geraden DEe mit dem Kegelschnitte durch a, b, c, d, r.

Endlich haben wir

$$xaB(xbC)D(xeE)F = 0$$

zu setzen, das heisst $xaB(xbC)D$ und xeE sollen mit F vereint sein. Letzteres sagt aus, dass x auf FEe, ersteres, dass x auf dem Kegelschnitt

$$xaB(xbC)DF = 0$$

liegt. Dieser Kegelschnitt unterscheidet sich von dem vorigen durch F statt E und geht daher durch die von Grassmann genannten Punkte a, b, c, d, s.

Zu S. 121, (3). Hier kann man ganz analog methodisch vorgehen, um die Grassmannschen Formeln zu erhalten. Wir begnügen uns mit der Angabe der Gleichung des in der letzten Zeile auftretenden Kegelschnitts:

$$xaBb_1(xb)F = 0.$$

Zu S. 122, (4). Ebenso; die Gleichung des Kegelschnitts ist hier:

$$xaBb_1(xb)d_1EF = 0.$$

Zu S. 122, (5). In der dritten Zeile tritt f auf; das erst in der übernächsten als DE definirt wird. Die Gleichung des Kegelschnitts ist hier:

$$xaBb_1CxDF = 0.$$

Zu S. 122, (6). Die Gleichungen der beiden Kegelschnitte sind:

$$xaBb_1Cxc_1 = 0. \quad xaBb_1CxDc_1EF = 0.$$

Zu S. 122, Z. 3 v. u. Es geht nämlich $xb(xaBb_1)d_1x = 0$ aus der unter (9), S. 114, angegebenen Form $axBcx = 0$ hervor, wenn a, B, c durch b, $xaBb_1$, d_1 ersetzt werden.

Zu S. 123, Z. 5. Gemeint ist, dass durch die neun Punkte unendlich viele Kurven dritter Ordnung gehen.

Zu S. 123, Z. 6. „Jene Produkte“ sind diejenigen, deren Verschwinden in § 3 untersucht wurde.

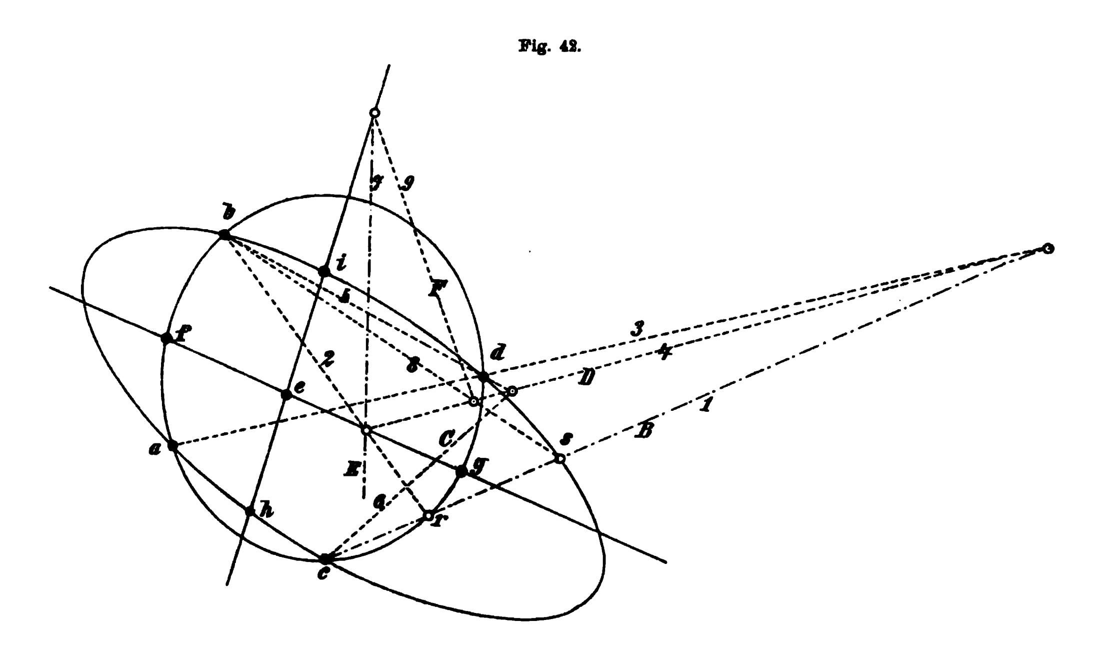
Zu S. 123, Z. 9. Die Hinzufügung des Faktors G ist auch deshalb nöthig, weil die Gleichung sonst zum Schlusse zwei ungleichartige Faktoren hätte.

Zu S. 124, Z. 3. Denn durch die drei Punkte kann man eine Gerade, durch fünf der übrigen einen Kegelschnitt legen. Beide zusammen bilden eine Kurve dritter Ordnung, die zu den unendlich vielen Kurven dritter Ordnung durch die neun Punkte gehört.

Zu S. 126, Z. 1—5. Hieraus erhellt, dass beim zweiten und fünften Satze, S. 112, 113, noch zwei lineare Bedingungen hinzugefügt werden dürfen, beim sechsten nur noch eine, dass dagegen beim ersten, dritten und vierten Satze gerade die geringste Zahl von Daten, die möglich ist, benutzt wird. Deshalb muss Grassmann im ersten Satze nothwendig ein Sechseck statt eines Fünfecks benutzen, vgl. die Anm. zu S. 112, Z. 11 v. u.

Zu S. 126, mittlerer Abschnitt. Siehe hierzu die beistehende Fig. 42, in der die Reihenfolge der Konstruktionen angegeben ist. Die zum Theil noch willkürlichen Geraden sind durch strichpunktirte Linien angedeutet.

Fig. 42.



Zu S. 126, Z. 4 u. 3 v. u. Es handelt sich hier um zwei verschiedene Kegelschnitte.

Zu S. 127, Z. 1—3. f und g werden erst Z. 11 u. 9 v. u. bestimmt. Zu dem hier behandelten dritten Fall vgl. beistehende Fig. 43 mit Angabe der Reihenfolge der Konstruktionen. Dabei haben wir r und s nach dem Pascalschen Satze aus den Sechsecken a, i, h, b, c, r und a, i, h, b, c, s konstruirt.

Zu S. 128, (4). Die Fälle (4) bis (6) sind von Grassmann nicht ausführlich behandelt worden. Wir leiten daher hier die Formeln methodisch ab. Im Falle (4) sind die neun Punkte $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ gegeben, von denen nach S. 123

$$e, f, g \quad \text{bez.} \quad e, d, b$$

auf Geraden und

$$a,\ b,\ c,\ d,\ h,\ i \quad \text{bez.} \quad a,\ c,\ f,\ g,\ h,\ i$$

auf Kegelschnitten liegen. Alsdann sollen B, b_1, d_1, E, F so bestimmt werden, dass die Formeln (4), S. 122, gelten, die wir so zusammenstellen:

$$(\alpha) \qquad b b_1 B \equiv c,$$

$$(\beta) \qquad d_1 b_1 B a (b d_1) \equiv d,$$

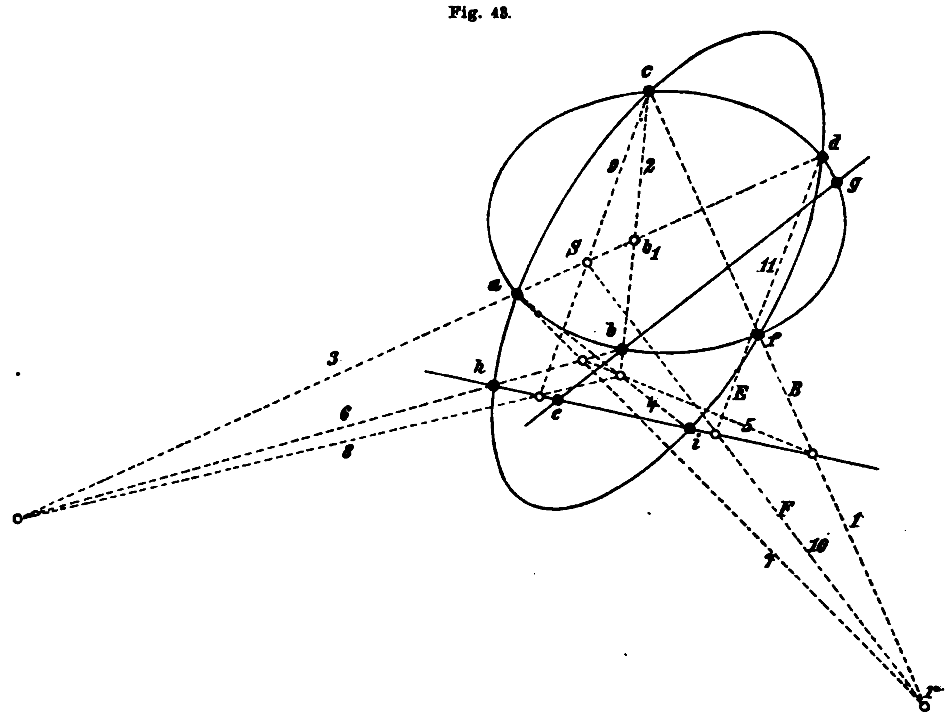
$$(\gamma) \qquad b d_1 E \equiv e,$$

$$(\delta) \qquad a b_1 E \equiv f,$$

$$(\varepsilon) \qquad B E \equiv g,$$

$$(\zeta) \qquad \begin{cases} (h,\ i) \equiv F \cdot [a,\ b,\ c,\ d,\ r], \\ \qquad \text{wo } r \equiv E F d_1 B. \end{cases}$$

Fig. 43.



(δ) giebt mit a multiplicirt $a b_1 \equiv f a$, das heisst: b_1 liegt auf $a f$; (α) giebt mit b multiplicirt $b b_1 \equiv c b$, das heisst: b_1 liegt auf $b c$, daher:

$$b_1 \equiv b c (a f).$$

Wird dies in (α) und (δ) eingesetzt, so kommt $b c B \equiv c$ und $a f E \equiv f$, das heisst: c liegt auf B und f auf E. (ε) giebt mit f multiplicirt, weil f auf E liegt:

$$E \equiv g f,$$

S. 122, ist aber $efCb_1Ba(ef)$ dieser neunte Punkt, das heisst: die Gleichung (ε) ist erfüllt.

Zu S. 128, (6). Wieder sind $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ gegeben und dabei liegen e, f, g nach S. 123 auf einer Geraden, während die sechs übrigen Punkte a, b, c, d, h, i auf einem Kegelschnitt liegen. Nach (6), S. 122, handelt es sich darum, B, b_1, C, c_1, D, E, F so zu bestimmen, dass die Forderungen erfüllt werden:

$$(\alpha) \qquad BC \equiv b,$$

$$(\beta) \qquad ab_1C \equiv c,$$

$$(\gamma) \qquad DCb_1BaD \equiv d,$$

$$(\delta) \qquad DE \equiv e,$$

$$(\varepsilon) \qquad (f, g) \equiv E\,.\,[a, b, c, c_1, r], \quad \text{wo} \quad r \equiv b_1c_1B,$$

$$(\zeta) \qquad (h, i) \equiv F\,.\,[a, b, c, d, s], \quad \text{wo} \quad s \equiv FEc_1D.$$

Nach (β) geht C durch c. (α) giebt daher mit c multiplicirt:

$$C \equiv bc.$$

Nach (α) geht ferner B durch b. Wir ziehen B beliebig durch b. Dann ist (α) erledigt. Setzen wir $C \equiv bc$ in (β) ein, so kommt $ab_1(cb) \equiv c$ oder $bc(ab_1) \equiv c$, das heisst: ab_1 geht durch c oder also: b_1 liegt auf ac. Nun giebt (γ) mit a multiplicirt: $DCb_1Ba \equiv da$, dies mit B multiplicirt: $DCb_1B \equiv daB$, dies mit DC multiplicirt: $DCb_1 \equiv daB(DC)$, das heisst: b_1 liegt auch auf $daB(DC)$. Demnach ist:

$$b_1 \equiv daB(DC)(ac).$$

Durch die für b_1 und C gefundenen Ausdrücke wird, wie man leicht sieht, (β) erfüllt. Nach (γ) geht ferner D durch d, nach (δ) durch e, also:

$$D \equiv de.$$

Jetzt ist auch, wie man rechnerisch sofort bestätigt, die Gleichung (γ) erfüllt. Nach (δ) geht E durch e, nach (ε) durch f, also:

$$E \equiv ef.$$

Nach (ε) liegt r auf B. Auch b liegt auf B. Ferner liegen a, b, c, f, g, r nach (ε) auf einem Kegelschnitte. Folglich bestimmt sich r so:

$$(b, r) \equiv B\,.\,[a, b, c, f, g].$$

Nach (ε) geht b_1c_1 durch r oder also rb_1 durch c_1. Daher kommt zur Bestimmung von c_1:

$$(r, c_1) \equiv rb_1\,.\,[a, b, c, f, g].$$

Nunmehr ist auch (ε) erfüllt, da e, f, g auf einer Geraden liegen, nämlich auf E. Nach (ζ) geht F durch h. Aus der zweiten Gleichung (ζ) folgt ferner durch Multiplikation mit c_1, dass $sc_1 \equiv FEc_1$ ist, hieraus durch Multiplikation mit E, dass $sc_1E \equiv FE$ ist. Wird dies mit h multiplicirt, so folgt, da F mit h vereint ist:

$$F \equiv sc_1Eh.$$

Wird dieser Werth in die zweite Gleichung (ζ) eingesetzt, so kommt $s \equiv sc_1 EhEc_1 D \equiv sc_1 Ec_1 D \equiv sc_1 D$, also liegt s auf D. Da auch d auf D liegt, so folgt, weil a, b, c, d, s, h nach (ζ) auf einem Kegelschnitt liegen sollen:

$$(d, s) \equiv D \,.\, [a, b, c, d, h],$$

wodurch s bestimmt wird. Wir behaupten, dass jetzt auch (ζ) erfüllt ist. Für die zweite Gleichung (ζ) leuchtet dies sofort ein. Was die erste anbetrifft, so ist zu beachten, dass a, b, c, d, h, i nach Voraussetzung auf dem darin auftretenden Kegelschnitt liegen und auch F durch h geht. Es bliebe also nur noch übrig, festzustellen, dass F auch durch i geht. Dies folgt so: Derjenige Punkt i, der nach (ζ) aus a, b, c, d, e, f, g durch die gefundenen Punkte und Geraden B, b_1, C, c_1, D, E, F bestimmt wird, liegt mit a, b, c, d, e, f, g auf unendlich vielen Kurven dritter Ordnung. Dasselbe thut der gegebene Punkt i, der also mit ihm identisch sein muss.

Zu S. 128, Z. 12—15. Dies und das Folgende ist durch unsere obigen Anmerkungen schon genügend erläutert.

Zu S. 129, Z. 10—12. Wir haben dies in Fig. 42 und 43 durch Nummerirung der auf einander folgenden Konstruktionen deutlich zu machen versucht.

Zu S. 129, Z. 13—17. Dies wird in § 8 gezeigt.

Zu S. 129, 130. Die §§ 6, 7 sind Einschaltungen von Dingen, die aus der projektiven Geometrie bekannt sind.

Zu S. 130, Z. 13. Die in § 6 mit G, H, g_1 bezeichneten Elemente heissen hier B, D, c.

Zu S. 130, Z. 20 v. u. „Punktirte Gerade“ bedeutet: geradliniger Träger einer Punktreihe.

Zu S. 131, Z. 14—11 v. u.. Diese Annahme ist statthaft, weil die Formeln (6), S. 128, dann immer noch bestimmte Punkte und Geraden liefern.

Zu S. 131, Z. 10 v. u. u. f. Man wird diese Schlüsse besser verstehen, wenn man einen bestimmten Fall, etwa den ersten, herausgreift. Es handelt sich alsdann um Folgendes: Eine Kurve vierter Ordnung Ω ist gegeben, man soll auf ihr neun Punkte a, b, c, d, e, f, g, h, i so bestimmen, dass erstens e, f, g und e, h, i je auf einer Geraden liegen und dass zweitens durch alle neun Punkte unendlich viele Kurven dritter Ordnung gehen. Zu diesem Zweck wird e beliebig auf Ω gewählt. Von e aus werden zwei Geraden gezogen, die Ω noch in je drei Punkten treffen. Von diesen Punktetripeln werden zwei Punktepaare ausgewählt und mit f, g bez. h, i bezeichnet. Eine beliebige Gerade L_1 trifft Ω in vier Punkten, von denen drei mit u, v, w bezeichnet werden mögen. Durch die acht Punkte e, f, g, h, i, u, v, w geht jedenfalls eine Kurve dritter Ordnung. Nun wird der an die Spitze dieses Paragraphen gestellte Satz benutzt: L_1 ist die im Satze zuerst erwähnte Gerade, und u, v, w sind die im Satze zuerst genannten Durchschnittspunkte. Die Kurve dritter Ordnung schneidet Ω in zwölf Punkten, zu denen e, f, g, h, i, u, v, w gehören, ausserdem noch vier Punkte, die a, b, c, d genannt werden. Nach dem Satze gehen durch a, b, c, d, e, f, g, h, i unendlich viele Kurven dritter Ordnung.

Zu S. 132, Z. 4. Das Produkt ist dasjenige, das in den Formelgruppen (1) bis (6) auf S. 121, 122 jedesmal zu Anfang steht und dort gleich Null gesetzt ist.

Zu S. 132, Z. 16. Von hier an wird vom ersten der sechs Fälle abgesehen. Er wird auf S. 133, Mitte, besonders besprochen.

Zu S. 132, Z. 4 v. u. Gemeint ist (6) auf S. 113.

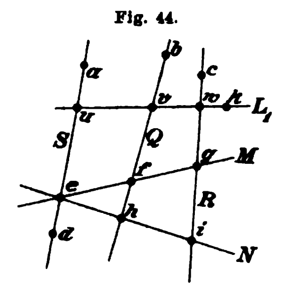
Zu S. 133, Z. 13. Mit der ersten Formel ist die Formel (1) auf S. 116 gemeint. Das Produkt, um das es sich handelt, ist hier nach (1), S. 121, das Produkt $xaBb_1(xb)d_1(xe)f_1$.

Zu S. 134, Z. 3. Um genau zu (1), S. 116, zu kommen, muss man H mit F bezeichnen.

Zu S. 134, Z. 4. Gemeint ist der Satz auf S. 109.

Zu S. 134, Z. 18. Die acht Punkte sind die in der Anmerkung zu S. 131, Z. 10 v. u. mit u, v, w, e, f, g, h, i bezeichneten Punkte. Man vgl. hierzu nebenstehende schematische Fig. 44. Alle darin angegebenen Punkte sollen auf der Kurve Ω liegen.

Fig. 44.



Zu S. 134, Z. 5—1 v. u. Beziehen wir uns auf Fig. 44, so können wir Grassmanns Verfahren so wiedergeben: Durch $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ gehen unendlich viele Kurven dritter Ordnung. Wählen wir einen Punkt x beliebig auf M, so geht also durch jene neun Punkte und x eine bestimmte Kurve dritter Ordnung. Da sie die vier Punkte e, f, g, x von M enthält, so zerfällt sie in die Gerade M und einen Kegelschnitt durch a, b, c, d, h, i.

Zu S. 135, Z. 3, 4. Die soeben erwähnte zerfallende Kurve dritter Ordnung trifft Ω ausser in a, b, c, d, e, f, g, h, i nach dem Satze auf S. 131 noch in drei Punkten, die auf einer Geraden L_2 liegen, die durch k geht. Da aber M zur Kurve dritter Ordnung gehört und M mit Ω ausser e, f, g noch einen Punkt gemein hat, so geht L_2 durch diesen vierten Punkt.

Zu S. 135, Z. 9, 10. Das in Klammern Stehende bezieht sich auf den ersten der sechs Fälle.

Zu S. 135, Z. 10—12. Nach S. 132 findet man p_1, p_2, p_3, wenn man in das Produkt je irgend einen Punkt der ersten, zweiten oder dritten Kurve dritter Ordnung einsetzt, der aber keiner der Punkte a, b, c, d, e, f, g, h, i sein darf. Da Q, M, N bez. der ersten, zweiten oder dritten Kurve angehört, erhellt die Richtigkeit des Textes.

Zu S. 135, Z. 15 u. 3 v. u. Dass hier eine Kurve vierter Ordnung durch weniger als sechzehn Punkte bestimmt ist, ist nicht absurd, wenn man bedenkt, dass diese Punkte nicht beliebig auf der Kurve liegen, sondern gegenseitig durch gewisse Beziehungen bedingt werden. Wir zählen übrigens fünfzehn statt vierzehn Punkte.

Zu S. 135, Z. 8 v. u. Vgl. J. Steiner, Die geometrischen Konstruktionen, ausgeführt mittels der geraden Linie und eines festen Kreises, Berlin 1833, S. 93, wo allerdings einer fester Kreis benutzt wird, der jedoch durch einen festen Kegelschnitt ersetzbar ist. (Auch Gesammelte Werke, Berlin 1882, I. Band, S. 512, oder Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Nr. 60, Leipzig 1895, S. 68.)

VIII. Allgemeiner Satz über die lineale Erzeugung aller algebraischen Oberflächen.

Crelles Journal Bd. 49 (1855).

Zu S. 144, Z. 8. Dies geschieht in der Abhandlung XI, § 3, S. 174.

Zu S. 144, Z. 11 v. u. Denn $x+y$ und $x-y$ brauchen den Punkt p zu ihrer Konstruktion je einmal, das Produkt $(x+y)(x-y)$ bedarf also seiner zweimal, ebenso z^2, also die Differenz $(x+y)(x-y)-z^2$ insgesamt viermal. In der früheren Form $x^2-y^2-z^2=1$ wäre der Punkt p sechsmal nöthig gewesen. Im Übrigen bemerken wir zu den beiden letzten Absätzen dieser Arbeit, dass Grassmann immer nur solche lineale Konstruktionen benutzt, deren Punkte, Geraden und Ebenen sämtlich reell sind.

IX. Grundsätze der stereometrischen Multiplikation.

Crelles Journal Bd. 49 (1855).

In dieser und den Abhandlungen X, XI, XII treten an die Stelle der früher in der Ebene benutzten „planimetrischen" Produkte, die gleich Null gesetzt wurden, fortschreitende Produkte „nullter Stufe". Man wird bemerken, dass auch jene planimetrischen Produkte von nullter Stufe sind, sobald man in der Ebene jene Stufenzahlen, die $\equiv 0 \pmod{3}$ sind, gleich Null setzt. Im Raume tritt eben die Zahl 4 an die Stelle der Zahl 3, sodass also trotz der verschiedenen Ausdrucksweise das in den Arbeiten IX—XII Gesagte die naturgemässe Verallgemeinerung der früheren Betrachtungen vorstellt.

Zu S. 148, Z. 10. Gemeint sind diejenigen vorher erwähnten Produkte, die vier Buchstaben enthalten.

Zu S. 148, Z. 12—10 v. u. Ist einer der Faktoren von nullter Stufe, so ist dies selbstverständlich. Sieht man hiervon ab, so kommen nur folgende Produkte in Betracht:

$$abc, \quad abC, \quad A\beta\gamma, \quad \alpha\beta\gamma$$

sowie die aus ihnen durch Permutation hervorgehenden. Setzt man $C\equiv cd$ und $A\equiv\alpha\delta$, so leuchtet der Satz wegen des vorhergehenden Satzes unmittelbar ein.

Zu S. 149, Z. 7. „Die Definition 3) vollkommen" soll bedeuten: Die beiden Definitionen 3) auf S. 146 zusammen.

Zu S. 149, Z. 12, 11 v. u. Nämlich:

$$abc\,.\,d\,.\,a\equiv abc(da), \qquad ab\,.\,c\,.\,da\equiv ab(c\,.\,da),$$
$$ab\,.\,cd\,.\,a\equiv ab(cd\,.\,a), \qquad a\,.\,bc\,.\,da\equiv a(bc\,.\,da),$$
$$a\,.\,bcd\,.\,a\equiv a(bcd\,.\,a), \qquad a\,.\,b\,.\,cda\equiv a(b\,.\,cda).$$

Zu S. 149, Z. 3, 2 v. u. Nämlich:

$$abc\,.\,d\,.\,ab\equiv abc(d\,.\,ab),$$
$$ab\,.\,cd\,.\,ab\equiv ab(cd\,.\,ab),$$
$$ab\,.\,c\,.\,dab\equiv ab(c\,.\,dab),$$
$$abc\,.\,da\,.\,b\equiv abc(da\,.\,b).$$

Zu S. 150, Z. 17 v. u. Die Bedeutung dieser Formel tritt deutlicher hervor, wenn man sich überlegt, dass sich aus A, B, Γ folgende Produkte überhaupt bilden lassen:

$$\begin{array}{llll} AB\Gamma, & BA\Gamma, & \Gamma(AB), & \Gamma(BA); \\ B\Gamma A, & \Gamma BA, & A(B\Gamma), & A(\Gamma B); \\ \Gamma AB, & A\Gamma B, & B(\Gamma A), & B(A\Gamma). \end{array}$$

Die je in einer Zeile stehenden vier Produkte sind einander nach der ersten Regel dieses Paragraphen kongruent. Die Produkte der letzten Zeile sind so beschaffen, dass in ihnen B weder mit A noch mit Γ direkt multiplicirt wird. Von solchen Produkten sieht aber der Text ab. Es bleiben also die acht ersten Produkte, die im allgemeinen zwei verschiedene Bedeutungen haben. Die Formel $BA\Gamma = B\Gamma A$ des Satzes sagt also aus, dass unter den im Satze angegebenen Bedingungen die Reihenfolge, in der B mit A und Γ vereinigt und fortschreitend multiplicirt wird, gleichgültig ist.

Zu S. 150, Z. 6, 5 v. u. In der That, soll $BA\Gamma \equiv B\Gamma A$ sein, was ja nach der vorigen Anmerkung die Kongruenz der acht in den beiden ersten Zeilen genannten Produkte nach sich ziehen würde, so erkennt man leicht, wenn man für A, B, Γ Punkte, Geraden oder Ebenen setzt, dass man immer darauf zurückkommt, dass eine der drei im Satze angegebenen Bedingungen 1), 2) oder 3) bestehen muss. Eigentlich ist dies schon auf S. 149 gezeigt worden.

Zu S. 150, Z. 4 v. u. Gemeint ist der Fall 2) des Satzes, wo von den beiden Faktoren A und Γ der eine ganz im andern liegt.

Zu S. 150, Z. 1 v. u. Man versteht dies, wenn man beachtet, dass hier Γ die Rolle des im Satze mit B bezeichneten Faktors spielt, sodass nach der zweiten Formel des Satzes, wenn statt A, B, Γ bez. AB, Γ, B geschrieben wird, sofort folgt:

$$AB\Gamma B \equiv AB(\Gamma B).$$

Die erste Formel des Satzes giebt, wenn darin A, B, Γ bez. durch B, A, ΓB ersetzt werden:

$$AB(\Gamma B) \equiv A(\Gamma B)B.$$

Zu S. 151, Z. 7—9. Zwar enthält die Formel auf S. 150 unten nur Produkte von vier Faktoren, aber wenn allgemein ein klammerloses Produkt von der Art, wie es der Satz verlangt, vorgelegt wird, so hat es offenbar die Form:

$$A_1 A_2 \ldots A_n B\Gamma B \Delta_1 \Delta_2 \ldots \Delta_m.$$

Setzt man $A_1 A_2 \ldots A_n \equiv A$, so ist das Theilprodukt

$$A_1 A_2 \ldots A_n B\Gamma B \equiv AB\Gamma B \equiv AB(\Gamma B),$$

sodass kommt:

$$A_1 A_2 \ldots A_n B\Gamma B \Delta_1 \Delta_2 \ldots \Delta_m \equiv A_1 A_2 \ldots A_n B(\Gamma B) \Delta_1 \Delta_2 \ldots \Delta_m.$$

Zu S. 151, Z. 16 v. u. Da nämlich die Summe der Stufenzahlen kleiner als fünf oder grösser als sieben ist.

Zu S. 152, Z. 7. Denn es ist:

$$A_1A_2\ldots A_n\equiv(A_1A_2\ldots A_{n-2})A_{n-1}A_n\equiv A_nA_{n-1}(A_1A_2\ldots A_{n-2})\equiv$$
$$\equiv A_1A_{n-1}(A_1A_2\ldots A_{n-3})A_{n-2}\equiv A_nA_{n-1}A_{n-2}(A_1A_2\ldots A_{n-3})$$

u. s. w.

Zu S. 153, Z. 3 v. u. Das obige Produkt PQ ist nämlich von nullter Stufe, da P und Q Geraden sind.

X. Ueber die verschiedenen Arten der linealen Erzeugung algebraischer Oberflächen.

Crelles Journal Bd. 49 (1855).

Zu S. 157, Z. 19 v. u. Nach heutigem Sprachgebrauch: Strahlenbündel.

Zu S. 157, Z. 17 v. u. Besser gesagt: $\xi\alpha$ stellt alle Geraden einer Ebene dar.

Zu S. 157, Z. 14 v. u. Besser gesagt: ξA stellt die Punkte einer geradlinigen Punktreihe dar.

Zu S. 157, Z. 11 v. u. Besser gesagt: $X\alpha$ stellt alle Punkte einer Ebene dar.

Zu S. 158, Z. 3 u. f. Vermuthlich hat hier Grassmann den in der Abhandlung XII, S. 188, gegebenen Beweis im Auge, der jedoch nicht erschöpfend ist, wir wir dort noch erläutern werden. Vgl. auch unsere Anmerkung zu S. 89, Z. 14—8 v. u.

Zu S. 158, Z. 19 v. u. Siehe J. Steiner, Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander, I. Theil, Berlin 1832, S. XIV, wo allerdings Strahlbüschel statt Strahlenbüschel steht. Vgl. auch Steiners Gesammelte Werke Bd. I, S. 237, od. Ostwalds Klassiker Nr. 82, S. 8.

Zu S. 158, Z. 2 v. u. Nämlich auf S. 156, Z. 6—4 v. u.

Zu S. 159, Z. 10 v. u. Es ist nicht geschickt, das Produkt mit p zu bezeichnen; es braucht nämlich durchaus nicht gerade einen Punkt vorzustellen. Dasselbe gilt S. 160, Z. 10.

Zu S. 160, Z. 14. pa kann — da p durchaus nicht nothwendig ein Punkt ist — einen Punkt oder eine Gerade oder Ebene bezeichnen. Das Erste ist ausgeschlossen, weil sonst $pa(Ab)$ die Stufe 4 hätte. Also hat $pa(Ab)$ die Stufe 1 oder 2. In $pa(Ab).b.c$ ist also die Stufenzahl 3 oder 4, daher Formel (2) anwendbar.

Zu S. 160, Z. 16. Man setze nämlich in Formel (3) $A\equiv pa$, $B\equiv b$, $\Gamma\equiv A$.

Zu S. 160, Z. 18. Weil pa eine Gerade oder Ebene ist, ist p von der Stufe 1 oder 2, das heisst in pab ist die Summe der Stufenzahlen kleiner als fünf, also $pab\equiv p(ab)$ nach (2). Also muss p die Stufe 1 haben, weil sonst $p(ab)$ die Stufe 4 hätte. Demnach ist $p(ab)$ eine Ebene, $p(ab)A$ ein Punkt. Mithin sind in $p(ab)A.b.c$ die Stufenzahlen der drei Faktoren gleich Eins, daher (2) anwendbar, also

$$p(ab)A.b.c\equiv p(ab)A(bc).$$

Zu S. 160, Z. 12 v. u. u. f. Schreibt man nämlich statt $pa\alpha B$ die Umkehrung $B\alpha ap$, so ist $B\alpha\equiv b$, $B\alpha a\equiv ba\equiv ab$. Der feste Hülfspunkt ist b, die feste Hülfsgerade ab.

Zu S. 160, Z. 2, 1 v. u. Hier spielen $c_n, c_{n-1}, \ldots c_1$ nach einander die Rolle des Punktes b. In der Ebene α_n muss eine Gerade A_n gewählt werden, die nicht durch c_n geht, sodass $\alpha_n \equiv c_n A_n$ ist u. s. w.

Zu S. 161, Z. 1—4. Eine Figur zeigt zunächst sofort, dass

$$x(a_1 c_1) A_1 (c_1 c_2) A_2 (c_2 c_3) \equiv x(a_1 c_1) B_1 (c_2 c_3)$$

ist, wenn man beachtet, dass $\alpha_1 \equiv c_1 A_1$, $\alpha_2 \equiv c_2 A_2$ und $B_1 \equiv \alpha_1 \alpha_2$ ist. und dass die Ebenen α_1, α_2 und $x(a_1 c_1) A_1 (c_1 c_2)$ drei Schnittgeraden durch einen Punkt haben. Also ist:

$$x(a_1 c_1) A_1 (c_1 c_2) A_2 (c_2 c_3) A_3 (c_3 c_4) A_4 (c_4 c_5) \equiv x(a_1 c_1) B_1 (c_2 c_3) A_3 (c_3 c_4) A_4 (c_4 c_5).$$

Wird $x(a_1 c_1) B_1 \equiv y$ gesetzt, so ist dies Produkt kongruent:

$$y(c_2 c_3) A_3 (c_3 c_4) A_4 (c_4 c_5).$$

Analog dem Vorigen folgt, wenn B_3 die Schnittlinie von α_3 und α_4 ist, dass dies Produkt kongruent $y(c_2 c_3) B_3 (c_4 c_5)$ ist. Demnach ist:

$$x(a_1 c_1) A_1 (c_1 c_2) A_2 (c_2 c_3) A_3 (c_3 c_4) A_4 (c_4 c_5) \equiv x(a_1 c_1) B_1 (c_2 c_3) B_3 (c_4 c_5)$$

u. s. w.

Zu S. 161, Z. 19 v. u. Setzt man $A \equiv pa$, $B \equiv c$, $\Gamma \equiv B$, so ist nach (3):

$$pac(cB) \equiv AB(\Gamma B) \equiv AB\Gamma B \equiv pacBc,$$

also in der That

$$pac(cB)b \equiv pacBcb \equiv p(ac)Bcb.$$

Aber $p(ac)B$ ist ein Punkt, daher nach (2):

$$p(ac)B \,.\, c \,.\, b \equiv p(ac)B(cb).$$

Zu S. 161, letzter Absatz. Hier ist das Ergebniss des § 2 mit eingeschlossen.

Zu S. 162, Z. 18—16, v. u. Diese offenen Figuren im Raume gehen durch Dualität nicht wieder in ebensolche über. Daher hat diese mangelhafte Verallgemeinerung von der Ebene her hier etwas Gekünsteltes. Nach unserer Ansicht sind die §§ 4, 5 an manchen Stellen unklar, aber allerdings auch nicht von wesentlicher Wichtigkeit.

Zu S. 163, Z. 20 u. f. Der Anfangsstrahl soll eine beliebige Gerade in der Ebene ξ sein. Sie trifft α_1 in einem Punkte, der ersten Ecke der offenen Figur; die Gerade, die diesen Punkt mit a_1 verbindet, ist die zweite Seite der offenen Figur u. s. w. Giebt man jenem Anfangsstrahl in der bestimmt gewählten Ebene ξ alle möglichen Lagen, so beschreibt die erste Ecke die Gerade $\xi\alpha_1$, die zweite Seite die Ebene $\xi\alpha_1 a_1$, die zweite Ecke die Gerade $\xi\alpha_1 a_1 \alpha_2$ u. s. w., schliesslich die letzte Seite die Ebene $\xi\alpha_1 a_1 \ldots \alpha_n a_n$.

Zu S. 163, Z. 17—10 v. u. Der Text ist etwas unklar: Wenn der Anfangsstrahl beliebig in ξ gewählt würde, müsste die erste Ecke auf ihm und nicht auf A_1 liegen. Grassmann denkt sich also wohl als Anfangsstrahl eine solche sonst beliebige Gerade in ξ, die A_1 trifft. Wird nun die Ebene ξ festgehalten, während sich der Anfangsstrahl in ξ um den Punkt ξA_1 dreht, so ist der Ort der letzten Seite der offenen Figur die Ebene $\xi A_1 B_1 \ldots A_n B_n$. Dabei bleibt die ganze offene Figur fest mit

Ausnahme des Anfangs- und Endstrahls. Beim Produkt $\xi A_1 B_1 \ldots A_n B_n A_{n+1}$ dagegen ist die letzte Ecke der Schnittpunkt der Ebene $\xi A_1 B_1 \ldots A_n B_n$ mit der festen Geraden A_{n+1}. Hier bleibt also die ganze offene Figur mit Ausnahme des Anfangsstrahls allein fest.

Zu S. 165, Z. 4. Da a, b, c Punkte sind, kommen von den Produkten des § 4 nur die von der Form $x a_1 \alpha_1 \ldots a_n \alpha_n$, $x A_1 B_1 \ldots A_n B_n$ und $\xi A_1 B_1 \ldots A_n B_n A_{n+1}$ in Betracht. In allen drei Fällen war bei festgehaltenem x bez. ξ auch die letzte Ecke der offenen Figur fest.

Zu S. 165, Z. 5. An die drei mit a, b, c endigenden offenen Figuren schliesst also Grassmann noch beliebige Endstrahlen an.

Zu S. 165, Z. 7 u. f. Da $\varrho \equiv abc$ noch mit weiteren festen Elementen multiplicirt werden soll, so handelt es sich um Produkte, wie sie in § 4 betrachtet werden, nämlich um Produkte von der Form $\varrho \alpha_1 a_1 \ldots \alpha_n a_n$, $\varrho A_1 B_1 \ldots A_n B_n$, $\varrho A_1 B_1 \ldots A_n B_n A_{n+1}$ (wo jetzt ϱ statt ξ steht). Im ersten Fall wurde der Anfangsstrahl in der Ebene ϱ beliebig gewählt, in den beiden anderen aber durch den Punkt ϱA_1 gelegt, was Grassmann, wie oben gesagt, nicht ausdrücklich erwähnt hat. Dementsprechend würde, wenn unsere Auffassung des Früheren richtig ist, hier eine Lücke sein, die sich jedoch leicht ausfüllen lässt: Der Punkt p, von dem in der Folge die Rede ist, darf nicht beliebig auf ab gewählt werden, sondern — im 2. und 3. Fall — im Schnittpunkt von ab mit der Geraden, die c mit ϱA_1 verbindet.

Zu S. 165, Z. 11—8 v. u. Da γ eine Ebene ist, so ist sie als eines der in § 4 betrachteten Produkte $x A_1 B_1 \ldots A_n B_n A_{n+1}$, $\xi \alpha_1 a_1 \ldots \alpha_n a_n$, $\xi A_1 B_1 \ldots A_n B_n$ entstanden zu denken. Jedesmal war die letzte Seite der offenen Figur bei festgehaltenem x bez. ξ an eine Ebene gebunden. Grassmann fügt nun auf dem Endstrahl noch einen Endpunkt der Figur beliebig hinzu, der irgendwie auf γ gewählt werden kann.

Zu S. 166, Z. 16—21. Unserer Ansicht nach ist hier wieder eine kleine Lücke: Da σ weiterhin mit festen Elementen multiplicirt werden soll, muss der Anfangsstrahl der vierten offenen Figur unter Umständen durch den Schnittpunkt von σ mit einer festen Geraden A_1 gehen. p muss dabei im Schnitt von $\alpha\beta$ mit $\sigma A_1 c$ gewählt werden.

Zu S. 167, Z. 19 v. u. Nämlich der Produkte ϱ, r, σ, s.

XI. Die stereometrische Gleichung zweiten Grades und die dadurch dargestellten Oberflächen.

Crelles Journal Bd. 49 (1855).

In dieser Arbeit zeigt Grassmann, dass eine stereometrische Gleichung zweiten Grades die allgemeinste geradlinige Fläche zweiter Ordnung darstellt. Nach dem in der vorhergehenden Abhandlung, S. 169, aufgestellten Satze lassen sich auch die nicht-geradlinigen Flächen zweiter Ordnung durch stereometrische Gleichungen darstellen. Aus beiden Sätzen müssen wir den Schluss ziehen, dass eine nicht-geradlinige Fläche zweiter Ordnung durch eine stereometrische Gleichung von höherem als zweitem Grade dargestellt wird, indem also die Fläche entweder mehrfach gezählt auftreten wird oder kombinirt mit anderen Flächen oder Ebenen. Es ist dies eine Unvollkommenheit der Grassmannschen Methode. Grass-

mann selbst geht auf diesen Umstand nirgends ein; wir dürfen überhaupt wohl annehmen, dass er die Erzeugung der Flächen bedeutend weniger intensiv studirt hat als die der ebenen Kurven. Man könnte natürlich die nicht-geradlinigen Flächen zweiter Ordnung doch durch eine stereometrische Gleichung zweiten Grades darstellen, sobald man imaginäre Elemente bei der Konstruktion zuliesse.

Zu S. 171, Z. 8. Zunächst nämlich zerspalten wir ϖ in zwei Faktoren A und B, sodass die Gleichung lautet: $x(AB) = 0$. Nach S. 151 dürfen die Faktoren x, A, B beliebig gestellt und zusammengefasst werden. Von A und B wird nur der eine den Faktor x enthalten, etwa B. Dann schreiben wir $xA.B = 0$. Nun verfahren wir mit B wie vorhin mit ϖ. Sei $B \equiv \Gamma\Delta$ und enthalte etwa Δ den Faktor x, so kommt $xA\Gamma\Delta = 0$ u. s. w. Schliesslich wird der letzte Faktor rechts x selbst. — Es möge übrigens beachtet werden, dass R (= Reihe) nur eine symbolische Bedeutung hat, denn in $xRx = 0$ soll nicht etwa das erste x mit dem Produkte R multiplicirt werden, sondern nach und nach mit den einzelnen Gliedern der Reihe R.

Zu S. 171, Z. 19—17 v. u. Im Anschluss hieran weisen wir auf einen Umstand hin, der schon von anderer Seite hervorgehoben worden ist (siehe R. Sturm, E. Schröder und L. Sohncke, Math. Annalen Bd. 14, 1879, S. 20): Zu dem im Text ausgeschlossenen ersten Fall gehört — in möglichst einfacher Form gewählt — z. B. die Gleichung $xa\alpha b\gamma cx = 0$, wo allerdings die linke Seite kein Produkt nullter Stufe ist. Man erkennt leicht, dass alle Punkte x, die dieser Gleichung genügen, eine Kurve erfüllen, nämlich einen Kegelschnitt. Denn, wenn die Ebene abc die Ebenen α und γ in den Geraden A und C schneidet, so liegen alle Punkte x, die jener Gleichung genügen, in der Ebene abc und zwar so, dass sie die planimetrische Gleichung $xaAbCcx = 0$ erfüllen. Gleich Null gesetzte stereometrische Produkte von anderer als nullter Stufe, die x enthalten, können also algebraische Kurven im Raume darstellen. Grassmann ist jedoch hierauf nicht eingegangen.

Zu S. 172, Z. 4 v. u. „Jedesmal", das heisst für jedes bestimmt gewählte x.

Zu S. 173, Z. 13—8 v. u. Natürlich sind alle vorkommenden Punkte, Geraden und Ebenen als reell vorausgesetzt. Grassmann benutzt hier den Satz, dass eine Fläche zweiter Ordnung, die eine reelle Gerade enthält, unendlich viele reelle Geraden hat. Doch beweist er die Geradlinigkeit der Fläche auch unabhängig hiervon auf S. 174 oben.

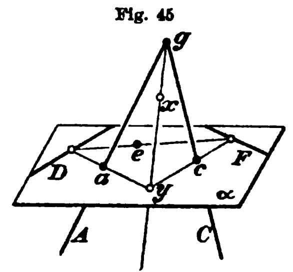
Zu S. 174, Z. 16 v. u. Bei dem Citat auf § 3 fehlt bei Grassmann die Seitenangabe und man könnte es nach den vorhergehenden Worten auf die Abhandlung IX — ihrer Ueberschrift halber — beziehen. Es scheint uns aber der Hinweis auf Abhandlung X als richtig. Vgl. insbesondere S. 161 unten.

Zu S. 174, Z. 9, 8 v. u. Nach S. 152.

Zu S. 175, Z. 18—15 v. u. Wir hoben schon bei S. 158, Z. 3 u. f. hervor, dass Grassmann glaubt, diesen Satz durch Benutzung der Begriffe der stereometrischen Multiplikation allein beweisen zu können. Vgl. unsere Anmerkung zu S. 188.

Zu S. 176, Z. 2 v. u. Vgl. S. 59.

Zu S. 177, Formeln (d). Vgl. beistehende Fig. 45. Ist nämlich y ein Punkt des Kegelschnitts, x ein Punkt auf yg, so liest man die Formeln unmittelbar ab.



Zu S. 177, Z. 7. Grassmann lässt hier stillschweigend die Bedingungen fort, dass auch E durch g gehen und D und F einander schneiden sollen. In der That sind diese Bedingungen unnöthig. Wenn nämlich nur A und C einander in g treffen, die fünf Geraden A, B, C, D, E sonst aber ganz beliebig liegen, und wenn x ein Punkt ist, für den

$$xADEFCx = 0$$

ist, so wird diese Bedingung auch durch jeden Punkt x' auf xg erfüllt. Denn für einen solchen Punkt ist $x'A \equiv xA$, also $x'ADEFC \equiv xADEFC$. Da diese Ebene durch C geht, also g enthält und $xADEFCx = 0$ sein soll, so enthält die Ebene $x'ADEFC$ die Punkte g und x, das heisst auch x', weil x' auf xg liegt. Demnach ist $x'ADEFCx' = 0$. Die Fläche zweiter Ordnung ist mithin ein Kegel mit der Spitze g. Uebrigens kann dieser Kegel bei besonderer Lage der fünf Geraden ausarten. Vgl. dazu S. 179 oben.

Zu S. 177, Z. 16—18. Denn wenn x ein Punkt ist, für den $xAB \ldots A_n B_n Ax = 0$ ist, und wenn x' in der Ebene xA liegt, so ist $x'A \equiv xA$, also $x'AB \ldots A_n B_n A \equiv xAB \ldots A_n B_n A$. Diese Ebene durch A enthält x, weil $xAB \ldots A_n B_n x = 0$ ist, und ist mithin die Ebene xA, in der x' liegt; daher: $x'AB \ldots A_n B_n x' = 0$.

Zu S. 177, Z. 18—21. Ist nämlich x irgend ein Punkt, der der Gleichung genügt, so schneidet die Ebene xA die Gerade B_n in einem Punkte x'. Dieser genügt nach dem Vorigen auch der Gleichung. Wir brauchen also nur diejenigen Punkte auf B_n zu suchen, die der Gleichung genügen, um alsdann sofort Ebenen durch A zu finden, deren Punkte sämtlich der Gleichung genügen. Zu bemerken ist nur noch, dass B_n nach Voraussetzung A nicht schneidet, da A im Produkte auf B_n folgt.

Zu S. 177, Z. 18 v. u. Bei Grassmann steht hier als Citat nur: § 3; dies ist wohl durch unser Citat zu ersetzen. Denn zunächst ist, weil $xAB \ldots A_n B_n Ax$ von nullter Stufe ist, nach dem ersten Satze auf S. 152:

$$xAB \ldots A_n B_n Ax \equiv xAB \ldots A_n (xAB_n).$$

Nun aber ist nach dem Satze auf S. 150 unter 2), weil x in B_n liegt:

$$xAB_n \equiv x(AB_n).$$

Also:

$$xAB \ldots A_n B_n Ax \equiv xAB \ldots A_n (x \,.\, AB_n).$$

Dies aber ist ein Produkt nullter Stufe mit den drei Faktoren $xAB \ldots A_n$, x, AB_n, das nach S. 151 beliebig geordnet werden kann. Daher auch so:

$$xAB \ldots A_n x \,.\, AB_n,$$

oder, wie im Text:

$$xAB \ldots A_n x \,.\, B_n A.$$

Zu S. 177, Z. 1 v. u. Grassmann sagt hier wie später stets: konjugirt statt: isolirt.

Zu S. 179, Z. 1—5. Wenn nämlich zunächst eine der Geraden die folgende schnitte, so würde das Zerfallen unmittelbar aus dem Satze auf S. 160 oben folgen. Nehmen wir daher an, keine der Geraden schneide die folgende. Dann ist $xABCDE$ nach S. 159 u. nur dann gleich Null, wenn x in A liegt. Für jeden andern Punkt x dagegen ist $xABCDE$ eine Ebene. Da der Kegel die Gerade A enthält, so kann er nur so zerfallen, dass ihm eine Ebene durch A angehört. Sind x und x' irgend zwei Punkte dieser Ebene, so ist $xA \equiv x'A$, also $xABCDE \equiv x'ABCDE$. Es soll aber $xABCDEx = 0$ und $x'ABCDEx' = 0$ sein, also müsste die Ebene $xABCDE$ die Punkte x und x' enthalten. Dies ist jedoch eine Ebene durch E. Beim Zerfallen muss also E die Gerade A schneiden, da x und x' zwei beliebige Punkte der Ebene durch A bedeuten. Der Kegel kann also nur noch dann zerfallen, wenn A und E in einer Ebene α liegen, und α muss dann dem Kegel angehören. Ist x ein Punkt von α, so ist $xA \equiv \alpha$, $xAB \equiv \alpha B$, $xE \equiv \alpha$, $xED \equiv \alpha D$. Da aber die Gleichung $xABCDEx = 0$ nach S. 152 so geschrieben werden kann: $xABC(xED) = 0$, so kommt $\alpha BC(\alpha D) = 0$, das heisst C muss die Gerade $\alpha B(\alpha D)$ schneiden.

XII. Die sterometrischen Gleichungen dritten Grades und die dadurch erzeugten Oberflächen.

Crelles Journal Bd. 49 (1855).

Zu S. 180, Z. 8 v. u. Vgl. unsere Anmerkung zu S. 171, Z. 8. R hat auch hier nur symbolische Bedeutung und soll kein Produkt vorstellen.

Zu S. 181, Z. 11—23. Nach dem Satze in § 5, S. 151, kann zunächst derjenige der drei Faktoren A, B, xR', der von zweiter Stufe ist, ans Ende gestellt werden, sodass also die beiden ersten Faktoren entweder die Stufenzahlen 1, 1 oder 3, 3 haben. Der Faktor zweiter Stufe wird dann wie im Text in zwei Faktoren von entweder je erster oder je dritter Stufe zerlegt. Das Produkt hat dann die Form $AB(\Gamma\Delta)$, wo für die Stufenzahlen von A, B, Γ, Δ die vier im Text angegebenen Möglichkeiten vorliegen. Da $\Gamma\Delta$ in x linear ist, so ist Γ oder Δ konstant. Wir können Δ als konstant betrachten. Die Summe der Stufenzahlen von AB, Γ, Δ ist vier oder acht. Daher ist der letzte Satz von S. 148 anwendbar, das heisst das Produkt gleich $AB\,.\,\Gamma\,.\,\Delta$.

Zu S. 181, Z. 13 v. u. Schlösse die Reihe der abwechselnden Punkte und Ebenen mit einem Punkte, so wäre das ganze Produkt eine Gerade, was ja ausgeschlossen ist.

Zu S. 182, Formeln (1) bis (4). Sie sind anders geordnet als die vier Fälle auf S. 181, denen die Reihenfolge (1), (3), (4), (2) entsprechen würde. Infolge davon enthält das Original später einige Fehler in der Bezeichnung, die wir verbessert haben. Vgl. das Verzeichniss der Abweichungen vom Original.

Zu S. 182, Z. 17—19. Wir erinnern daran, dass die Anzahl der festen Geraden gerade sein muss.

Zu S. 182, Z. 12 v. u. Die letzten Ecken der drei offenen Figuren sind die Punkte $x\mathfrak{R}$, $x\mathfrak{R}_1$, $x\mathfrak{R}_2$. Es wird also verlangt, dass sich die Ebene von $x\mathfrak{R}$ und A, die von $x\mathfrak{R}_1$ und A_1 und die von $x\mathfrak{R}_2$ und A_2 in einem Punkte der Ebene α treffen. Als letzte Seiten der drei offenen Figuren sind die Geraden von den Punkten $x\mathfrak{R}$, $x\mathfrak{R}_1$, $x\mathfrak{R}_2$ nach diesem Punkte von α gewählt.

Zu S. 182, Z. 5—1 v. u. Ist $\mathfrak{R}$ die Reihe $b\beta$, $\mathfrak{R}_1$ die Reihe $b_1\beta_1$ und $\mathfrak{R}_2$ die Reihe $b_2\beta_2$, so sind xb, xb_1, xb_2 die von der Spitze x des Tetraeders ausgehenden Kanten. Die Ecken der Grundfläche sind $xb\beta$, $xb_1\beta_1$, $xb_2\beta_2$. Die festen Punkte jener drei Kanten sind b, b_1, b_2, der feste Punkt der Grundfläche ist a. Die Ecken der Grundfläche liegen in den festen Ebenen β, β_1, β_2.

Zu S. 182, Z. 1 v. u., u. S. 183, Z. 1—3. Sind die Reihen $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}_1$, und $\mathfrak{R}_2$ die Geradenpaare BC, B_1C_1 und B_2C_2, so ist ein Punkt von α die Spitze der ersten Pyramide, wobei die von dieser Spitze ausgehenden Kanten A, A_1, A_2 treffen und die Endpunkte dieser Kanten auf C, C_1, C_2 liegen. Diese letzteren Punkte sind zugleich die Grundpunkte der andern Pyramide mit der Spitze x, deren von x ausgehende Kanten B, B_1, B_2 treffen.

Zu S. 183, Z. 17 v. u. Eigentlich $r(a_2a)\alpha$. Aber nach 1), S. 150, $r(a_2a) \equiv ra_2a$.

Zu S. 184, Z. 9 v. u. Denn $c\alpha$ ist von nullter Ordnung und nicht gleich Null, das heisst eine Zahlgrösse.

Zu S. 184, Z. 4 v. u. Eigentlich tritt zu scp_2a nicht der Faktor c, sondern $c\alpha$ hinzu; aber nach dem Satze in § 5, S. 151, ist

$$scp_2a \,.\, c\alpha \equiv scp_2a \,.\, c \quad \alpha.$$

Zu S. 185, Z. 4 v. u. „In allen Fällen", das heisst: auch, wenn $p_1p_2p_3 = 0$ ist.

Zu S. 186, Z. 9—15. Dies ist eigentlich nur eine Wiederholung einer Stelle von S. 185.

Zu S. 186, Z. 9 v. u. Nach S. 152.

Zu S. 187, Z. 13—19. Vgl. S. 157 und S. 171.

Zu S. 187, Z. 5, 4 v. u. Was geometrisch sofort aus einer Figur erhellt, aber im Folgenden auch analytisch bewiesen wird.

Zu S. 187, Z. 3—1 v. u. Denn nach S. 150 ist $AB\Gamma B \equiv A(\Gamma B)B$. Ist aber die Summe der Stufenzahlen von Γ und B gleich vier, während Γ nicht mit B vereint liegt, so ist ΓB eine von Null verschiedene Zahlgrösse, daher $AB\Gamma B \equiv AB$.

Zu S. 188, Z. 1—5. Zunächst ist nämlich nach dem Vorhergehenden

$$ABB_1 \ldots B_n\Gamma B_n \equiv (ABB_1 \ldots B_{n-1})B_n\Gamma B_n \equiv ABB_1 \ldots B_{n-1}B_n,$$

also:

$$ABB_1 \ldots B_n\Gamma B_nB_{n-1} \equiv ABB_1 \ldots B_{n-1}B_nB_{n-1} \equiv$$
$$\equiv (ABB_1 \ldots B_{n-2})B_{n-1}B_nB_{n-1} \equiv ABB_1 \ldots B_{n-2}B_{n-1}$$

u. s. w.

Zu S. 188, Z. 5, 6. Es war $xa\alpha b\beta c \equiv yc$. Hieraus folgt:

$$xa\alpha b\beta c\beta b\alpha a \equiv yc\beta b\alpha a,$$

das heisst nach dem Vorhergehenden:

$$xa \equiv yc\beta b\alpha a.$$

Zu S. 188, Z. 15—19. Grassmann benutzt hier den Satz, dass es nur eine projektive Beziehung zwischen zwei Ebenen giebt, sobald man vier Punkten der einen Ebene allgemein vier der andern zugeordnet hat, also einen Satz, der sich mittels der stereometrischen Multiplikation allein nicht beweisen lässt. Vielleicht hat er durch das Wort „kollinear" andeuten wollen, dass er hier etwas wo anders her entlehnt. Im Hinblick auf einige früher von uns hervorgehobenen Stellen sind wir jedoch im Zweifel, ob er sich darüber klar war, dass es sich um einen durch stereometrische Multiplikation allein nicht beweisbaren Satz handelt.

Zu S. 188, Z. 11 v. u. bis S. 189, Z. 17. Hier steht im Original a_2, a_3, a_4 statt k_2, k_3, k_4, was wir zu ändern genötigt waren, weil sonst a_2, a_3, a_4 in zwei verschiedenen Bedeutungen vorkämen.

Zu S. 189, Z. 12. In dieser Formel sind vier Formeln zusammengefasst, von denen die erste lautet:

$$a \equiv a_1 k_2 \alpha_2 k_3 \alpha_3 k_4 \alpha$$

und die andern drei hieraus hervorgehen, wenn a und a_1 bez. durch b und b_1 oder c und c_1 oder d und d_1 ersetzt werden.

Zu S. 190, Z. 7, 8. Vgl. unsere Anmerkung zu S. 188, Z. 15—19.

Zu S. 190, Satz 8. Dieser Satz ist schlecht stilisirt, was daher rührt, dass der Satz im Original mit den Worten: „Durch zwei Punkte" beginnt. Um möglichst schonend vorzugehen, haben wir nur diese Worte durch: „Bei zwei Punkten" ersetzt, obgleich der Satz dann immer noch zu wünschen übrig lässt.

Zu S. 190, Z. 11 v. u. Die Projektionsebene ist die einzuschaltende Ebene.

Zu S. 191, Z. 13. Die Projektionspunkte sind die oben mit k_1, k_2, k_3 bezeichneten Punkte.

Zu S. 192, Z. 10. Vgl. S. 182.

Zu S. 192, Z. 12. Auf S. 185.

Zu S. 192, Z. 5 v. u. Wie im Original steht hier irrthümlich Strahlenbüschel statt Ebenenbüschel, was leider übersehen worden ist.

Zu S. 193, Z. 2. φ hat hier eine andere Bedeutung als früher. Die vorher mit $\varphi\mathfrak{R}'$, $\varphi\mathfrak{R}_1'$, $\varphi\mathfrak{R}_2'$ bezeichneten Ebenen heissen jetzt φ, φ_1, φ_2. Nachher freilich, auf Z. 19 v. u., ist φ doch wieder die frühere Ebene, da dort $\varphi\mathfrak{R}' = \varphi$ ist.

Zu S. 193, Z. 19 v. u. Hierdurch ist die Gleichung (1) auf die einfachere Form gebracht:

$$x(x\mathfrak{R}_1)(x\mathfrak{R}_2)a = 0.$$

Zu S. 194, Z. 7 v. u. Vgl. S. 76. δ ist die Ebene, die zur Fläche zweiter Ordnung hinzutritt.

Zu S. 195, Z. 1. Die allgemeine Fläche dritter Ordnung enthält bekanntlich 27 Gerade, nach G. Salmon, Cambridge and Dublin Math.

Journ. Bd. 4, S. 118, 252 (1849). Aber es kann vorkommen, dass von diesen 27 Geraden nur drei reell sind, nach L. Schläfli, Quarterly Journal Bd. 2, S. 118 (1858).

Zu S. 195, S. 18—21. Diese Annahme ist erlaubt, sonst nämlich enthielte die Fläche alle Geraden durch jene drei im Texte genannten Geraden, das heisst, sie zerfiele in eine Fläche zweiter Ordnung und eine Ebene.

Zu S. 195, Z. 9 v. u. Vgl. unsere Anmerkung zu S. 193, Z. 19 v. u.

Zu S. 196, Z. 4. Lässt man auch imaginäre Gerade zu, so ist hiermit bewiesen, dass jede Fläche dritter Ordnung in der Form

$$xa(x\mathfrak{R}_1)(x\mathfrak{R}_2) = 0$$

darstellbar ist, also als Durchschnitt dreier projektiver Ebenenbündel — Grassmann sagt: Ebenenbüschel zweiter Stufe — erzeugt werden kann. Dieser Satz kommt vor Grassmann nicht vor. Man nennt deshalb diese Erzeugungsart die Grassmannsche. Vgl. H. Schröter in Crelles Journal Bd. 62 (1863), S. 265—280, insbes. S. 265 und S. 280, wo Schröter eine Bemerkung macht, die schon Grassmann auf S. 194, 195 hat. Vgl. ferner das Lebensbild Grassmanns von R. Sturm, E. Schröder und L. Sohncke, Math. Annalen Bd. 14 (1879), S. 19, 20.

Zu S. 196, Z. 16. Vgl. S. 185. Hervorzuheben ist, dass die damaligen Betrachtungen unabhängig davon waren, ob die Reihen $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$ aus Geraden oder aus abwechselnden Punkten und Ebenen bestehen.

XIII. Sur les différents genres de multiplication.

Crelles Journal Bd. 49 (1855).

S. 202, Z. 4. v. u.

Das hier stillschweigend eingeführte associative Gesetz der Multiplikation wird später ebenso wieder fallen gelassen; die meisten der Grassmannschen Multiplikationsarten sind nicht associativ.

Die Beschränkung der Produkte auf zwei Faktoren ist eine wirkliche Einschränkung des Problems. Es können nämlich bei Produkten mit drei oder mehr Faktoren noch neue Gleichungen hinzukommen, z. B. die Gleichungen des associativen Gesetzes, oder die nach Analogie der Jacobischen Identität gebildeten Gleichungen

$$uv \,.\, w + vw \,.\, u + wu \,.\, v = 0,$$

die eine lineale Multiplikationsart im Sinne Grassmanns definiren.

Ueberhaupt sind die Forderungen, die Grassmann an diese Einheiten stellt, zum Theil ziemlich willkürlich. Eine wesentliche Beschränkung liegt darin, dass nur die Einheitsprodukte gleicher Stufe durch lineare Gleichungen verbunden sein sollen; dadurch werden gerade solche Fälle ausgeschlossen, die Mancher für die interessantesten und wichtigsten halten wird, und die überdies auch grössere Schwierigkeiten darbieten. Man sehe die Ausführungen in dem Werke: Theorie der Transformationsgruppen, unter Mitwirkung von Fr. Engel bearbeitet von S. Lie, Bd. III (Leipzig 1893), S. 748 u. ff.

Was die Beziehungen von Grassmanns Multiplikationsarten zu bestimmten Gruppen angeht, so ist Folgendes ohne Weiteres ersichtlich: Hat

man durch ein System von Bedingungsgleichungen zwischen den Einheitsprodukten eine Multiplikationsart im Sinne Grassmanns definirt, so kann man in allgemeinster Weise neue Einheiten einführen, zwischen deren Produkten dieselben Bedingungsgleichungen bestehen. Die linearen Substitutionen, durch die dies geschieht, bilden dann nothwendig eine Gruppe (die sich natürlich unter Umständen auch auf die identische Transformation reduciren kann). Einige Gruppen kann man geradezu in dieser Weise definiren, so, wie Grassmann selbst schon bemerkt hat, die Gruppe der linearen Aenderungen (die allgemeine lineare Gruppe) und die Gruppe der circulären Aenderungen (die erweiterte Gruppe der Drehungen um einen festen Punkt). Als ein allgemeines Princip, wodurch man aus der Mannigfaltigkeit aller projektiven Gruppen eine besondere Klasse herausheben könnte, eignet sich dieses Verfahren indessen kaum. Denn einmal hat die ganze Fragestellung vom gruppentheoretischen Gesichtspunkt aus unseres Erachtens nur ein untergeordnetes Interesse, sodann aber ist die Beziehung zwischen Gruppe und „Multiplikationsart" nicht umkehrbar: Die Multiplikationsgesetze sind durch die Gruppe im Allgemeinen noch nicht völlig definirt, und es können auch (schon im Falle von zwei Einheiten) zu einer Gruppe mehrere ganz verschiedene Multiplikationsarten gehören.

Anders liegt die Sache bekanntlich im Falle der Systeme complexer Zahlen, deren Beziehung zu einer gewissen Klasse von Gruppen eindeutig umkehrbar ist.

S. 204, Z. 19 v. u.

Die zweite Forderung bedarf einer Erläuterung. Hat man nämlich die erste Forderung durch ein System von Bedingungsgleichungen befriedigt, und verlangt man, dass diese fortbestehen, wenn man z. B. an Stelle der Einheiten u_1 und u_2 die neuen Einheiten $x_1 u_1 + x_2 u_2$ und $y_1 u_1 + y_2 u_2$ einführt, so ergeben sich im Allgemeinen neue Bedingungsgleichungen für die Produkte der Einheiten $u_1, \dots u_n$. Es wird nun (wie aus den geführten Beweisen hervorgeht) angenommen, dass diese neuen Gleichungen auch wieder der ersten Forderung genügen sollen. Die zweite Forderung enthält also die allerdings nicht ausdrücklich formulirte Annahme, dass die Zahlenquadrupel x_i, y_i für alle Einheitspaare dieselben sind, und dass auch die noch zu suchenden Relationen sich nicht ändern, wenn man z. B. u_1 durch $-u_1$ ersetzt.

Diese Voraussetzungen sind von uns auch der Berechnung der aus zwei Einheiten abzuleitenden Multiplikationsarten zu Grunde gelegt worden.

S. 206, Z. 14. l'équation obtenue, gemeint ist die Gleichung

$$\alpha_{1,1} u_2 u_2 + \cdots + \alpha_{n-1,n-1} u_n u_n + \alpha_{n,n} u_1 u_1 = 0.$$

S. 206, Théorème 2.

Der Satz ist so zu verstehen, dass man sowohl bei den Einheiten als auch bei den Koefficienten die Indices $1 \dots n$ vertauschen darf, und zwar beidemal in beliebiger Weise.

S. 209, Z. 14 v. u. Pour trouver . . .

Dies ist nicht zu verstehen. Gemeint ist vielleicht: Wir wollen uns mit den (übrigens ohne Weiteres ersichtlichen) Relationen zwischen den Grössen x, y nicht aufhalten, da in dem nächsten Fall (4) dieselben Relationen auftreten.

S. 211 unten.

Die über den Fall zweier Einheiten aufgestellte Behauptung erweist sich nicht als stichhaltig, und demgemäss erleiden die Theoreme 4 und 5 im Fall $n = 2$ eine Ausnahme.

Es giebt bei zwei Einheiten zwölf Systeme von Bedingungsgleichungen, die Grassmanns erster und zweiter Forderung genügen.

Lassen wir die trivialen linealen Multiplikationsarten

(0) (keine Bedingungsgleichung),

(1) $e_1 e_2 = e_2 e_1$,

(2, 3, 4) $e_1^2 = e_2^2 = 0, \quad e_1 e_2 + e_2 e_1 = 0$,

(1, 2, 3, 4) $e_1^2 = e_2^2 = e_1 e_2 = e_2 e_1 = 0$

bei Seite, und setzen wir zuerst voraus, dass die Bedingungsgleichung (1) nicht erfüllt ist, so haben wir zuerst die von Grassmann angegebenen Multiplikationsarten

(4) $u_1^2 + u_2^2 = 0$,

(2, 3) $u_1 u_2 + u_2 u_1 = 0, \quad u_1^2 = u_2^2$;

die Aenderungen, die diese Gleichungen nicht zerstören, sind aber nicht nur die circulären, sondern sie bilden (in beiden Fällen) die umfassendere Gruppe

$$u_1' = x_1 u_1 + x_2 u_2, \quad u_2' = \pm (x_2 u_1 - x_1 u_2)$$

(ohne Bedingungsgleichung für die x).

Dazu kommen die von Grassmann übersehenen Fälle

(3) $u_1^2 = u_2^2$, und

(2, 4) $u_1 u_2 + u_2 u_1 = 0, \quad u_1^2 + u_2^2 = 0$,

beide mit der Gruppe

$$u_1' = x_1 u_1 + x_2 u_2, \quad u_2' = \pm (x_2 u_1 + x_1 u_2).$$

Aus diesen vier Fällen (3), (4), (2, 3), (2, 4) gehen dann noch vier weitere hervor, wenn man die Bedingung (1): $u_1 u_2 = u_2 u_1$ hinzufügt. Die Gruppe der erlaubten Aenderungen wird dadurch offenbar nicht geändert.

Da die zuletzt erwähnten Gruppen die circulären Aenderungen nicht enthalten, so bleibt das Theorem 6 auch in dem Fall von zwei Einheiten bestehen.

XIV. Die lineale Erzeugung der Kurven dritter Ordnung.

Crelles Journal Bd. 52 (1856).

Zu S. 218, Z. 6 v. u. Der ausführliche Titel ist: „Sopra un algoritmo proposto per esprimere gli allineamenti e sull' ordine o la classe del luogo geometrico dei punti o delle rette soggetti ad una legge di allineamento. Sunto del M. E. Prof. Bellavitis. Letto nell' adunanza dell' I. R. Istituto Veneto il dì 26 decembre 1854. Venezia, nel priv. stab. naz. di G. Antonelli, 1855." Durch Vermittelung des Herrn E. Wölfing in Stuttgart

sind wir in den Besitz eines Exemplars dieser Abhandlung gelangt, das anscheinend nur ein Separatabdruck aus den Atti dell' I. R. Istituto Veneto ist. Darin sind die Seiten mit 1—17 numerirt, und wir werden sie mit diesen Zahlen citiren.

Zu S. 218, Z. 4 v. u. u. f. A. a. O. S. 4, 9, 12.

Zu S. 219, Z. 2—4. Bellavitis, S. 4, 9, 15. Chasles' Abhandlung haben wir schon in der Anmerkung zu S. 97, Z. 17—15 v. u. citirt.

Zu S. 219, Z. 20—21. Dies geschieht auf S. 228, 229. Der Fehler von Bellavitis liegt auf der Hand.

Zu S. 219, Z. 3, 2 v. u. A. a. O. S. 4.

Zu S. 220, Z. 2. Wir haben in unseren Anmerkungen: vereinigte Lage gesagt.

Zu S. 220, Z. 6. A. a. O. S. 4.

Zu S. 220, Z. 8. A. a. O. S. 5. Ausserdem braucht Bellavitis für die Punkte grosse und für die Geraden kleine Buchstaben.

Zu S. 221, Regel 6 und 7. Diese Regeln sind eine Folge der im Vorhergehenden von uns oft angewandten „Reduktionsregel", vgl. S. 377.

Zu S. 222, Z. 15. Streng genommen ist dies nicht korrekt. Den eigentlichen Nachweis hat Grassmann dort unterdrückt. Wir haben ihn in einer Anmerkung gegeben.

Zu S. 222, Z. 19. Etwas inkonsequent bezeichnet Grassmann hier Punkte durch griechische Buchstaben.

Zu S. 222, Z. 20 u. f. Vgl. Fig. 11, S. 65.

Zu S. 222, Z. 13 v. u. Es muss auch gezeigt werden, dass diese Bedingung hinreicht. Dies geschieht auf S. 227.

Zu S. 222, Z. 3 v. u. Bei dieser Fassung ist auch das Unendlichferne berücksichtigt.

Zu S. 223, Z. 7. Statt „berührt" stände hier und auch später besser: trifft.

Zu S. 223, Z. 22 v. u. Vom Jahre 1706. Opera, herausgegeben von S. Horsley, Bd. 1, London 1729.

Zu S. 224, Z. 13. Für „Kurve" stände besser: Zug.

Zu S. 224, Z. 19 v. u. Das „Kurvenstück" ist ein Bogenelement der Kurve.

Zu S. 225, Z. 1. Der Winkel hat veränderliche Grösse.

Zu S. 225, Z. 6. Das heisst, wenn B die Gerade ca nicht zwischen c und a trifft.

Zu S. 225, Z. 12, 11 v. u. Gemeint ist, dass m der Punkte α, β, γ auf den unverlängerten Strecken ab, bc, ca liegen sollen.

Zu S. 226, Z. 8. Unter den „sieben" Fällen sind diese verstanden: Bewegung von

1) p und q hinsichtlich ab, die sich umkehrt, wenn γ zwischen a und b liegt,

2) q hinsichtlich ba und bc, die sich umkehrt, wenn B zwischen ba und bc liegt,

3) q und r hinsichtlich bc, die sich umkehrt, wenn α zwischen b und c liegt,

4) r hinsichtlich cb und ca, die sich umkehrt, wenn C zwischen cb und ca liegt,

5) r und p_1 hinsichtlich ca, die sich umkehrt, wenn β zwischen c und a liegt,

6) p_1 hinsichtlich ac und ab, die sich umkehrt, wenn A zwischen ac und ab liegt,

7) p_1 und p hinsichtlich a. In den sechs ersten Fällen giebt es $(m + 3 - n)$-mal Umkehr.

Zu S. 226, Z. 2 v. u. Denn eine Sehne dieses Zuges trifft den andern Zug deshalb nicht, weil sie ihn sonst — da der andere Zug keinen Wendepunkt hat — nicht nur einmal, sondern zweimal schneiden müsste. Diese Gerade hätte also mit der Kurve dritter Ordnung vier Punkte gemein, was unmöglich ist.

Zu S. 227, Z. 3—6. Hierdurch wird nachgewiesen, dass der im Zusatz auf S. 226 angegebene besondere Fall vermieden werden kann, was Grassmann nachher, Z. 10, ausdrücklich noch einmal betont.

Zu S. 227, Z. 18. Vgl. § 2, S. 222.

Zu S. 228, Z. 16. A. a. O. S. 13 mit Rücksicht auf das auf S. 12 Gesagte.

Zu S. 229, Z. 9. Gemeint ist die Gleichung auf S. 218.

Zu S. 229, Z. 23—14 v. u. Vgl. Satz Nr. 2 auf S. 74 und die Figur 14. Die dort benutzten Bezeichnungen

$$a \quad C \quad b \quad a_1 \quad C_1 \quad b_1 \quad d$$

sind jetzt ersetzt durch

$$a \quad A \quad a_1 \quad b \quad B \quad b_1 \quad c.$$

Die auf S. 75 genannten neun Punkte sind also jetzt diese:

$$a,\ b,\ c,\quad AB,\quad (aa_1)(bb_1),\quad ca_1A,\quad cb_1B,\quad aa_1B,\quad bb_1A.$$

In Figur 33 sind dies die Punkte:

$$a,\ b,\ c,\ g,\ e,\ h,\ i,\ d,\ f.$$

Zu S. 230, Z. 1, 2. Dies wurde auf S. 76 unten bewiesen.

Zu S. 230, Z. 14. Von hier an beginnt der Beweis dafür, dass die durch (4) dargestellte Kurve dritter Ordnung die durch (2) angegebene Konstruktion zulässt.

Zu S. 231, Z. 8. Denn alle Kurven dritter Ordnung durch die acht Punkte d, a, e, b, f, h, g, i haben noch einen neunten Punkt gemein. Eine solche Kurve besteht aus den Geraden dg, ah, ef, eine andere aus den Geraden de, bi, gf. Beide haben noch den Schnittpunkt von ah und bi gemein.

Zu S. 231, Z. 19 v. u. Bellavitis schreibt a. a. O. S. 16, Z. 3 v. u., die Gleichung so:

$$XAbCdEf(XJg)\,.\,XEh \parallel 0, \quad \text{wobei} \quad fJ \parallel 0, \quad gE \parallel 0$$

Zu S. 231, Z. 16 v. u. Eigentlich wäre eine neue Figur am Platze gewesen. Grassmann hat sich damit beholfen, das Nothwendigste in Fig. 33 einzutragen.

Zu S. 231, Z. 13 v. u. Vgl. S. 219, Z. 2.

Zu S. 231, Z. 5 v. u. Im Original steht g statt x, aber obgleich hier $x \equiv g$ ist, muss doch dem Sinne des Textes nach x stehen.

Zu S. 232, Z. 6. Denn für $x \equiv b$ ist $xe \equiv ef$, $fx \equiv ef$. Die Gleichung (9) giebt also

$$efDpEdF(efB) \, . \, bdC = 0$$

oder:

$$efDpEdF(efB)C(db) = 0.$$

Also liegt b auf $efDpEdF(efB)Cd$ und ausserdem liegt b auf ef, sodass der im Text angegebene Punkt b hervorgeht.

Zu S. 232, Z. 19. Soll nämlich $x \equiv i$ auf gd liegen, so ist $xd \equiv gd$, $xdC \equiv gdC \equiv g$, da g mit C vereint ist. Also:

$$xfB \, . \, xdC \equiv xfBg \equiv B,$$

da B mit g vereint ist. Demnach giebt (9)

$$ieDpEdFB = 0$$

oder:

$$BFdEpDei = 0,$$

sodass i auf $BFdEpDe$ liegt. Ausserdem liegt i auf gd, daher der Punkt i des Textes.

Zu S. 232, Z. 19 v. u. Diese Annahme macht auch Bellavitis, vgl. S. 231: $Ff = 0$.

Zu S. 232, Z. 2 v. u. Es war nämlich $A \equiv gf$, $g \equiv BC$, also $A \equiv BCf$; ferner war $a_1 \equiv hc \, . \, de$ und $h \equiv FCdEpDe(fg)$. Also $h \equiv FCdEpDeA$ und $a_1 \equiv FCdEpDeAc(de)$, und wegen $FC \equiv c$ kommt der im Text angegebene Wert von a_1. Ferner war $b_1 \equiv ic \, . \, ef$ und $i \equiv BFdEpDe(gd)$, also kommt, da $gd \equiv B$, auch der Werth b_1 des Textes.

Zu S. 233, § 7. Grassmann beabsichtigt nun zu zeigen, dass, wenn neun Punkte beliebig gegeben werden, stets eine planimetrische Gleichung aufgestellt werden kann, die die Kurve dritter Ordnung durch die neun Punkte darstellt. Beim Beweis entlehnt er Sätze aus der projektiven Geometrie.

Zu S. 233, Z. 4—10. Dies folgt sofort, wenn man die linke Seite einer planimetrischen Gleichung dritten Grades zuerst in zwei Faktoren zerlegt und dann einen der Faktoren nochmals zerlegt u. s. w.

Zu S. 233, Z. 11—14. Z. B. seien A, B zwei Gerade durch den Punkt c. Dann haben $P \equiv xaA$, $Q \equiv xbB$ die Eigenschaft, dass $P = 0$ für $x \equiv a$, $Q = 0$ für $x \equiv b$ und ausserdem noch $PQ = 0$ für $x \equiv AB \equiv c$ ist.

Zu S. 233, Z. 18—14 v. u. Grassmann behauptet: Sind fünf Elemente, z. B. fünf Punkte e_1, f_1, g_1, h_1, i_1, und ausserdem fünf Strahlen durch einen Punkt d, etwa ed, fd, gd, hd, id gegeben, so kann man ein Produkt $x\mathsf{A}$ bilden, das in ed, fd, gd, hd, id übergeht, sobald man darin x durch e_1, f_1, g_1, h_1, i_1 ersetzt. A soll dabei eine Reihe fester Punkte und Geraden sein, sodass also A an sich kein Produkt ist, sondern nur symbolische Bedeutung hat. — Dass dem in der That so ist, kann man mit Hülfe von Sätzen der projektiven Geometrie leicht erkennen: denn der Ort der Punkte, die so liegen, dass das Doppelverhältniss der Strahlen von ihnen nach e_1, f_1, g_1, h_1 oder i_1 gleich dem von ed, fd, gd, hd oder id ist,

ist ein Kegelschnitt durch e_1, f_1, g_1, h_1 bez. durch e_1, f_1, g_1, i_1. Beide Kegelschnitte haben ausser e_1, f_1, g_1 noch einen (reellen) Punkt d_1 gemein, der sich natürlich lineal konstruieren lässt. Nun sind die fünf Strahlen $e_1 d_1, f_1 d_1, g_1 d_1, h_1 d_1, i_1 d_1$ zu den fünf Strahlen ed, fd, gd, hd, id projektiv. Also lässt sich zu jedem Strahl durch d_1 der zugehörige Strahl durch d lineal konstruieren. Das ist es aber, was Grassmann behauptet. — Es ist zu betonen, dass Grassmann in § 7 nur einen allgemeinen Ueberblick geben will; erst in § 8 wird die in § 7 entwickelte Methode auf einen bestimmten Fall angewandt.

Zu S. 234, Z. 6. Gleichung (2) steht auf S. 218.

Zu S. 234, Z. 14, 13 v. u. Denn es ist $ea_1c \equiv a_1 . ec \equiv af . cd . ec$, und dies ist, da af und cd nach Voraussetzung nicht zusammenfallen, nur dann gleich Null, wenn e auf cd liegt, was ausgeschlossen wurde.

Zu S. 235, Z. 1—6. Die Gleichung (12) ist bis jetzt erfüllt durch $x \equiv a, b, c, d$, weil dann p oder $q \equiv 0$ ist. Dagegen für

$$x \equiv e,\ f,\ g,\ h,\ i$$

ist

$$p \equiv e,\ f,\ g_1,\ h_1,\ i_1,$$
$$q \equiv e,\ f,\ g_2,\ h_2,\ i_2.$$

Es kommt also darauf an, die in (12) noch verfügbaren Konstanten so zu wählen, dass (12) befriedigt wird, sobald für p und q eines der fünf Werthepaare, die hier stehen, gesetzt wird.

Zu S. 235, Z. 13—16. Gemeint ist: Ist $i_1 b_1 e = 0$, so ist erreicht, dass (12) für $p \equiv i_1$, $q \equiv i_2$ gilt, ohne dass k in besonderer Weise gewählt zu werden braucht. Ist aber $i_1 b_1 e$ nicht gleich Null, so wählen wir k so, dass $i_1 k i_2 = 0$ ist. Alsdann ist (12) wiederum für $p \equiv i_1$, $q \equiv i_2$ erfüllt. Um nun beide Möglichkeiten zu umfassen, wählen wir k in jedem Falle so, dass $i_1 k i_2 = 0$ ist; das heisst k wird auf $i_1 i_2$ gewählt.

Zu S. 235, Z. 11—7 v. u. Ausserdem ist k an $i_1 i_2$ gebunden, also ist k ein Schnittpunkt der hier erwähnten Kurve dritter Ordnung mit der Geraden $i_1 i_2$.

Zu S. 235, Z. 4, 3 v. u. f, g_2, h_2 sind die Werthe von q für $x \equiv f, g, h \ldots$ Diese drei Punkte liegen, da $q \equiv xbB$ ist, auf B.

Zu S. 236, Z. 3, 4. Hier wird also der Satz benutzt: Wenn eine Kurve dritter Ordnung zwei Geraden enthält, so zerfällt sie in drei Geraden.

Zu S. 236, Z. 10—16. Im Original steht hier überall g und h statt g_2 und h_2. Es ist dies ein Irrthum, dessen Beseitigung in der Folge erheblichere Korrekturen des Textes nöthig gemacht hat, die wir weiter unten erwähnen.

Zu S. 236, Z. 19. k wird also auf $\alpha\beta$ gewählt. Ausserdem liegt k auf $i_1 i_2$, das heisst: es ist $k \equiv \alpha\beta(i_1 i_2)$. Vgl. Z. 4 v. u.

Zu S. 236, Z. 19 v. u. Man muss sich nämlich daran erinnern, dass b_1 nach S. 235, Z. 15 v. u. der gemeinsame Punkt von kf, kg_2Cg_1 und kh_2Ch_1 ist.

Zu S. 237, Z. 3—5. Wegen des oben erwähnten Fehlers musste hier der Text erheblich geändert werden. Vgl. das Verzeichniss der Abweichungen vom Original.

Zu S. 237, Z. 20, 21. Auch hier entsprechende Abänderungen. Wegen seines obigen Fehlers zählt Grassmann nur 351 statt 369 Faktoren. Vgl. das Verzeichniss der Abweichungen vom Original.

Zu S. 238, Z. 20 v. u. Auf S. 103 ist nämlich $n = 2$ anzunehmen. Dann sind dort ein Strahlenbüschel und ein dazu projektives Kegelschnittbüschel zu konstruiren, deren Durchschnitt die dort mit C bezeichnete Kurve dritter Ordnung ist. Auch werden dort nur drei (statt sechs) Kegelschnitte B, B_1, B_2 konstruirt, weil sie für die Herstellung der projektiven Beziehung ausreichen. Diese drei Kegelschnitte haben mit C vier Punkte gemein. Der auf S. 237, Z. 9 v. u. erwähnte elfte Punkt l ist der Punkt, in dem auf S. 103 die Gerade A die Kurve C ausser in den beiden Punkten, durch die der Kegelschnitt B gelegt wurde, zum dritten Male trifft.

Zu S. 238, Z. 18—15 v. u. Zum Beweise des Satzes b) wird die Gleichung (1) auf S. 218 benutzt:

$$xaBcDxD_1c_1B_1a_1x = 0.$$

Giebt man x acht verschiedene Lagen auf der Kurve, aber nicht die Lage a und a_1 — diese Punkte gehören der Kurve an —, so gehören dazu je acht Punkte $xaBcD$ und $xa_1B_1c_1D_1$ auf D und D_1 und die Verbindende je zweier entsprechenden dieser Punkte geht durch den betreffenden Punkt x der Kurve dritter Ordnung. In dem Text des Satzes b) sind a, a_1, D, D_1 mit a, b, A, B bezeichnet. — Zum Beweis des Satzes c) wird die Gleichung (3) auf S. 218:

$$xaA \,.\, xbB \,.\, xcC = 0$$

benutzt. a, b, c gehören der Kurve dritter Ordnung an. Dem Punkte x werden noch sieben andere Lagen d, e, f, g, h, i, k auf der Kurve ertheilt. Dann liegen drei Büschel von je sieben Strahlen mit den Mittelpunkten a, b, c vor, deren Strahlen nach den sieben Punkten gehen. Sie treffen die drei Geraden A, B, C in je sieben Punkten, und diese dreimal sieben Punkte liegen zu je dreien nach der planimetrischen Gleichung auf einer Geraden, nämlich auf der Geraden $xaA \,.\, xbB$, wo $x = d, e, f, g, h, i, k$ zu setzen ist. — Zum Beweise des Satzes d) wird die Gleichung (2) auf S. 218 benutzt, aber in etwas verallgemeinerter Form:

$$xaAa_1 \,.\, xbBb_1 \,.\, xcCc_1 = 0.$$

a, b, c sind wieder die Büschelmittelpunkte. Die drei andern Büschel sind die aus a_1, b_1, c_1. — Zum Beweise der drei Sätze b), c), d) ist zu bemerken, dass die zwei bez. drei ausgewählten Punkte der Kurve dritter Ordnung Punkte allgemeiner Lage auf der Kurve sind.

Zu S. 238, Z. 15—13 v. u. Der Beweis des Satzes e) ist nach einem Grassmannschen Manuskripte so: Sind $a_1 \ldots a_{10}$ Punkte einer Kurve 3. O. C_3, so seien C_4 und C_4' zwei durch sie gehende Kurven 4. O., die sonst noch 6 Punkte $a_{11} \ldots a_{16}$ gemein haben. Durch $a_{11} \ldots a_{15}$ geht ein Kegelschnitt C_2, der C_4 noch in a_{17}, a_{18}, a_{19} und C_4' noch in a_{20}, a_{21}, a_{22} schneide. Endlich sei G die Gerade $a_{17}a_{18}$ und G' die Gerade $a_{20}a_{21}$. Sowohl C_4 und G' als auch C_4' und G und ebenso C_3 und C_2 bilden zusammen je eine Kurve 5. O. Die 1. und 3. haben die zwanzig Punkte $a_1 \ldots a_{15}$, $a_{17} \ldots a_{21}$ gemein und fallen also zusammen. Ebenso die 2.

und 3., die $a_1 \ldots a_{15}, a_{17}, a_{18}, a_{20}, a_{21}, a_{22}$ gemein haben. Da a_{16} auf C_4 und C_4' liegt, gehört a_{16} zur Kurve 5. O. und liegt demnach auf C_3 oder C_2, d. h. augenscheinlich auf C_2.

Zu S. 238, Z. 13—9 v. u. Es seien a bis k die zehn Punkte, vertheilt in zweimal zwei Gruppen zu je fünf, etwa:

1) $abcde$, $fghik$; 2) $abcdf$, $eghik$.

Jedesmal wird durch die fünf Punkte ein Kegelschnitt gelegt. Es seien dies die Kegelschnitte:

1) α, β; 2) γ, δ.

α und γ treffen einander in a, b, c, d, ferner treffen β und δ einander in g, h, i, k. α und δ schneiden einander ausser in e noch in drei Punkten, β und γ schneiden einander ausser in f noch in drei Punkten. Durch diese zweimal drei Punkte geht nach Satz e) ein Kegelschnitt.

Zu S. 238, Z. 6—2 v. u. Beweis analog dem des Satzes e), wenn man die Kurvengrade um Eins reducirt.

XVI. Lösung der Gleichung $x^3 + y^3 + z^3 + u^3 = 0$.

Grunerts Archiv Bd. 49 (1868).

S. 242, Z. 11, 10 v. u. Leider verräth Grassmann nicht, auf welche Weise man sich so leicht davon überzeugen kann, und doch ist gerade das der Punkt, auf den Alles ankommt, denn solange diese Behauptung nicht wirklich bewiesen ist, ist man nicht sicher, dass durch das Folgende wirklich alle Lösungen der Aufgabe geliefert werden.

XVIII. Zur Theorie der Kurven dritter Ordnung.

Göttinger Nachrichten 1872.

Zu S. 247, Z. 1 des Textes. Siehe A. Clebsch: „Ueber zwei Erzeugungsarten der ebenen Kurven dritter Ordnung“, Math. Annalen 5. Bd. (1872), S. 422—426.

Zu S. 248, Z. 1. Erklärung der Zuges auf S. 223.

Zu S. 248, Satz 4. Beweis auf S. 223, 224.

XIX. Ueber zusammengehörige Pole und ihre Darstellung durch Produkte.

Göttinger Nachrichten 1872.

S. 251, Z. 17. Gemeint ist offenbar $(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3)^n$.

S. 253, Z. 18 „abzuleiten“, nämlich linear, durch eine möglichst einfache Konstruktion. Von einer „Aufgabe“ kann man natürlich nicht eigentlich reden.

S. 253, Z. 12 v. u. Die Bezeichnung ist undeutlich. Gemeint ist natürlich

$$0 = \alpha_3 ab = \alpha_3 cd = \alpha_3 xy, \quad \text{u. s. w.}$$

S. 254, Mitte. Die Wendelinie ist, wie Grassmann gelegentlich bemerkt, die von Clebsch so genannte „Polardeterminante". S. Crelles Journal Bd. 59, S. 125.

S. 255, oben. Der Schluss beruht auf der gerade in solchen Fällen unzuverlässigen Methode der Konstantenzählung, und das angegebene Resultat ist auch nicht allgemein richtig.

S. 255, Z. 14. P_m ist nichts Anderes als eine Kurve m-ter Klasse. Die Unsymmetrie in der Bezeichnung der Kurven n-ter Ordnung und der Kurven n-ter Klasse, die dem Princip der Dualität zuwiderläuft, hat Grassmann in seinem späteren Aufsatz, Crelles Journal Bd. 84, beseitigt.

S. 255, unten. Das behandelte Problem lautet, etwa für Kurven 5. O. ausgesprochen in der Ausdrucksweise von Reye: „Es soll ein Punkt gefunden werden, der zusammen mit einer durch ihn bestimmten Kurve 2. Klasse eine zu der Kurve 5. O. apolare Kurve 3. Klasse bildet."

Die berührte Fragestellung scheint von den Geometern noch nicht wieder aufgenommen worden sein sein.

XX. Die neuere Algebra und die Ausdehnungslehre.

Mathematische Annalen Bd. 7 (1874).

Im Original werden zur Bezeichnung der äusseren Multiplikation bald runde, bald scharfe Klammern verwendet. Da hier die runde Klammer auch zur Bezeichnung sogenannter symbolischer Produkte dient, so haben wir, in Uebereinstimmung mit den Bezeichnungen von A_2, überall die scharfe Klammer als Zeichen der äusseren Multiplikation gesetzt.

S. 257, oben. Auf den „Fundamentalsatz" bezieht sich die Darlegung weiter unten S. 265.

S. 259, Z. 1 v. u. Im Original steht statt „specieller Complex": linearer Complex. Unter einem linearen Complex versteht man bekanntlich einen solchen, dessen Gleichung die Linienkoordinaten im ersten Grade enthält. Hier ist ein linearer Complex gemeint, dessen Invariante verschwindet, und der sich also auf die Gesamtheit aller Geraden reducirt, die eine bestimmte Gerade treffen.

Auf S. 541 und 546 des Originals steht statt (xa) und $(x\bar{a})$ $(= [xa]$ und $[x\bar{a}])$ im Original irrthümlich (ax) und $(\bar{a}x)$.

S. 262. $a = ax^n$. Die Bezeichnung der Lücke durch eine der vorkommenden Veränderlichen wäre besser vermieden worden, da es doch nicht angeht, dass das Zeichen ax^n gleichzeitig zwei verschiedene Bedeutungen hat. Man müsste sonst konsequenter Weise $ay^n = ax^n y^n$ setzen!

S. 267, Z. 3. So ist der hervorgehende Ausdruck . . ., nämlich nachdem man jedes Glied noch durch eine passend gewählte Potenz von $\varphi_0 = ax^n$ dividirt hat.

S. 267. Statt der in drei Fällen unrichtigen Zahlenkoefficienten sind die bei Clebsch angegebenen richtigen Werthe gesetzt worden.

Es dürfte am Platze sein, mit einer kritischen Besprechung dieser Arbeit eine Auseinandersetzung über die Beziehungen der Ausdehnungslehre zur Algebra der linearen Transformationen überhaupt zu verbinden.

Bekanntlich waren die in der Ausdehnungslehre von 1844 liegenden Keime unentwickelt geblieben, und es waren in der Folgezeit von anderen Mathematikern umfangreiche, von Grassmann nicht beeinflusste Untersuchungen angestellt worden, die namentlich zur Ausbildung der sogenannten symbolischen Methode geführt haben. Grassmann hat erst verhältnissmässig spät, und nach langer Entfremdung von der Mathematik überhaupt, auf Anregung von Clebsch in diese Entwickelung eingegriffen, und den Versuch gemacht, seine Ideen in dem Gedankenkreise der Invariantentheorie nachträglich noch zur Geltung zu bringen. Unter diesen Umständen ist es nun nicht zu verwundern, und jedenfalls zu entschuldigen, wenn es Grassmann — wie dem Herausgeber scheint — nicht mehr gelungen ist, sich das wahre Verhältniss seiner Ausdehnungslehre zu jenen Methoden völlig klar zu machen.

Dieses Verhältniss ist nämlich, nach des Herausgebers Ansicht, das der Unterordnung, der Art, dass die hier in Betracht kommenden Theile der Ausdehnungslehre vollständig in der weiter entwickelten und sorgfältiger durchdachten symbolischen Methode aufgehen, und als selbständige Disciplin überflüssig werden. Es lässt sich nämlich — soweit Invariantenbildungen in Frage kommen — zu jedem Schritte der Ausdehnungslehre eine entsprechende Operation im symbolischen Rechnen nachweisen, während das Umgekehrte nicht ohne Weiteres der Fall ist.

Es scheint uns daher eine nutzlose Verwickelung zu bedeuten, wenn man beide Vorstellungsweisen mit ihrer verschiedenen Terminologie neben einander benutzen will, wie es Grassmann in der vorliegenden Abhandlung gethan hat: Es heisst das nur, eine und dieselbe Sache zweimal in etwas verschiedener Weise bezeichnen; denn auf eine abweichende Bezeichnung, so dass man z. B. ax^n für a_x^n schreibt, kommt schliesslich der ganze Unterschied hinaus. Der Grundgedanke ist beidemal derselbe, wenn er auch, entsprechend dem selbständigen Ursprung beider Disciplinen, in verschiedene Worte gekleidet wird, und wenn man sich auch die Ausdrücke in beiden Fällen ein wenig anders entstanden denkt. Ganz identisch sind aber die anzustellenden Rechnungen. Es ist uns daher nicht recht verständlich, was Grassmann meint, wenn er (in § 3) seinen Ausdrücken eine „reale“ Bedeutung zuschreibt, die der anderen Methode fremd sei; namentlich aber können wir nicht zugeben, dass es Fälle geben könnte, in denen die symbolische Methode versagte, und die Ausdehnungslehre ergänzend einzugreifen hätte. Das ist durch die Natur der Dinge völlig ausgeschlossen.

So enthalten auch die in der vorliegenden Abhandlung ausgesprochenen Sätze nichts Specifisches, der Ausdehnungslehre Eigenthümliches, und ihr Beweis erfordert im Rahmen der gewöhnlichen Theorie nur wenige Zeilen, ohne dass neue Begriffe und Zeichen nothwendig wären. So ergiebt sich der Satz in § 4 ohne Weiteres, wenn man die Abhängigkeit zwischen x und y derart bestimmt, dass $a_x^{n-1} a_y = 0$, $(xy) = a_x^n$ wird, und dann jeden symbolischen Faktor (ab) nach der Formel $(xy) . (ab) = a_x b_y - a_y b_x$ umwandelt.

Der Satz erscheint also, nachdem das — in dem Werke von Clebsch angewendete — Verfahren einmal gefunden ist, ziemlich selbstverständlich. Als eine „Anwendung der Ausdehnungslehre auf Invariantentheorie" kann er kaum angesehen werden, und ebensowenig kann man sagen, dass er „beinahe alle Beziehungen, die zwischen binären Formen herrschen" zur Evidenz bringt.

Natürlich wollen wir nicht behaupten, dass es nicht möglich sei, die Begriffe der Ausdehnungslehre derart zu entwickeln, dass sie ein vollständiges Aequivalent der symbolischen Methode wird. Dies ist sogar sehr leicht; nur sehen wir nicht, was es nützen soll.

Bei der grossen Rolle, die in der Ausdehnungslehre überhaupt abkürzende Bezeichnungen spielen, ist es nöthig, einmal darauf hinzuweisen, dass diese durchaus nicht immer zweckmässig gewählt sind. Namentlich vermissen wir in den späteren Abhandlungen Grassmanns (seit 1872) ein einheitliches Princip in der Wahl der Zeichen. Einige Male schwankt Grassmann zwischen mehreren verschiedenen Bezeichnungen. Manche Zeichen sind viel zu undeutlich, um bei weitergehenden Anwendungen brauchbar zu sein; man muss zu vielerlei im Gedächtniss behalten. Es kommt auch vor, dass gewisse Zeichen mehrere Bedeutungen haben. (Man vergleiche unsere Schlussbemerkungen zu den Abhandlungen XXI und XXII, S. 437, 438.) Wenn daraus, soweit uns bekannt, ernstere Uebelstände nicht hervorgegangen sind, so liegt das lediglich daran, dass Grassmann in der späteren Zeit Anwendungen der massenhaft eingeführten Symbole nur noch in sehr geringem Umfange gemacht hat.

Schliesslich wollen wir noch auf einen Umstand hinweisen, der namentlich bei einer Darstellung der Invariantentheorie im Gewande der Ausdehnungslehre sich störend fühlbar machen müsste. Es ist die Mehrgestaltigkeit im Ausdruck der linearen Transformationen, wodurch die Zahl der Begriffe und Zeichen unnöthig vergrössert wird. Die linealen Aenderungen sind gewiss nicht zu entbehren; die sogenannten Quotienten aber, so geistreich sie ersonnen sind, sind innerhalb des Systems der Ausdehnungslehre selbst vollkommen überflüssig. Denn gleich Null gesetzte Lückenausdrücke mit zwei Lücken — bilineare Formen in der heute üblichen Ausdruckweise — leisten genau Dasselbe, ja sie werden Grassmanns Principien in noch vollkommenerer Weise gerecht; und sie können ihrerseits nicht durch die Quotienten vertreten werden, da sie das Anfangsglied in der Reihe der Connexe bilden, also in einem systematischen Ausbau der Ausdehnungslehre nicht fehlen dürfen.

Wir haben bei diesen Ausstellungen aus zwei Gründen verweilt. Der erste ist, dass die Schriften einiger Mathematiker, die mit ihren Arbeiten an Grassmann anknüpfen, mit der sonst in Betracht kommenden Litteratur aber offenbar ungenügend bekannt sind, die gerade einem solchen Calcul gegenüber doppelt nothwendige Kritik der Methode ganz und gar vermissen lassen. Manche schwören auf Grassmann wie auf eine Art von Evangelium, und wollen seine Methoden, d. h. heute nicht viel mehr, als seine eigenthümliche Ausdrucksweise, überall angewendet wissen*). Dass dabei nicht viel Bemerkenswerthes zum Vorschein gekommen ist, kann

*) Ganz Entsprechendes gilt übrigens von den meisten Nachfolgern Hamiltons.

nicht überraschen. Diesen Mathematikern gegenüber war es nöthig — wenn es auch voraussichtlich nicht viel Erfolg haben wird — die Unzulänglichkeit eines solchen Standpunktes einmal darzulegen; scheinen doch diese (und noch viel schwerer wiegende) Mängel für die öffentlich geübte Kritik nicht vorhanden zu sein. Statt buchstabengläubig Alles zu übernehmen, was Grassmann geschaffen hat, werden wir besser thun, uns die tiefen philosophischen Gedanken anzueignen, die in den Werken von 1844, 1847 und 1862 niedergelegt sind, und uns zu bemühen, in seinem Geiste zu arbeiten. Dazu gehört namentlich auch, dass wir Grassmanns Methoden durch sachgemässere ersetzen, da wo es nöthig ist. (D. h. ungefähr überall, sobald man über die leichten Aufgaben hinauskommt, auf deren Bearbeitung die Herren Grassmann-Fanatiker sich zu beschränken pflegen.) Wir dürfen uns hier auf die schönen Worte berufen, mit denen Grassmann die Vorrede zur Ausdehnungslehre von 1862 geschlossen hat.

Der zweite der oben erwähnten Gründe ist, dass wir es zu rechtfertigen haben, dass wir von den zahlreichen auf Invariantentheorie bezüglichen Manuscripten aus dem Nachlasse Grassmanns Nichts an die Oeffentlichkeit bringen. Auf diese Aufzeichnungen, die aus Grassmanns letzten Lebensjahren stammen (sie beginnen 1873), und übrigens nicht in druckfertiger Gestalt vorliegen, findet nämlich die soeben geübte Kritik gleichfalls Anwendung. Merzt man aus, was blosse Definition, und was nur formale Aenderung von Untersuchungen anderer Mathematiker ist, so bleibt nicht viel übrig. Auch dieses Wenige hat sich leider nicht als zur Veröffentlichung geeignet erwiesen.

Wir wenden uns nunmehr zu dem Fundamentalsatze in § 1.

Dieser reducirt sich, wenn man $m = 2$ setzt, auf den Satz in § 4. Für $m > 2$ aber ist er, wenn man ihn wörtlich nimmt, nicht zu verstehen.

Gemeint ist wahrscheinlich das Folgende. Statt, wie es gewöhnlich geschieht (bei ternären Formen) einen Punkt und eine von diesem unabhängige Linie in die zu betrachtenden Formen als Veränderliche eintreten zu lassen, genügt es bei gewissen Fundamentalaufgaben, den Punkt und die Linie in vereinigter Lage (aber im Uebrigen frei veränderlich) anzunehmen. Fasst man nun die Linie u als Verbindungslinie des Punktes x mit einem anderen Punkte y auf, so erhält man ein System von Formen, das in vieler Hinsicht das gewöhnlich sogenannte Formensystem vertreten kann, und dessen Bildungen sich, wenn a_x^n die Grundform ist, aus symbolischen Faktoren der drei Typen

$$(abc),\ (abu) = (a_x b_y - a_y b_x),\ a_x$$

zusammensetzen.

Man kann nun einen dritten veränderlichen Punkt z (eine extensive Veränderliche z) so bestimmen, dass bei frei veränderlichen x und y

$$a_x^{n-1} a_z = 0, \quad a_y^{n-1} a_z = 0,$$

$$(xyz) = a_x^n \cdot a_y^n - a_x^{n-1} a_y \cdot a_y^{n-1} a_x$$

wird. Gestaltet man dann jeden Faktor (abc) mit Hülfe des Multiplikationssatzes der Determinanten

$$(xyz) \cdot (abc) = |a_x b_y c_z|$$

um, so wird die fragliche Invariante oder Covariante, nach Ausrechnung der symbolischen Produkte, in der That eine rationale Funktion der Grassmannschen Stammformen, nämlich der Polaren

$$a_x^n,\ a_x^{n-1}a_y,\ \ldots\ a_n^2,\ a_x^{n-2}a_z^2,\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ \ldots\ a_y a_z^{n-1},\ a_z^n,$$

wobei im Nenner nur eine Potenz von (xyz) vorkommt. Aehnlich verhält sich die Sache in höheren Fällen.

XXI. Der Ort der Hamiltonschen Quaternionen in der Ausdehnungslehre.

Mathematische Annalen Bd. 12 (1877).

Grassmann scheint, wenigstens bei Abfassung der vorliegenden Abhandlung, Hamiltons Schriften nicht zur Hand gehabt zu haben, denn er citirt nur abgeleitete Quellen (Dillner und Hankel). Andernfalls möchte sein Urtheil über das Werk des irischen Mathematikers doch wohl günstiger ausgefallen sein.

Obwohl wir wissen, dass wir es wahrscheinlich keiner Partei recht machen werden, wollen wir uns doch der Aufgabe nicht entziehen, zu den von Grassmann berührten Fragen Stellung zu nehmen.

Wir müssen Grassmann darin beistimmen, dass die Ausdehnungslehre im Vergleich zu den Quaternionen als die umfassendere und weiter reichende Disciplin erscheint; und auch wir finden, dass die Quaternionenmethode schon von Hamilton selbst, und mehr noch von dessen Nachfolgern, auf eine Menge von Gegenständen angewendet worden ist, für deren Behandlung sie sich gar nicht eignet. Auf der anderen Seite ist es nur billig, anzuerkennen, dass auch die Quaternionentheorie eine originale Schöpfung ist, und dass sie auf ihrem eigentlichen Gebiete (das die Bewegungslehre und Theile der mathematischen Physik umfasst) den Gedanken einer geometrischen Rechnungsart in vollkommenerer Weise verwirklicht, als es Grassmanns Methoden thun. Beide Rechnungsweisen ergänzen einander.

Der Umstand, dass beide Autoren unabhängig von einander gearbeitet haben (s. die Anmerkungen auf S. 414 des ersten Bandes* dieser Ausgabe) braucht natürlich niemanden davon abzuhalten, mit Grassmann den Quaternionen nachträglich noch ihren „Platz in der Ausdehnungslehre“ anzuweisen, sie als eine Entwickelung dieser Disciplin nach einer besonders wichtigen Richtung hin zu behandeln. Wir dürfen indessen nicht übersehen, dass man, um dies auszuführen, einer Wendung bedarf, die, so selbstverständlich sie uns heute erscheinen mag, dem Gedankenkreise Grassmanns ursprünglich völlig fremd ist. Wir meinen die Zurückführung der Produkte zweiter Stufe auf die ursprünglichen Einheiten, unter Annahme des associativen Gesetzes der Multiplikation. (S. Lie und Engel, Theorie der Transformationsgruppen III, Leipzig 1893, S. 748.) Diesen folgenreichen Schritt hat, das Gebiet der gewöhnlichen complexen Zahlen verlassend, bekanntlich zuerst Hamilton gethan; bei Grassmann erscheinen die sogenannten Einheitsprodukte immer als Grössen einer neuen Art.

Wenden wir uns nun insbesondere zu Grassmanns Darstellung der Quaternionentheorie, so können wir uns nicht verhehlen, dass diese darin

nicht zu ihrem Rechte gekommen ist. Wir meinen damit nicht nur, dass uns die polemischen Stellen über das Ziel hinauszugehen scheinen, sondern namentlich auch, dass die von Hamilton übernommenen Gedanken nicht deutlich genug als solche bezeichnet sind. Es scheint Grassmann gar nicht zum Bewusstsein gekommen zu sein, dass gerade die entscheidende Wendung in der Abhandlung „Sur les différents genres de multiplication“ nicht zu finden ist.

Im Einzelnen erscheint die Darstellung im ersten Theile von Grassmanns Abhandlung gesucht. Es soll gezeigt werden — was an sich ganz richtig ist — dass die Grundanschauungen der Ausdehnungslehre mit Nothwendigkeit zu den Quaternionen hinführen. Man fragt sich aber unwillkürlich, ob die ganze Argumentation überhaupt möglich gewesen wäre, wenn die Quaternionen nicht schon vorgelegen hätten. Namentlich die ganz ungenügend motivirte Ersetzung des Produktes $[ab]$ in der Gleichung (4) durch seine Ergänzung (in 4b) sieht beinahe wie ein Taschenspielerstück aus. Einfacher würde es gewesen sein, wenn der doch nicht vermiedene Gedankensprung an den Anfang verlegt worden wäre, wenn also die Entwickelung gleich mit der Gleichung (I) begonnen hätte.

Schwerer noch wiegt unseres Erachtens ein anderer Uebelstand, der für den Anfänger jedenfalls eine ernsthafte Schwierigkeit enthalten muss. Bei Begründung der Quaternionentheorie von der Streckenrechnung aus sind nämlich zunächst nur drei coordinirte Einheiten vorhanden, die drei unabhängigen Strecken des Raumes. Die vierte Einheit, die mit der Einheit des gewöhnlichen Rechnens identificirt wird, erscheint als eine Grösse von ganz verschiedenen Eigenschaften. Dass nun diese trotzdem mit den Strecken, also mit Richtungsgrössen, in Form einer Summe soll verbunden werden können, während doch sonst überall, namentlich aber bei Grassmann, nur gleichartige Grössen zu einer „Summe“ vereinigt werden, hat entschieden etwas Gewaltsames. Es ist das ein Schritt, der um so mehr einer sorgfältigen Motivirung bedurft hätte, als die sonst vielfach als Analogon herangezogene geometrische Deutung von $x + iy$ ganz anders verfährt.

Es scheint uns fraglich, ob sich diese Mängel auf dem von Grassmann beschrittenen Wege überhaupt völlig vermeiden lassen. Jedenfalls werden sie vermieden, wenn man (wie es uns das Naturgemässe zu sein scheint) die Quaternionentheorie von den Drehungen aus begründet, und das Multiplikationstheorem als Parametergruppe der Gruppe der Drehungen hinstellt.

Die doppelte Auffassung der Quaternionen, und damit die verschiedene Deutung der Scalar- und Vectorgrössen, tritt dann erst auf einer späteren Stufe der Entwickelung hervor, als eine Folge des Umstandes, dass die Gruppe der Drehungen zugleich die Adjungirte ihrer eigenen Parametergruppe ist.

Diese auf den Begriffsbildungen der Gruppentheorie fussende Auffassung der Quaternionen ist allerdings erst in neuerer Zeit deutlich hervorgetreten, die Keime dazu finden sich aber schon bei Gauss und Cayley.

S. 271, Z. 8. Aendern sich ... $\mu = 1$. Es ist nämlich in (4b) die linke Seite homogen vom zweiten Grade in e_1, e_2, e_3, die rechte homogen vom ersten Grade in e_0, e_1, e_2, e_3, wenn e_0 die neu hinzukommende Einheit

bezeichnet. Da μ nach dem Vorhergeschickten nicht Null sein soll, so kann man allerdings μ gleich der Einheit setzen, ohne die Allgemeinheit zu beeinträchtigen.

S. 274, Z. 13 v. u. Natürlich ist auch noch die eine Grenze auszuschliessen. Unserer heutigen Auffassung würde es mehr entsprechen, bei gebrochenem μ die Potenz $(\cos\alpha + a\sin\alpha)^{\mu}$ als eine mehrwerthige Grösse anzusehen.

S. 275, oben. Grassmann bedient sich hier einer besonderen Lage des Koordinatensystems. Einfacher und sachgemässer ist es bekanntlich, die Eindeutigkeit der Division aus der Gleichung (III) zu schliessen.

S. 275, Z. 17. „Hieraus ergiebt sich ...“ nämlich, wenn der Winkel der Quaternion q zwischen π und $-\pi$ liegt, mit Ausschluss beider Grenzen. Denn nur in diesem Falle findet sich der Winkel von $1:q$ in demselben Gebiet wie der von q.

S. 277. Der Titel der erwähnten Habilitationsschrift von Frege ist: Rechnungsmethoden, die sich auf eine Erweiterung des Grössenbegriffes gründen.

S. 277, 278. Um die Beziehung von Grassmanns Bezeichnung der Drehungen zu den Formeln Eulers, wie sie sich aus der Quaternionentheorie ergeben, klar zu stellen, zerlegen wir die Quaternion $q = \alpha + a$ in ein Produkt zweier Vectoren b und c (Strecken nach Grassmann):

$$q = bc. \tag{A}$$

Diese werden dann einen unveränderlichen Winkel einschliessen, nämlich den Winkel der Quaternion, und einer von ihnen kann in der Ebene der Quaternion noch willkürlich angenommen werden. Ist daher q' eine andere Quaternion, so kann man gleichzeitig setzen

$$q' = cd, \tag{A'}$$

und daher

$$qq' = c^2 . bd, \tag{B}$$

womit das Produkt qq' wieder in derselben Form erscheint, wie q und q'.

Sei nun e_0 der einfache Punkt, in dem die drei zu einander senkrechten Strecken e_1, e_2, e_3 zusammenstossen, und zugleich die (bei G. unbezeichnet gelassene) vierte Quaternioneneinheit, sei ferner

$$x = x_0 e_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$$

ein beliebiger (x_0-facher) Punkt des Raumes, so wird der Ausdruck der von der Quaternion q bewirkten, das heisst um die zugehörige Strecke a mit dem doppelten Winkel der Quaternion ausgeführten Drehung

$$z = Kq . x . q = (\alpha - a)\, x\, (\alpha + a). \tag{C}$$

Diese Formel kann man aber, nach (A), auch so schreiben:

$$z = cbxbc; \tag{D}$$

und hierfür kann man setzen

$$z = cyc, \quad y = bxb. \tag{E}$$

Jede der beiden letzten Formeln stellt eine einfache Umwendung (Drehung um 180^0) um eine der Axen b, c dar; (E) und (D) zusammen enthalten den Hamiltonschen Satz, wonach jede Drehung auf ∞^1 Arten als Folge zweier Umwendungen dargestellt werden kann. (A), (A′) und (B) enthalten daher das hieraus hervorgehende Gesetz für die geometrische Zusammensetzung der Drehungen.

In der Grassmannschen Bezeichnungsweise treten nun an Stelle der Formeln (D) und (E) die folgenden:

(D′) $$xe^{2Lbc} = z,$$

(E′) $$yc^{\pi} = z, \quad xb^{\pi} = y.$$

während an Stelle von (B) die Formel tritt

(B′) $$e^{2Lbc} \cdot e^{2Lcd} = e^{2Lbd}.$$ (S. Nr. 20.)

Worin die behaupteten Vorzüge der Grassmannschen Symbolik liegen sollen, vermögen wir nicht zu erkennen, zumal neue Resultate damit nicht abgeleitet werden. Jedenfalls werden die Formeln (C), oder die mit ihnen äquivalenten Eulerschen Formeln durch die Formeln (D′) nicht überflüssig gemacht, da diese einen ganz anderen Gedanken ausdrücken.

Allerdings hat Grassmann die Einordnung in seine Systematik, die Unterordnung der Drehung unter den Begriff des Quotienten, das heisst der linearen Transformation erreicht. Das ist indessen von vorn herein klar; es bedurfte dazu gar keiner Formeln. Auch sieht man nicht, warum bloss die Drehung, und nicht auch die Quaternionen-Multiplikation selbst dem Begriff des Quotienten untergeordnet wird.

Ueberdies ist die Grassmannsche Bezeichnung höchst undeutlich. Das Symbol a^{α} kann sowohl eine Quaternion (Formel V) als auch einen Quotienten von der zu den Bewegungen gehörigen Art vorstellen (Formel 16); das Nebeneinanderschreiben (xa^{α}) vertritt demnach zwei gänzlich verschiedene Arten der Multiplikation.

XXII. Verwendung der Ausdehnungslehre für die allgemeine Theorie der Polaren.

Crelles Journal Bd. 84 (1877).

S. 289, Mitte. Dann ergiebt sich, u. s. w.

Nach den vorausgeschickten Definitionen ist $[e_1^{n-1}e_2 \cdot \varepsilon_1^{n-1}\varepsilon_2]$ nicht gleich 1, sondern $= \frac{1}{n}[e_1\varepsilon_1]^{n-1}[e_2\varepsilon_2] = \frac{1}{n}$, und so ist auch der angegebene Werth von $[a^{(n)}\alpha^{(n)}]$ nicht richtig. Um die richtige Formel zu erhalten, schreibe man, abweichend von Grassmann, die Ausdrücke von $a^{(n)}$ und $\alpha^{(n)}$ mit Polynomialcoefficienten

$$a^{(n)} = c_1\mathfrak{a}_1e_1^n + c_2\mathfrak{a}_2e_1^{n-1}e_2 + \cdots + c_\nu\mathfrak{a}_\nu e_4^n,$$

$$\alpha^{(n)} = c_1\mathfrak{b}_1\varepsilon_1^n + c_2\mathfrak{b}_2\varepsilon_1^{n-1}\varepsilon_2 + \cdots + c_\nu\mathfrak{b}_\nu\varepsilon_4^n,$$

wo der zu dem Gliede $e_1^\alpha e_2^\beta e_3^\gamma e_4^\delta$ $(\alpha + \beta + \gamma + \delta = n)$ gehörige Zahlencoefficient c den Werth

$$\frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\,\delta!}$$

hat. Dann wird

$$[a^{(n)}\alpha^{(n)}] = c_1 \,.\, \mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_1 + c_2 \,.\, \mathfrak{a}_2 \mathfrak{b}_2 + \cdots + c_\nu \,.\, \mathfrak{a}_\nu \mathfrak{b}_\nu .$$

S. 290, Mitte.

Die von Grassmann 1844 eingeführte Stufenbezeichnung ist auch in der Formentheorie üblich geworden. Die um die Einheit verringerte Stufenzahl heisst Dimension. Der Gebrauch des Wortes „Stufe“ im Sinne von Dimension, gegen den Grassmann polemisirt, findet sich vermuthlich zuerst bei v. Staudt (Geometrie der Lage, 1847), dem dann Reye und Andere gefolgt sind.

S. 293, 294.

Grassmann wendet hier die scharfe Klammer zur Bezeichnung der auf das Gebiet ν-ter Stufe bezüglichen Multiplikation an. Es ist aber das Zeichen $[a^{(n)}\alpha^{(n)}]$ schon in anderem Sinne verwendet, und beide Bedeutungen sind, wie aus dem vorhin Gesagten folgt, nicht nur der Entstehung nach, sondern auch sachlich verschieden.

Sachregister*)

zu den Abhandlungen I—XXII.

*) Die kursiv gedruckten Seitenzahlen beziehen sich auf die Anmerkungen.

Sachregister*)

zu den Stücken aus der Arithmetik.

*) Die fettgedruckten Zahlen bedeuten die Nummern.

Namenregister*)

zu den Abhandlungen über Geometrie und Analysis.

*) Die kursiv gedruckten Seitenzahlen beziehen sich auf die Anmerkungen.

Druckfehler und Berichtigungen.

S. 65, Z. 1 lies: „Punkten c_1 und c schneide“.
S. 95, Z. 15 lies: „$XAG = 0$“.
S. 98 fehlt in der Kopfüberschrift die Nr. V.
S. 104, 106 fehlt in der Kopfüberschrift die Nr. VI.
S. 113, Z. 1, 4 lies: (p_1) statt (p).
S. 170, Z. 8 lies: „welches n-mal“.
S. 171, Z. 10 lies: „multiplicirt“.
S. 192, Z. 5 v. u. lies: „*Ebenenbüschel bilden*“.
S. 199, Z. 10f. fehlen vor „Oeuvres“ und hinter 517 die Klammern: { }
S. 200, Z. 6 v. u. ist das Komma hinter „réel“ zu tilgen.
S. 202, Z. 4 lies: „les uns des autres“.
S. 203, Z. 6 lies: „la somme de ces“.
S. 204, Z. 8 v. u. lies: „présent“.
S. 236, Z. 10 lies: „das heisst“.
S. 238, Z. 13 v. u. lies: „99“.
S. 244, Z. 15 lies: „letzteren auch“.
S. 245, Z. 7 v. u. lies: „zum Beispiel, wählen wir“.
S. 246, Z. 16 lies unter dem Wurzelzeichen: „α^3“ statt „a^3“.
S. 248, Z. 12f. lies: „einfachen festen Punkt“ und: „beiden andern“.
S. 249, Z. 3 v. u. lies: „allgemeineren Fall“.
S. 275, Z. 3 am Rande lies: 381.
S. 287, Z. 7 am Rande lies: 277.
S. 349 hätte der Satz Nr. 155 kursiv gesetzt werden sollen.
S. 413, Z. 3 lies zu Anfang: „$= A_n \ldots$“.
S. 418, Z. 19 lies: „wie wir“.

